Sistemas Dinâmicos Não Lineares
Quarta Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

21 de Agosto de 2023

Condições suficientes para a existência de atratores

No que se segue, apresentaremos alguns resultados que são comumente utilizados para assegurar que um dado semigrupo tenha um atrator global.

Teorema

Um um semigrupo $\{T(t): t \in \mathbb{T}^+\}$ que é eventualmente compacto e ponto dissipativo tem um atrator global. Logo, em dimensão finita, todo semigrupo ponto dissipativo tem um atrator global.

Prova: Como a compacidade assintótica segue da compacidade eventual. Basta mostrar que o semigrupo é eventualmente limitado.

Se $B \subset X$ é limitado, como $\{T(t): t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente compacto, existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t_B)B$ é relativamente compacto. Logo, basta mostrar que subconjuntos compactos de X têm orbitas limitadas.

Seja K um subconjunto compacto de X e B_0 um subconjunto aberto e limitado de X que absorve pontos.

Dado $x \in K$, da continuidade de $T(t)$ existe uma vizinhança $\mathcal{O}_x$ de x e $t_x \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t_x)\mathcal{O}_x \subset T(t_{B_0})B_0$.

Como K é compacto, existem $\{\mathcal{O}_{x_1}, \cdots, \mathcal{O}_{x_p}\}$ que cobrem K. Seja $\tau(K) = \max\{t_{x_i} : 1 \leqslant i \leqslant p\}$, $K_0 = \overline{T(t_{B_0})B_0}$ e $\tilde{K}_0 = \gamma^+_{[0,\tau(K_0)]}K_0$.

Claramente K_0 e $\tilde{K}_0$ são subconjuntos compactos de X. Segue que $T(t)B_0 \subset \tilde{K}_0$ para todo $t \geqslant t_{B_0}$ e para cada subconjunto compacto K de X temos que $T(t)K \subset \tilde{K}_0$ para $t \geqslant \tau(K)$.

Isto prova que a órbita de um subconjunto compacto de X é limitada e conclui a demonstração do resultado.$\square$

Teorema

Seja X um espaço de Banach e $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X. Suponha que $T(t) = S(t) + K(t)$ com $S(t)$ e $K(t)$ satisfazendo

i) Para cada conjunto limitado B em X, existe um $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $K(t)B$ é relativamente compacto para todo $t \geqslant t_B$.

ii) Para cada conjunto limitado B em X, existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $\sup_{x \in B} \|S(t)x\|_X := s_B(t) < \infty$ para todo $t \geqslant t_B$ e $s_B(t) \overset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Então $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto. Além disso, se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ for ponto dissipativo e eventualmente limitado, terá um atrator global.

Prova: Sejan $\varnothing \neq B \subset X$ fechado limitado e positivamente invariante e $\epsilon > 0$, seja $s \in \mathbb{T}^+$ tal que $s \geqslant t_B$ e $s_B(s) < \frac{\epsilon}{2}$.

Como $K(s)B$ é relativamente compacto, existem $N = N(s, B) \in \mathbb{N}$ e $y_1, \cdots y_N$ em $K(s)B$ tais que $K(s)B \subset \cup_{i=1}^{N} B_{\frac{\epsilon}{2}}(y_i)$. Segue que

$$\begin{aligned}\omega(B) &= \cap_{t \in \mathbb{T}^+} \overline{T(t)B} \subset \overline{T(s)B} \subset \overline{S(s)B} + \overline{K(s)B} \\ &\subset \bar{B}_{\frac{\epsilon}{2}}(0) + \cup_{i=1}^{N} \bar{B}_{\frac{\epsilon}{2}}(y_i) \subset \cup_{i=1}^{N} \bar{B}_{\epsilon}(y_i).\end{aligned}$$

Como ϵ é arbitrário, temos que $\omega(B)$ é totalmente limitado. Como $\omega(B)$ é fechado e totalmente limitado no espaço de Banach X segue que $\omega(B)$ é compacto.

Podemos ver facilmente que $\omega(B)$ não é vazio, pois para cada seqüência $\{x_n\}$ em B e $t_n \in \mathbb{T}^+$ com $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ a seqüência $\{T(t_n)x_n\}$ é totalmente limitada, possuindo portanto uma subseqüência convergente.

