# Sistemas Dinâmicos Não Lineares
# Segunda Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

09 de agosto de 2023

# Atratores para Semigrupos

Seja $X$ um espaço métrico e $d : X \times X \to [0, \infty)$ sua métrica. Denote por $\mathcal{C}(X)$ o conjunto das transformações contínuas de $X$ em $X$.

Escreveremos $\mathbb{T}$ para denotar $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$, $\mathbb{T}^+ = \{t \in \mathbb{T} : t \geqslant 0\}$, $\mathbb{T}^- = \{t \in \mathbb{T} : t \leqslant 0\}$, $\mathbb{T}^-_t = t + \mathbb{T}^-$ e $\mathbb{T}^+_t = t + \mathbb{T}^+$.

Dados $K \subset X$ e $r > 0$, a $r-$vizinhança de $K$ é o conjunto definido por $\mathcal{O}_r(K) := \{x \in X : d(x, K) < r\}$.

## Definição

*Um* **semigrupo** *é uma família* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\} \subset \mathcal{C}(X)$ *tal que*

- $T(0)x = x$ *para todo* $x \in X$,
- $T(t+s) = T(t) \circ T(s)$,
- $[0, \infty) \times X \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in X$ *é contínua.*

No caso em que $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ a terceira condição está automaticamente satisfeita e, como $T(n) = T(1)^n$, escrevendo $T := T(1)$, o semigrupo pode ser escrito na forma $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$.

Para um dado semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ e um ponto $x \in X$ definimos:

- A função $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto T(t)x \in X$ é a **solução** por $x$ do semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$.

  No caso $\mathbb{T}^+ = \mathbb{N}$, a solução por $x$ satisfaz, para $T := T(1)$, o problema discreto de valor inicial

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Tx_n, \ \ n \in \mathbb{N}, \\ x_0 &= x. \end{aligned} \tag{1}$$

Agora definiremos as noções de **atração** e **absorção** sob a ação do semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$.

Para este fim, relembremos a definição de **semi-distância de Hausdorff** $\mathrm{dist}_H(A, B)$ entre dois subconjuntos $A$ e $B$ de $X$

$$\mathrm{dist}_H(A, B) := \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y).$$

Denotamos por $\mathrm{dist}(A,B)$ a distância usual entre conjuntos; isto é,

$$\mathrm{dist}(A, B) := \inf_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y).$$

## Exercício

*Mostre que* $\mathrm{dist}_H(A, B) = 0$ *se, e somente se,* $\overline{A} \subset \overline{B}$ *e que existem conjuntos fechados e não vazios* $A$ *e* $B$ *tais que* $\mathrm{dist}(A, B) = 0$ *e* $A \cap B = \varnothing$.

Sejam $X$ um espaço métrico e $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\} \subset \mathcal{C}(X)$ um semigrupo. Para $t \in \mathbb{T}^+$ e $B \subset X$ escrevemos $T(t)B := \{T(t)x : x \in B\}$.

## Definição

*Se $A$ e $B$ são subconjuntos de $X$, diremos que $A$* **atrai** *$B$, sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, se*

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}_H(T(t)B, A) = 0.$$

*Diremos que $A$* **absorve** *$B$, sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, se existir um $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t)B \subset A$ para todo $t \geq t_0$. Em particular, se $A$ absorve $B$, então $A$ atrai $B$ (a recíproca não vale).*

A noção de invariância desempenha um papel fundamental no estudo da dinâmica assintótica de semigrupos.

**Definição**

*Diremos que um subconjunto $A$ de $X$ é* **invariante** (*ou* **positivamente invariante**) *pela ação de* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ *se* $T(t)A = A$ (*ou* $T(t)A \subset A$), *para todo* $t \in \mathbb{T}^+$ .

*Um conjunto invariante unitário corresponde a um ponto de equilíbrio de* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$*; isto é, um ponto* $x^* \in X$ *tal que* $T(t)x^* = x^*$ *para todo* $t \in \mathbb{T}^+$.

Finalmente estamos em condições de definir atratores globais

**Definição**

*Um conjunto $\mathcal{A}$ será chamado de* **atrator global** *para o semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ se for compacto, invariante e atrair subconjuntos limitados de $X$, sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$.*

Note que, o atrator global de um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, se existir será único. De fato, se $\mathcal{A}$ e $\hat{\mathcal{A}}$ forem atrato res globais para o semigrupo,

$$\mathrm{dist}_H(\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}}) = \mathrm{dist}_H(T(t)\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}}) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

e assim $\mathcal{A} \subset \hat{\mathcal{A}}$. Analogamente $\hat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$, e a unicidade segue.

