Sistemas Dinâmicos Não Lineares
Terceira Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

24 de agosto de 2022

Lema

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X. Se $B \subset X$ e $\omega(B)$ for compacto e atrair B, então:

- *Se $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ e B for conexo, então $\omega(B)$ será conexo;*
- *Se $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, B for conexo e $B \supset \omega(B)$, então $\omega(B)$ será conexo.*

Prova: Suponha que $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ e que $\omega(B)$ é desconexo, então $\omega(B)$ é a união disjunta de dois conjuntos compactos não vazios (portanto separados por uma distância positiva 2ρ), mas $\omega(B)$ atrai B, logo $\mathrm{dist}_H(T(t)(B), \omega(B)) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Isto implica (do fato que $T(t)B$ é conexo) que $T(t)B$ deve estar contido na ρ vizinhança de uma das componentes de $\omega(B)$ para t suficientemente grande.

Por outro lado, da invariância de $\omega(B)$, $T(t)B$ contém $\omega(B)$ o que é uma contradição.

A demonstração do caso $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ segue imediatamente do fato que $\omega(B)$ atrai B, $\lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}_H(\overline{\gamma_t(B)}, \omega(B)) = 0$, e do fato que $\overline{\gamma_t(B)}$ é conexo para cada $t \geq 0$ (já que $[0,\infty) \times X \ni (s,x) \mapsto T(s)x \in X$ é contínua e leva o conexo $[t,\infty) \times B$ sobre o conexo $\gamma_t^+(B)$).$\square$

Resultado Auxiliar

Lema

Se B é um subconjunto não-vazio de X tal que $\overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$ é compacto, para algum $t_0 \in \mathbb{T}^+$, então $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e $\omega(B)$ atrai B.

Prova: Para cada $t \in \mathbb{T}^+$, $t \geq t_0$, $\overline{\gamma_t^+(B)}$ é não-vazio e compacto.

Segue do fato que a família $\{\overline{\gamma_t^+(B)} : t \geq t_0\}$ tem propriedade da interseção finita que $\omega(B) = \bigcap_{t \geq t_0} \overline{\gamma_t^+(B)}$ é não-vazio e compacto.

Mostremos agora que $\omega(B)$ atrai B. Se não, existem $\epsilon_0 > 0$ e seqüências $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ em B, $\{t_n : n \in \mathbb{T}^+\}$ em $\mathbb{T}^+$ com $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, tais que $d(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \epsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $\overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$ é compacto e $\{T(t_n)x_n, n \geq N\} \subset \overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$ para algum $N \in \mathbb{N}$, existe subseqüência tal que $T(t_{n_j})x_{n_j}$ é convergente para algum $y \in X$.

Disto segue que $y \in \omega(B)$ e $d(y, \omega(B) \geq \epsilon_0$ o que é um absurdo. Logo $\omega(B)$ atrai B.

Segue de um resultado anterior que $\omega(B)$ é invariante e a prova está completa.$\square$

Caracterização dos semigrupos que têm atrator global

O conceito a seguir desempenha um papel importante na caracterização dos semigrupos que possuem atrator global.

Definição

Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é dito assintoticamente compacto se, para qualquer subconjunto fechado, limitado e não-vazio* $B \subset X$*, para o qual* $T(t)B \subset B$*, para todo* $t \in \mathbb{T}^+$*, existe um conjunto compacto* $J \subset B$ *que atrai* B*.*

Lema (3)

Suponha que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *seja assintoticamente compacto e* $B \subset X$ *tal que* $\gamma^+_{t_0}(B)$ *seja limitado, para algum* $t_0 \in \mathbb{T}^+$*. Então* $\omega(B)$ *será não-vazio, compacto, invariante e atrai* B*.*

Prova: Como $T(t)$ é contínua e $T(t)\gamma^+_{t_0}(B) \subset \gamma^+_{t_0}(B)$, segue que $T(t)\overline{\gamma^+_{t_0}(B)} \subset \overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$ para todo $t \geqslant 0$.

Como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto temos que existe um compacto $J \subset \overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$ que atrai $\overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$.

Logo, existem seqüências $\epsilon_n \to 0$ e $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tais que $T(t)(\overline{\gamma^+_{t_0}(B)}) \subset \mathcal{O}_{\epsilon_n}(J)$ para todo $t \geqslant t_n$.