Agora, procedendo como antes concluímos que $\omega(B)$ atrai B e isto prova que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto.

Se além disso $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é ponto dissipativo e eventualmente limitado. Segue que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global.$\square$

Robusteza de Atratores sob Perturbação

Agora estudaremos a continuidade dos atratores relativamente a perturbações no semigrupo.

Definição

Sejam X e Λ espaços métricos e $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset 2^X$.

1. *Diremos que $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua superiormente em λ_0 se*

$$\mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_{\lambda_0}) = \sup_{x_\lambda\in\mathcal{A}_\lambda} \mathrm{dist}(x_\lambda, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \stackrel{\lambda\to\lambda_0}{\longrightarrow} 0.$$

2. *Diremos que $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua inferiormente em λ_0 se*

$$\mathrm{dist}_H(\mathcal{A}_{\lambda_0}, \mathcal{A}_\lambda) = \sup_{x\in\mathcal{A}_{\lambda_0}} \mathrm{dist}(x, \mathcal{A}_\lambda) \stackrel{\lambda\to\lambda_0}{\longrightarrow} 0.$$

Para provar semicontinuidade superior e inferior empregaremos o seguinte resultado

Lema

Sejam X e Λ espaços métricos e $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset 2^X$.

1. *Se qualquer seqüência $\{x_{\lambda_n}\}$ com $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$, $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$, tem uma subseqüência convergente com limite pertencendo a $\mathcal{A}_{\lambda_0}$, então $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua superiormente em λ_0.*
2. *Se $\mathcal{A}_{\lambda_0}$ é compacto e para qualquer $x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$ e $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$ existe uma subseqüência $\lambda_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$, e seqüência $\{x_{\lambda_{n_k}}\}$ com $x_{\lambda_{n_k}} \in \mathcal{A}_{\lambda_{n_k}}$ que converge para x, então $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ é semicontínua inferiormente em λ_0.*

Prova: 1) Se $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ não é semicontínua superiormente em λ_0, existem $\epsilon > 0$ e seqüência $\{\lambda_n\}$ com $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$ tal que $\sup_{x\in\mathcal{A}_{\lambda_n}} \mathrm{dist}(x, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \geqslant 2\epsilon$, $n \in \mathbb{N}$.

Segue que, para algum $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$, temos que $\mathrm{dist}(x_{\lambda_n}, \mathcal{A}_{\lambda_0}) \geqslant \epsilon$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\{x_{\lambda_n}\}$ tem uma subseqüência que converge para algum elemento de $\mathcal{A}_{\lambda_0}$, chegamos a uma contradição.

2) Se $\{\mathcal{A}_\lambda\}$ não é semicontínua inferiormente em λ_0, existem $\epsilon > 0$ e seqüência $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$ tais que $\sup_{x\in\mathcal{A}_{\lambda_0}} \mathrm{dist}(x, \mathcal{A}_{\lambda_n}) \geqslant 2\epsilon$, $n \in \mathbb{N}$. Logo, para algum $x_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$, temos que $\mathrm{dist}(x_{\lambda_n}, \mathcal{A}_{\lambda_n}) \geqslant 2\epsilon$, $n \in \mathbb{N}$.

Como $\mathcal{A}_{\lambda_0}$ é compacto podemos assumir que $\{x_{\lambda_n}\}$ converge para algum $x \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$ e que $\mathrm{dist}(x, \mathcal{A}_{\lambda_n}) \geqslant \epsilon$, $n \in \mathbb{N}$.

Das hipóteses, existem subseqüências $\lambda_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$ e $y_{\lambda_{n_k}} \in \mathcal{A}_{\lambda_{n_k}}$ tal que $y_{\lambda_{n_k}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$ e $\epsilon \leqslant \mathrm{dist}(x, \mathcal{A}_{\lambda_{n_k}}) \leqslant \mathrm{dist}(x, y_{\lambda_{n_k}}) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, o que é um absurdo. $\square$

Definição

Diremos que a família de semigrupos $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$, *é contínua em* $\eta = 0$ *se* $T_\eta(t,x) \overset{\eta\to 0}{\longrightarrow} T_0(t,x)$ *uniformemente para* (t,x) *em subconjuntos compactos de* $\mathbb{T}^+ \times X$ *quando* $\eta \to 0$.