Para um dado semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$, um ponto $x \in X$ e um subconjunto $B \subset X$, definimos:

- A **órbita positiva** de $B$, $\gamma^+(B) := \bigcup_{t \in \mathbb{T}^+} T(t)B$;
- A **órbita** de $T(t)B$, $\gamma_t^+(B) := \displaystyle\bigcup_{s \in \mathbb{T}^+} T(s+t)B = \bigcup_{s \in \mathbb{T}_t^+} T(s)B$.

## Definição

*Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dito* **eventualmente limitado** *se para cada limitado $B \subset X$ existir $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $\gamma_{t_B}^+(B)$ é limitado.*

*Diremos que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é limitado se $\gamma^+(B)$ é limitado sempre que $B$ for limitado.*

**Definição**

*O conjunto $\omega$-limite de $B \subset X$ é definido como segue*

$$\omega(B) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} \overline{\gamma_t^+(B)},$$

A seguir definimos **solução global** por um ponto $x \in X$ (quando existir), **órbita negativa**, **órbita global** de um ponto $x$ de $X$ e o conjunto $\alpha-$**limite** relativo a uma solução global.

## Definição

*Uma* **solução global** *de* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *por* $x \in X$ *é uma função contínua* $\phi : \mathbb{T} \to X$ *tal que* $\phi(0) = x$ *e* $T(t)(\phi(s)) = \phi(t+s)$, *para todo* $t, s \in \mathbb{T}$ *com* $t \geq 0$.

*Como não estamos asumindo que* $T(t)$ *seja injetiva, uma solução global por* $x$, *se existir, não precisará ser única.*

*Uma solução global constante será chamada* **solução estacionária** *e o seu valor um* **ponto de equilíbrio**.

*Quando existir uma solução global* $\phi : \mathbb{T} \to X$ *por* $x \in X$, *poderemos definir a* **órbita global** *de* $x$, *relativa à solução global* $\phi$, *do seguinte modo* $\gamma_\phi(x) := \{\phi(t) : t \in \mathbb{T}\}$.

*Neste caso, para cada* $t \in \mathbb{T}$ *escrevemos* $(\gamma_\phi)_t^-(x) = \{\phi(s) : s \leq t\}$. *Definimos o conjunto* $\alpha-$**limite de** $x$ **relativo a** $\phi$ *por*

$$\alpha_\phi(x) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^-} \overline{(\gamma_\phi)_t^-(x)}.$$

As seguintes caracterizações dos conjuntos $\omega-$limite e $\alpha-$limite serão usadas com freqüência, no desenvolvimento da teoria.

## Proposição

*Se $B \subset X$, $\omega(B)$ será fechado e*

$$\omega(B) = \{y \in X : \text{ existem seqüências } \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ em } \mathbb{T}^+ \text{ e } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ em } B \text{ tais que } t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \text{ e } y = \lim_{n\to+\infty} T(t_n)x_n\}.$$

*Se $\phi : \mathbb{T} \to X$ for uma solução global de $\{T(t) : t \geq 0\}$ por $x \in X$, então $\alpha_\phi(x)$ será fechado e*

$$\alpha_\phi(x) = \{v \in X : \text{ existe uma seqüência } \{t_n\} \text{ em } \mathbb{T}^+ \text{ tal que } t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \text{ e } \phi(-t_n) \to v\}.$$

**Prova:** Primeiramente, seja $y \in \omega(B)$. Então $y \in \bigcap_{t\in\mathbb{T}^+} \overline{\gamma_t^+(B)}$, e assim $y \in \overline{\gamma_t^+(B)}$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$; isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma seqüência $\{y_k^n\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \gamma_n^+(B)$ tal que $y_k^n \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y$.

Como $y_k^n \in \gamma_n^+(B)$ para todo $n\in\mathbb{N}$ e $k\in\mathbb{N}$, existem $\{x_k^n\}_{n,k\in\mathbb{N}} \subset B$ e $\{q_k^n\}_{n,k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$ tais que

$$y_k^n = T(n+q_k^n)x_k^n.$$

Sabemos que dados $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$, existe $k(n,\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(y_k^n, y) < \epsilon, \text{ se } k \geq k(n,\epsilon),$$

isto é, $d(T(n+q_k^n)x_k^n, y) < \epsilon$ se $k \geq k(n,\epsilon)$.