Assim, $\varnothing \neq \omega(B) \subset J$. Como $\omega(B)$ é fechado e J é compacto, temos que $\omega(B)$ é compacto.

Mostremos que $\omega(B)$ atrai B. Se não, existem $\epsilon_0 > 0$ e seqüências $x_n \in B$ e $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tais que $d(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \epsilon_0$.

Da compacidade de J e de um resultado anterior, existem seqüências $x_{n_j} \in B$, $t_{n_j} \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $z \in J$ tais que $T(t_{n_j})x_{n_j} \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} z$.

Segue que $z \in \omega(B)$ e $\mathrm{dist}(z, \omega(B)) \geqslant \epsilon_0$, o que nos dá um absurdo e prova que $\omega(B)$ atrai B.

Portanto, $\omega(B)$ é não-vazio, compacto e atrai B e de um lema anterior, segue a invariância.$\square$

Proposição

Seja $\{T(t) :\ t \in \mathbb{T}^{+}\}$ *um semigrupo em um espaço métrico* X.

Suponha que $\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *seja relativamente compacto sempre que* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *e* $\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *forem limitados em* X *e* $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Então $\{T(t) :\ t \in \mathbb{T}^{+}\}$ *será assintoticamente compacto.*

Reciprocamente, se $\{T(t) : t \geq 0\}$ *for um semigrupo eventualmente limitado e assintoticamente compacto, então* $\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *será relativamente compacto sempre que* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *for uma seqüência limitada em* X *e* $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Prova: Suponha que $\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}$ seja relativamente compacto sempre que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}$ forem limitados em X e $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Seja $B \subset X$ um conjunto fechado, limitado e não-vazio tal que $T(t)(B) \subset B$, para todo $t \geqslant 0$.

Então, não é difícil ver que $\omega(B) \subset B$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai B.

Segue que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto.

Por outro lado, se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo eventualmente limitado e $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma seqüência limitada em X, existe $t_0 > 0$ such that $B = \overline{\gamma^+_{t_0}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})}$ é um conjunto limitado.

Como B é positivamente invariante e $\{T(t) : t \geq 0\}$ é assintoticamente compacto, existe um compacto J em X que atrai B.

Em particular, se $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge para J quando n tende a infinito e portanto é relativamente compacto.$\square$

Definição

Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *será chamado* **condicionalmente eventualmente compacto** *se, dado* B *limitado e positivamente invariante, existir* $t_B \in \mathbb{T}^+$ *tal que* $\overline{T(t_B)B}$ *é compacto.*

Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *será chamado* **eventualmente compacto** *se, dado* B *limitado, existir* $t_B \in \mathbb{T}^+$ *tal que* $\overline{T(t_B)B}$ *é compacto.*

Teorema

Um semigrupo condicionalmente eventualmente compacto é assintoticamente compacto.

Prova: Seja $B \subset X$ um conjunto não-vazio, fechado e limitado tal que $T(t)B \subset B$ para todo $t \geqslant 0$.

Então, como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é condicionalmente eventualmente compacto, $\overline{\gamma_t^+(B)}$ é compacto para um t suficientemente grande.

Assim, de um lema anterior, $\omega(B) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} \overline{\gamma_t^+(B)}$ é não-vazio, compacto e atrai B. Isto nos mostra que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto. $\square$

Definição

Diremos que um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *é ponto dissipativo (limitado dissipativo/compacto dissipativo) se existir um subconjunto limitado* $B \subset X$ *que atrai pontos (subconjuntos limitados/subconjuntos compactos) de* X.

Observação

Na definição acima podemos trocar a palavra atrai pela palavra absorve sem alterar o significado dos conceitos.

Lema

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *um semigrupo ponto dissipativo e assintoticamente compacto. Se* $\gamma^+(K)$ *for limitada sempre que* K *for compacto, então* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *será compacto dissipativo.*

Prova: Como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é ponto dissipativo, existe um conjunto não-vazio e limitado B que absorve pontos de X.

Seja $U = \{x \in B : \gamma^+(x) \subset B\}$. Como B absorve pontos, temos que U é não-vazio. Claramente $\gamma^+(U) = U$, U é limitado e absorve pontos.

Sabemos também que $T(t)(\overline{\gamma^+(U)}) \subset \overline{\gamma^+(U)}$, $t \geqslant 0$, e que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto.

