Sistemas Dinâmicos Não Lineares
Quinta Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

31 de agosto de 2022

Semigrupos gradientes

Vamos considerar agora os semigrupos gradientes. Esta classe de semigrupos aparece naturalmente em diversas aplicações e suas características permitem descrever com bastante precisão a estrutura dos seus atratores.

Definição

Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ será dito gradiente se tiver uma função de Lyapunov; isto é, se existir uma função contínua $V : X \to \mathbb{R}$ tal que:

(*i*) $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto V(T(t)x)$ *seja decrescente, para cada* $x \in X$;

(*ii*) *Se* x *for tal que* $V(T(t)x) = V(x)$ $\forall$, $t \in \mathbb{T}^+$, *então* $x \in \mathcal{E}$.

Para semigrupos gradientes temos o seguinte resultado de caracterização:

Lema

Se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *for um semigrupo gradiente, então* $\omega(x)$ *será um subconjunto de* $\mathcal{E}$*, para cada* $x \in X$*. Se existir uma solução global* $\phi : \mathbb{T} \to X$ *por* x*, então* $\alpha_\phi(x)$ *será um subconjunto de* $\mathcal{E}$*.*

Se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *for gradiente, tiver um atrator global* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{E}$ *só tiver pontos isolados, então* $\mathcal{E}$ *será finito e para cada* $x \in X$*,* $\omega(x)$ *será unitário. Neste caso, se* $x \in \mathcal{A}$ *e* $\phi : \mathbb{T} \to \mathcal{A}$ *for uma solução global por* x*, então* $\alpha_\phi(x)$ *e* $\omega(x)$ *serão conjuntos unitários.*

Prova: Se $\omega(x) = \varnothing$ o resultado é trivial. Se $\omega(x) \neq \varnothing$ e $y \in \omega(x)$ temos que $V(T(t)x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$, para algum $c \in \mathbb{R}$, pois é decrescente e possui uma subseqüência convergente.

Como $T(t)\omega(x) \subset \omega(x)$, $t \in \mathbb{T}^+$, temos que cada ponto $y \in \omega(x)$ é tal que $V(T(t)y) = V(y) = c$, $t \in \mathbb{T}^+$, e da propriedade (ii) na Definição 1 temos que $y \in \mathcal{E}$.

Suponha que existe uma solução global $\phi : \mathbb{T} \to X$ por x.

Se $\alpha_\phi(x) = \varnothing$ o resultado é trivial. Por outro lado, se $y \in \alpha_\phi(x)$, existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que $V(\phi(-t)) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} c$, pois é crescente e tem uma subseqüência convergente.

Como $T(t)\alpha_\phi(x) \subset \alpha_\phi(x)$, $t \in \mathbb{T}^+$, temos que para cada $y \in \alpha_\phi(x)$, $V(T(t)y) = V(y) = c$, $t \in \mathbb{T}^+$, e $y \in \mathcal{E}$.

Agora suponhamos que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tenha um atrator global $\mathcal{A}$.

Como $\mathcal{A}$ é compacto e $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$, segue que se todos os pontos de $\mathcal{E}$ são isolados, então $\mathcal{E}$ é finito.

Falta ainda mostrar que se o conjunto das soluções estacionárias é finito então $\omega(x)$ e $\alpha_\phi(x)$ são conjuntos unitários.

Se $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ isto segue imediatamente do fato que $\omega(x)$ e $\alpha_\phi(x)$ são conexos.

Se $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ e $\omega(x) = \{y_1^*, \cdots, y_\ell^*\} \subset \mathcal{E}$ com $\ell \geqslant 2$, então existe uma cobertura disjunta $\{\mathbb{N}_i : 1 \leqslant i \leqslant \ell\}$ de $\mathbb{N}$ com a propriedade que cada $\mathbb{N}_i$ é infinito e $\displaystyle\lim_{\substack{n\in N_i \\ n\to\infty}} T(n)x = y_i^*$, $1 \leqslant i \leqslant \ell$.

Escolha $\{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $k_{2n-1} \in \mathbb{N}_1$ e $k_{2n} = k_{2n-1} + 1 \in \mathbb{N}_j$, para algum $2 \leqslant j \leqslant \ell$. Então, $y_1^* = T(1)y_1^* = \lim_{k\to\infty} T(k_{2n})x = y_j^*$, o que é uma contradição.

Isto mostra que se o conjunto das soluções estacionárias for finito, então $\omega(x)$ será um conjunto unitário.

A prova que $\alpha_\phi(x)$ é um conjunto unitário quando $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ é inteiramente análoga e isto conclui a demonstração. □

Theorem

Se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *for um semigrupo gradiente, eventualmente limitado, assintoticamente compacto e que o seu conjunto de pontos equilíbrios* $\mathcal{E}$ *for limitado, então* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *terá um atrator global* $\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E})$*, onde*

$$W^u(\mathcal{E}) := \{y \in X : \text{existe uma solução global } \phi(\cdot) : \mathbb{T} \to X \\ \text{por } y \ (\phi(0) = y) \text{ tal que } d(\phi(t), \mathcal{E}) \stackrel{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0\}$$

será chamado de conjunto instável de $\mathcal{E}$*. Se* $\mathcal{E} = \{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ *for finito* $\mathcal{A} = \cup_{i=1}^n W^u(e_i^*)$*. Finalmente, se existir um conjunto conexo e limitado* B *que contém* $\mathcal{A}$*, então* $\mathcal{A}$ *será conexo.*

Prova: Como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado e assintoticamente compacto, para cada $x \in X$, $\omega(x)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai x.

Do fato de que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é gradiente segue que $\omega(x) \subset \mathcal{E}$ e, como $\mathcal{E}$ é limitado, temos que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é ponto dissipativo.