Teorema (Semicontinuidade Superior)

Suponha que $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ *seja uma família de semigrupos contínua em* $\eta = 0$ *. Se* $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *tem um atrator global* $\mathcal{A}_\eta$ *para cada* $\eta \in [0,1]$ *e* $\overline{\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{A}_\eta}$ *é compacto, então a família* $\{\mathcal{A}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ *é semicontínua superiormente em* $\eta = 0$.

Prova: Considere as subseqüências $\eta_k \to 0$, $u_{\eta_k} \in \mathcal{A}_{\eta_k}$. Como $\overline{\bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathcal{A}_\eta}$ é compacto em X, existe $u_0 \in X$ tal que $u_{\eta_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} u_0$.

Para concluir a demonstração da semicontinuidade superior falta mostrar que $u_0 \in \mathcal{A}_0$. Para este fim, é suficiente provar que existe uma solução global limitada de $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}\}$ por u_0.

Da invariância dos atratores $\mathcal{A}_{\eta_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma solução global limitada $\psi^{(\eta_k)} : \mathbb{T} \to X$ por u_{η_k}.

Para $t \geqslant 0$, segue da continuidade de $[0,1] \ni \eta \to T_\eta(t)x \in X$ uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{T}^+ \times X$ que

$$\psi^{(\eta_k)}(t) = T_{\eta_k}(t)u_{\eta_k} \to T_0(t)u_0,$$

uniformemente para t em limitados de $\mathbb{T}^+$.

Construímos uma solução global por u_0 da seguinte maneira.

Se $\eta_k^0 := \eta_k$, $k \in \mathbb{N}$, dado $j \in \mathbb{N}^*$ existe uma subseqüência $\{\eta_k^j\}$ de $\{\eta_k^{j-1}\}$ e u_{-j} tal que $\psi^{(\eta_k^j)}(-j) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} u_{-j}$. Recorde que

$$\{\psi^{(\eta_k)}(-j)\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \overline{\bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathcal{A}_\eta}.$$

Da convergência de $x \mapsto T_\eta(1)x$ para $x \mapsto T_0(1)x$ uniformemente em subconjuntos compactos de X segue que, para $0 \leqslant i \leqslant j$,

$$\psi^{(\eta_k^j)}(-j) = T_{\eta_k}(i)\psi^{(\eta_k^j)}(-j+i) \to u_{-j} = T_0(i)u_{-j+i}.$$

Definindo

$$\psi^{(0)}(t) := \begin{cases} T_0(t)u_0, & \text{para } t \geqslant 0 \\ T_0(t+j)u_{-j}, & \text{para } -j \leqslant t < -j+1,\ j \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

$\psi^{(0)} : \mathbb{T} \to X$ é uma solução global de $\{T_0(t) : t \in \mathbb{T}\}$ por u_0 e

$$\psi^{(\eta_k^k)}(t) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \psi^{(0)}(t), \quad \forall t \in \mathbb{T}.$$

Como $\psi^{(0)} : \mathbb{T} \to X$ é limitada, sua imagem está em $\mathcal{A}_0$ e $u_0 \in \mathcal{A}_0$.

Agora o resultado segue do lema anterior.$\square$

Observação

A hipótese que $\overline{\cup_{\eta\in[0,1]}\mathcal{A}_\eta}$ *seja compacto no teorema acima pode ser enfraquecida assumindo, em seu lugar, uma compacidade coletiva; isto é, dada uma seqüência* $\{\eta_n\}$ *em* $[0,1]$ *com* $\eta_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *e uma seqüência* $\{x_n\}$ *com* $x_n \in \mathcal{A}_{\eta_n}$*, então* $\{x_n\}$ *tem uma subseqüência convergente.*

Note que isto implica que existe $\eta_0 \in (0,1]$ *tal que* $\cup_{\eta\in[0,\eta_0]}\mathcal{A}_\eta$ *é limitado. A demonstração do teorema acima com esta hipótese mais fraca é inteiramente análoga a demonstração dada.*

Dado um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ e A um conjunto invariante sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, já vimos que existe uma solução global por a, para cada $a \in A$.

As soluções globais mais simples são as constantes; isto é, soluções estacionárias ou pontos de equilíbrio.