Defina então $t_n := n + q^n_{k(n,\frac{1}{n})}$ e $x_n := x^n_{k(n,\frac{1}{n})}$, assim

$$d(T(t_n)x_n, y) < \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Portanto $y = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$, $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $x_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para a recíproca, seja $y \in X$ e seqüências $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$, tais que $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $y = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$.

Assim, fixado $\tau \in \mathbb{T}^+$ temos $\{T(t_n)x_n\}_{t_n\geq\tau} \subset \gamma^+_\tau(B)$, e $y \in \overline{\gamma^+_\tau(B)}$. Isto mostra que $y \in \omega(B)$.

A caracterização de $\alpha_\phi(x)$ tem prova análoga.$\square$

**Lema**

*Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em um espaço métrico $X$. Suponha que $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tenha um atrator $\mathcal{A}$. Então, dado $x \in \mathcal{A}$, existe solução global limitada $\phi_x : \mathbb{T} \to X$ tal que $\phi_x(0) = x$.*

**Prova:** $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto \phi(t) := T(t)x \in X$ está sempre bem definida e é limitada. Como $x \in \mathcal{A} = T(1)\mathcal{A}$, existe $x_{-1} \in \mathcal{A}$ tal que $T(1)x_{-1} = x$. Procedendo indutivamente, conseguimos uma seqüência $\{x_{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $x_0 = x$ e $T(1)x_{-n-1} = x_{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, (recorde que a seqüência $\{x_{-n}\}$ não precisa ser unicamente determinada).

Defina então

$$\phi_x(t) = \begin{cases} T(t)x, \ \ t \geq 0 \\ T(j+t)x_{-j}, \ \ t \in [-j, -j+1) \cap \mathbb{T}, \ \ j = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

que é uma solução global limitada em $\mathcal{A}$ passando por $x$ em $t = 0$.$\square$

Reciprocamente, cada solução global limitada $\phi : \mathbb{Z} \to X$ para $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é tal que $\phi(\mathbb{T}) \subset \mathcal{A}$. Assim, concluímos que

$$\mathcal{A} = \{x \in X : \text{ existe uma solução global limitada por } x\} \qquad (2)$$

## Proposição

*Seja $K$ um subconjunto compacto e não vazio de $X$ e $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma seqüência em $X$ tal que*

$$\mathrm{dist}(x_n, K) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

*então $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tem uma subseqüência convergente.*

*Sejam $K$ e $K_1$ subconjuntos compactos e não vazios de $X$ . Se $K$ atrai $K_1$, sob a ação de um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ em $X$, então $\gamma^+(K_1)$ é relativamente compacto e $\varnothing \neq \omega(K_1) \subset K$.*

**Prova:** Para a primeira parte, notemos que dado $m \in \mathbb{N}$, existem $n_m \in \mathbb{N}$ e $y_{n_m} \in K$ tais que $d(x_{n_m}, y_{n_m}) < \frac{1}{m}$.

Como $K$ é compacto podemos assumir, passando a uma subseqüência se necessário, que $y_{n_m} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} y_0$ para algum $y_0 \in K$.

Assim, obtemos

$$d(x_{n_m}, y_0) \leq d(x_{n_m}, y_{n_m}) + d(y_{n_m}, y_0) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0;$$

isto é, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subseqüência convergente.

Agora, para a segunda parte, dado $\epsilon > 0$ existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que

$$T(t)K_1 \subset \mathcal{O}_{\frac{\epsilon}{2}}(K), \text{ para todo } t \geq t_0.$$

Assim, $\displaystyle\bigcup_{t\geq t_0} T(t)K_1$ está contido numa união finita de bolas de raio $\epsilon$.

Segue facilmente do fato que $\cup_{0\leq t\leq t_0} T(t)K_1$ é compacto, que $\gamma^+(K_1)\cup K$ é totalmente limitado.

Do ítem anterior temos que $\gamma^+(K_1)\cup K$ é completo e portanto compacto. Segue que $\gamma^+(K_1)$ é relativamente compacto.