Disto obtemos que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global.

Se $x \in \mathcal{A}$, existe uma solução global $\phi : \mathbb{T} \to X$ por x. Como $\phi(\mathbb{T}) \subset \mathcal{A}$ é relativamente compacto, $\alpha_\phi(x)$ é compacto, não vazio e $d(\phi(t), \alpha_\phi(x)) \stackrel{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0$.

Do lema anterior, $\alpha_\phi(x) \subset \mathcal{E}$. Isto mostra que $\mathcal{A} \subset W^u(\mathcal{E})$.

Se $x \in W^u(\mathcal{E})$, existe uma solução global $\phi : \mathbb{T} \to X$ por x e $\phi(t) \stackrel{t \to \pm\infty}{\longrightarrow} \mathcal{E} \subset \mathcal{A}$.

Do fato de que $\phi(\mathbb{T})$ é invariante e limitado concluímos que $\phi(\mathbb{T}) \subset \mathcal{A}$ e consequentemente $x \in \mathcal{A}$.

Isto mostra que $\mathcal{A} \supset W^u(\mathcal{E})$ e completa a prova de que $\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E})$.

Se $\mathcal{E} = \{e_1^*, \cdots e_n^*\}$, a igualdade $\mathcal{A} = \cup_{i=1}^n W^u(e_i^*)$ segue imediatamente do lema anterior e, se $\mathcal{A}$ está contido em um subconjunto conexo e limitado de X, um resultado anterior implica que $\mathcal{A}$ é conexo. $\square$

Lemma

Assuma que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é um semigrupo gradiente que tem um atrator global* $\mathcal{A}$ *e que* $\mathcal{E} = \{y_i^* : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ *para algum* $n \in \mathbb{N}^*$*. Se* $V : X \to \mathbb{R}$ *é função de Lyapunov de* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, $V(\mathcal{E}) = \{\mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_p\}$, $\mathfrak{n}_i < \mathfrak{n}_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant p-1$ *e* $\mathfrak{n}_j \leqslant r < \mathfrak{n}_{j+1}$, *então* $X_r = \{z \in X : V(z) \leqslant r\}$ *é positivamente invariante e a restrição* $\{T_r(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *de* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *a* X_r, *tem atrator global* $\mathcal{A}^{(j)}$ *dado por*

$$\mathcal{A}^{(j)} = \cup\{W^{\mathrm{u}}(y_\ell^*) : V(y_\ell^*) \leqslant \mathfrak{n}_j\}.$$

Em particular, $V(z) \leqslant \mathfrak{n}_j$ *para* $z \in \mathcal{A}^{(j)}$, $\mathfrak{n}_1 = \min\{V(x) : x \in X\}$ *e* $\mathcal{A}^{(1)} = \{y^* \in \mathcal{E} : V(y^*) = \mathfrak{n}_1\}$ *consiste dos pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis; isto é para cada* $y^* \in \mathcal{A}^{(1)}$ *existe uma vizinhança* $\mathcal{O}_{y^*}$ *de* $y*$ *tal que* $T(t)x \to y*$ *para cada* $x \in \mathcal{O}_{y*}$.

Prova: É claro da definição da função de Lyapunov que X_r é positivamente invariante sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$.

Para provar a existência de um atrator para $\{T_r(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ notemos que as propriedades requeridas para obtermos um atrator global são herdadas de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$; a saber, órbitas de subconjuntos limitados de X_r são limitadas, $\{T_r(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é ponto dissipativo e assintoticamente compacto.

Logo, $\{T_r(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}^{(j)}$. A restrição V_r de V a X_r é uma função de Lyapunov para $\{T_r(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ e a caracterização de $\mathcal{A}^{(j)}$ segue.

Seja $\delta_0 = \frac{1}{2}\min\{d(x^*, y^*), x^*, y^* \in \mathcal{A}_1, x^* \neq y^*\}$ e provemos a última afirmação.

Se existem um $\delta_0 > \delta > 0$ e seqüências $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ em X e $\{t_k : k \in \mathbb{N}\}$ em $\mathbb{T}^+$ tais que $x_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} x^*$ e $d(T(t_k)x_k, x^*) \geqslant \delta$ ($d(T(t)x_k, x^*) < \delta$ para $0 \leqslant t < t_k$) concluímos que $\{T(t_k)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ tem uma subseqüência convergente.

De fato, é claro que $t_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e o resultado segue da compacidade assintótica do semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$.

Denote esta subseqüência convergente por $\{T(t_k)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ e seja y seu limite. É imediato do fato de que $V(x_k) \to \mathfrak{n}_1$ que $V(y) = V(T(t)y) = \mathfrak{n}_1$. Portanto $y \in \mathcal{A}_1$ e $\mathrm{dist}(y, x^*) \geqslant \delta$.

Por outro lato $\{T(t_k - 1)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ também tem uma subseqüência convergente e o limite z desta subseqüência pertence a $\mathcal{A}_1 \cap \overline{B_\delta(x^*)}$. Segue que $z = x^*$ e que $x^* = T(1)x^* = T(1)z = y$. Isto é um absurdo.

Isto prova que, para cada $x^* \in \mathcal{A}_1$ e $0 < \delta < \delta_0$ existe um $\delta > \delta' > 0$ tal que, para todo $x \in B_{\delta'}(x^*)$, $\gamma^*(x) \subset B_\delta(x^*)$ e prova que $\mathcal{A}_1$ consiste somente dos equilíbrios estáveis.

Para concluir precisamos somente notar que, para cada $x \in X$, $T(t)x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^*$ para algum $x^* \in \mathcal{E}$. $\square$