Portanto, existe um conjunto compacto J, com $J \subset \overline{\gamma^+(U)} = \overline{U}$, tal que J atrai U e portanto J atrai pontos de X.

Mostremos agora que existe uma vizinhança V de J tal que $\gamma_t^+(V)$ é limitado para algum $t \in \mathbb{T}^+$.

Se este não é o caso, existem seqüências $x_n \in X$, $x_n \to y \in J$ e $t_n \to \infty$ tais que $\{T(t_n)x_n : n \in \mathbb{N}\}$ não é limitada.

Considere $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, logo $\overline{A}$ é compacto e $\gamma^+(A)$ é não-limitada.

Isto contradiz a hipótese de que órbitas de compactos são limitadas e portanto existe $t \in \mathbb{T}^+$ e vizinhança V de J tal que $\gamma_t^+(V)$ é limitada.

Seja V uma vizinhança de J e $t_V \in \mathbb{T}^+$ tal que $\gamma^+_{t_V}(V)$ é limitado.

Como J atrai pontos e $T(t)$ é contínua, para todo $x \in X$ existe uma vizinhança $\mathcal{O}_x$ de x e $t_x > 0$ tal que $T(t)(\mathcal{O}_x) \subset \gamma^+_{t_V}(V)$ para $t \geqslant t_x$; isto é, $\gamma^+_{t_V}(V)$ absorve uma vizinhança de x para cada $x \in X$.

Disto segue facilmente que $\gamma^+_{t_V}(V)$ absorve subconjuntos compactos de X e que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é compacto dissipativo.$\square$

Proposição (Aula Anterior)

Seja K um subconjunto compacto e não vazio de X e $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma seqüência em X tal que

$$\mathrm{dist}(x_n, K) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

então $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tem uma subseqüência convergente.

Sejam K e K_1 subconjuntos compactos e não vazios de X . Se K atrai K_1, sob a ação de um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ em X, então $\gamma^+(K_1)$ é relativamente compacto e $\varnothing \neq \omega(K_1) \subset K$.

Proposição

Seja X um espaço métrico e $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo. Se K for um compacto que atrai a si mesmo, então $\omega(K) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} T(t)K$.

Prova: Claramente $\bigcap_{t\in\mathbb{T}^+} T(t)K \subset \omega(K)$. Agora, para a inclusão contrária, usamos uma proposição anterior com $K_1 = K$ para garantir que $\omega(K) \subset K$ e $\gamma^+(K)$ é relativamente compacta.

Assim, $\omega(K)$ é não-vazio, compacto, invariante, atrai K e

$$\omega(K) = T(t)\omega(K) \subset T(t)K, \text{ para todo } t \in \mathbb{T}^+,$$

Isto prova o resultado.$\square$

O seguinte teorema caracteriza os semigrupos que possuem atratores globais.

Teorema

Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *será eventualmente limitado, ponto dissipativo e assintoticamente compacto se, e somente se,* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *tiver um atrator global* $\mathcal{A}$*.*

Prova: Do fato de que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto, ponto dissipativo e eventualmente limitado segue do lema anterior que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é compacto dissipativo.

Seja C um conjunto limitado que absorve subconjuntos compactos de X. Considere $B = \{x \in C : \gamma^+(x) \subset C\}$.

Claramente B absorve subconjuntos compactos de X, $T(t)\overline{B} \subset \overline{B}$ e, como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é assintoticamente compacto, existe um conjunto compacto $K \subset \overline{B}$ que atrai B.

Segue que K atrai subconjuntos compactos de X.

O conjunto $\mathcal{A} = \omega(K)$ é não-vazio, compacto, invariante. Se $J \subset X$ é compacto $\omega(J) \subset K$ e, consequentemente, $\omega(J) = T(s)\omega(J) \subset T(s)K$ para cada $s \geqslant 0$.

Segue da proposição anterior que $\omega(J) \subset \cap_{s\in\mathbb{T}^+} T(s)K = \omega(K)$ e consequentemente $\omega(K)$ atrai J.

Seja B um subconjunto limitado de X, como $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é eventualmente limitado e assintoticamente compacto, segue do Lema 3 que $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai B.

Como $\omega(B)$ é compacto e invariante temos que $\omega(B) \subset \mathcal{A}$ e consequentemente $\mathcal{A}$ atrai B.

Claramente, se $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tem um atrator global, ele é eventualmente limitado, ponto dissipativo e assintoticamente compacto. $\square$