Finalmente, temos $\overline{\gamma_t^+(K_1)}$ compacto e não-vazio, para todo $t\in\mathbb{T}^+$ e $\overline{\gamma_t^+(K_1)}\subset\overline{\gamma_s^+(K_1)}$ para $s\leq t$, ou seja, a família $\{\overline{\gamma_t^+(K_1)}\}_{t\in\mathbb{T}^+}$ possui a propriedade da interseção finita e assim

$$\omega(K_1)=\bigcap_{t\in\mathbb{T}^+}\overline{\gamma_t^+(K_1)}\neq\varnothing.$$

Dados $y\in\omega(K_1)$ e $\epsilon>0$, existe $t_0\in\mathbb{T}^+$ tal que

$$y\in\overline{\gamma_{t_0}^+(K_1)}\subset\mathcal{O}_\epsilon(K),$$

assim $\mathrm{dist}(y,K)\leq\epsilon$ e como $\epsilon$ é arbitrário, segue o resultado. $\square$

## Lema (2)

*Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em $X$. Para qualquer $B \subset X$, $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Se $\omega(B)$ for compacto e atrair $B$, então $\omega(B)$ será invariante.*

**Prova:** Se $\omega(B) = \varnothing$, não há o que provar. Se $\omega(B) \neq \varnothing$, fixe $t \in \mathbb{T}^+$ e observe que, se $y \in \omega(B)$, existirão seqüências $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tais que $y = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$.

Segue da continuidade de $T(t)$ que $T(t)y = \lim_{n\to\infty} T(t + t_n)x_n$ e que $T(t)y \in \omega(B)$. Logo $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$.

Resta mostrar que, se $\omega(B)$ é compacto e atrai $B$, então $\omega(B) \subset T(t)\omega(B)$ para cada $t \in \mathbb{T}^+$. Para $x \in \omega(B)$, existem seqüências $t_n \to \infty$ e $x_n \in B$ tais que $T(t_n)x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Para $t \in \mathbb{T}^+$ fixo, uma vez que $t_n \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n > t$ para todo $n \geq n_0$. Portanto $T(t)T(t_n - t)x_n = T(t_n)x_n \to x$ quando $n \to \infty$.

Como $\omega(B)$ atrai $B$, temos que $\mathrm{dist}(T(t_n - t)x_n, \omega(B)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Como $\omega(B)$ compacto, segue da Proposição 2 que $\{T(t_n - t)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subseqüência convergente (que denotaremos novamente por $\{T(t_n - t)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$).

Se $T(t_n - t)x_n \to y$, temos que $y \in \omega(B)$ e que $T(t)y = x$. Portanto, $\omega(B) = T(t)\omega(B)$.$\square$

**Lema**

*Suponha que $x \in X$ e que exista uma solução global $\phi : \mathbb{T} \to X$ por $x$ com $\overline{\phi(\mathbb{T}^-)}$ compacto. Então, $\alpha_\phi(x)$ será não-vazio, compacto e invariante.*

**Prova:** Da definição de $\alpha_\phi(x)$, da compacidade de $\overline{\phi(\mathbb{T}^-)}$ e da propriedade da interseção finita segue que $\alpha_\phi(x)$ é não-vazio e compacto. Mostremos que $\alpha_\phi(x)$ é invariante.

Fixe $t \in \mathbb{T}^+$. Da Proposição 1, se $y \in \alpha_\phi(x)$, existe uma seqüência $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ tal que $\phi(-t_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$.

Da continuidade de $T(t) : X \to X$ obtemos que $T(t)\phi(-t_n) = \phi(t - t_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T(t)y$ e portanto $T(t)y \in \alpha_\phi(x)$.

Por outro lado, se $w \in \alpha_\phi(x)$, existe uma seqüência $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tal que $\phi(-t_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} w$.

Como $\{\phi(-t_n - t) : n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto, passando para uma subseqüência se necessário, existe $z \in X$ tal que $\phi(-t_n - t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$ e $z \in \alpha_\phi(x)$.

Segue da continuidade de $T(t)$ que $T(t)z = w$.$\square$

## Observação

*Segue diretamente da primeira parte do Lema 2 que, se* $x \in X$ *e* $\omega(x) = \{x^*\}$ *(for unitário), então* $x^*$ *será um equilíbrio para* $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$. *Um resultado similar vale para* $\alpha_\phi(x)$.