Lembremos que $y^* \in X$ é um ponto de equilíbrio para o semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ se o conjunto $\{y^*\}$ é a órbita de uma solução global constante; isto é, $T(t)y^* = y^*$, para todo $t \geqslant 0$.

Denotaremos por $\mathcal{E}$ o conjunto dos pontos de equilíbrio para o semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$.

As soluções globais que tendem a um equilíbrio y^* quando t tende a $-\infty$ formam um conjunto invariante que chamamos de *conjunto instável* $W^u(y^*)$ de y^*; isto é,

$$W^u(y^*) = \{y \in X : \text{existe solução global } \phi_y : \mathbb{T} \to X \\ \text{tal que, } \phi_y(0) = y \text{ e } \phi_y(t) \overset{t \to -\infty}{\longrightarrow} y^*\}.$$

Dado $\delta > 0$, o conjunto dos pontos y de $\mathcal{O}_\delta(y^*)$ tais que existe solução global $\phi_y : \mathbb{T} \to X$ tal que, $\phi_y(0) = y$, $\phi_y(t) \overset{t \to -\infty}{\longrightarrow} y^*$ e $\phi_y(t) \in \mathcal{O}_\delta(y^*)$ para todo $t \in \mathbb{T}^-$ é chamado uma *conjunto instável local* de y^* e é denotado por $W^u_\delta(y^*)$.

A órbita γ_ϕ de uma solução global não constante $\phi : \mathbb{T} \to X$ que tende a um ponto de equilíbrio y^* quando t tende a $\pm\infty$ é chamada uma **órbita homoclinica** em y^*.

Observamos que sempre que existe uma órbita homoclinica em y^*, $W^u_\delta(y^*)$ não coincide com a interseção de $W^u(y^*)$ com $\mathcal{O}_\delta(y^*)$ para nenhum $\delta > 0$.

Teorema (Semicontinuidade Inferior)

Seja $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ *uma família contínua em* $\eta = 0$ *de semigrupos com atratores globais* $\{\mathcal{A}_\eta\}_{\eta\in[0,1]}$. *Suponha que*

a) *Se* $\mathcal{E}_\eta$ *denota o conjunto das soluções estacionárias de* $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, *existe* $\mathfrak{p} \in \mathbb{N}$ *tal que* $\mathcal{E}_\eta = \{y_1^{*,\eta}, \cdots, y_{\mathfrak{p}}^{*,\eta}\}$, *para todo* $\eta \in [0,1]$, *e* $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant \mathfrak{p}} d(y_i^{*,\eta}, y_i^{*,0}) \xrightarrow{\eta\to 0} 0$.

b) *Existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$\{W_\delta^u(y_j^{*,\eta})(y_j^{*,0}) : \eta \in [0,1]\}$$

é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$.

c) $\mathcal{A}_0 = \cup_{j=1}^{\mathfrak{p}} W^u(y_j^{*,0})$.

Então, $\{\mathcal{A}_\eta : \eta \in [0,1]\}$ *é semicontínua inferiormente em* $\eta = 0$.

Prova: De d) temos que $\mathcal{A}_0 = \cup_{j=1}^{\mathfrak{p}} W^u(y_j^{*,0})$. Segue que, se $u_0 \in \mathcal{A}_0$, existe uma solução global $\phi^{(0)} : \mathbb{T} \to X$ por u_0 ($\phi^{(0)}(0) = u_0$), $1 \leqslant \ell \leqslant \mathfrak{p}$ e $\tau \in \mathbb{T}^+$ tal que $\phi^{(0)}(-\tau) \in W_\delta^u(y_\ell^{*,0})$.

De c), existe $u_\eta^{-\tau} \in W_\delta^u(y_j^{*,\eta})$ tal que $u_\eta^{-\tau} \xrightarrow{\eta \to 0} \phi^0(-\tau)$ e solução global $\psi^{(\eta)} : \mathbb{T} \to X$ de $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ com $\psi^{(\eta)}(0) = u_\eta^{-\tau}$ tal que $\psi^{(\eta)}(0) \xrightarrow{\eta \to 0} \phi^{(0)}(-\tau)$.

Segue da continuidade de $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ em $\eta = 0$ que

$$\mathcal{A}_\eta \ni T_\eta(\tau)\psi^{(\eta)}(0) \to u_0.$$

O resultado segue agora do lema.$\square$