Sistemas Dinâmicos Não Lineares
Primeira Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

07 de Agosto de 2023

Acesso ao ambiente de aprendizado eletrônico

E-DISCIPLINAS

Todas as informações e material do curso estão disponíveis em hhttps://edisciplinas.usp.br/acessar/

Para o seu primeiro acesso

ID do Usuário: ID ou Mail USP

Senha: Sua senha

Você também poderá acessar diversas informações da disciplina em https://sites.icmc.usp.br/andcarva/pos-graduacao.html

Provas e Calendário de Aulas

Provas

- Prova 1 no dia 04/Outubro às 08:00–10:00hs
- Prova 2 no dia 29/Novembro às 08:00–10:00hs

Horário das Aulas: 08:00–10:00hs (segunda-feira e quarta-feira)
Local das Aulas: Sala 5002

Calendário de Aulas

Mês	Seg	Qua	Seg	Qua	Seg	Qua	Seg	Qua	Seg	Qua
Ago			07	09	**14**	16	21	23	28	30
Set			**04**	**06**	11	13	18	20	25	27
Out	02	**04**	09	11	16	18	23	25	30	
Nov		01	06	08	13	15	20	22	27	**29**
Dez	04	06								

Atendimento

Atendimento com o professor

- **Quando:** *Entrar em contato por e-mail para agendar horário.*
- **Onde:** Video-Conferência ou Sala 3-123.

Objetivo e Justificativa

- **Objetivo:** Apresentar as noções básicas dos sistemas dinâmicos em espaços de dimensão infinita aos alunos de final de mestrado e início de doutorado como ferramenta básica para aplicações em diversas especialidades do conhecimento matemático.

- **Justificativa:** O conceito de sistemas dinâmicos surge para unificar diversos aspectos do estudo de modelos matemáticos de problemas físicos evolutivos (contínuos ou discretos). Desta forma, constituem uma ferramenta matemática básica para a pesquisa em diversas especialidades da matemática.

- **Programa:**
  - I. Atratores para semigrupos
    - I.1. Fatos básicos: órbitas, conjuntos ômega-limite e alpha-limite, conjuntos invariantes, estabilidade, compacidade assintótica, medidas de não-compacidade, dissipatividade e a definição de atratores. Condições suficientes para existência de atratores.
    - I.2. Estrutura interna: Pontos de equilíbrio: estabilidade sob perturbação, variedades instáveis e estáveis. Semigrupos gradientes e a caracterização de seus atratores. Decomposição de Morse e funções de Lyapunov.
    - I.3. Robusteza: Semigrupos de tipo-gradiente e a estabilidade da decomposição de Morse sob perturbação. Semicontinuidade superior e inferior de atratores. Atratores exponenciais. Taxa de atração uniforme e sua relação com a continuidade de atratores e a taxa de convergência de atratores.
    - I.4. Dimensão e Teoremas de Imersão: Capacidade e dimensão de Hausdorff de atratores. Dimensão, dimensão de Hausdorff e capacidade limite. Projeções de compactos com capacidade finita. Dimensão de conjuntos compactos negativamente invariantes.

- II. Atratores de processos de evolução não autônomos:
  - II.1. Noções básicas, condições para existência e propriedades elementares.
  - II.2 Dicotomias
    - II.2.1. Dicotomia Discreta: definição e propriedades básicas. Admissibilidade. Robusteza.
    - II.2.2. Dicotomia Exponencial: definição e propriedades básicas. Robusteza. Admissibilidade.
- II.3. A propriedade do ponto de sela.
  - II.3.1. Variedades instáveis locais como gráfico (métodos de Perron e graph transform).
  - II.3.2. Variedades estáveis locais como gráfico.
  - II.3.3. Soluções globais hiperbólicas: perturbação de soluções globais hiperbólicas e suas variedades instáveis e estáveis locais.
- II.4. Hiperbolicidade e continuidade de atratores.

Bibliografia:

- **Principal:**

1. CARVALHO, A., LANGA, J., and ROBINSON, J. Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems. Applied Mathematical Sciencers. Springer, 2013.

- **Complementar:**

2. HALE, J. Asymptotic behavior of dissipative systems. MSMONO **25** American Mathematical Society, 1988.
3. BORTOLAN, M. , CARVALHO, A. and LANGA, J. Attractors Under Autonomous and Non-autonomous Perturbations - MSMONO **246** 2023.
4. LADYZHENSKAYA, O. Attractors for semigroups and evolution equations. Cambridge Univ. Press, 1991.
5. BABIN, A. , and VISHIK, M.. Attractors of evolution equations. Amsterdam: North-Holland, 1992.
6. CHEPYZHOV, V., and VISHIK, M. Attractors for equations of mathematical physics. Providence, RI: American Mathematical Society, 2002.

Motivação

Para explicar o que é um sistema dinâmico imaginemos que queiramos prever o valor variável x em instantes futuros e denotemos o espaço dos possíveis valores para esta variável por X.

A variável x pode descrever uma infinidade quantidades físicas, biológicas, econômicas, etc.

Como exemplo citamos a posição de um corpo no espaço (um vetor em $\mathbb{R}^3$) ou a distribuição de temperaturas em um corpo Ω (uma função definida em Ω e tomando valores em $\mathbb{R}$).

Assim, o espaço X pode ser de dimensão finita ou infinita.

Um sistema dinâmico é uma família de operadores $\{S(t,s) : t \geqslant s\}$, definidos em X e tomando valores nele mesmo de forma que, dado que o valor da variável no instante s é x, $S(t,s)x$ é o valor da variável num instante posterior t.

O conhecimendo do sistema dinâmico nos permite saber (no futuro) os valores da variável que conhecemos no instante presente para cada possível valor da variável x em X.

É claro que esta família de operadores deve obedecer certas condições de compatibilidade. Estas condições são i) $S(t,t) = I_X$, para todo t, onde I_X é a identidade em X e ii) $S(t,\tau)S(\tau,s)x = S(t,s)x$ sempre que $t \geqslant \tau \geqslant s$ e $x \in X$.

Se t, s forem tomados em $\mathbb{Z}$, diremos que $\{S(t,s) : t \geqslant s\}$ é um sistema dinâmico discreto e se t, s são tomados em $\mathbb{R}$ diremos que $\{S(t,s) : t \geqslant s\}$ é um sistema dinâmico contínuo. Para fixar idéias vamos imaginar que estamos trabalhando com um sistema dinâmico contínuo.

O espaço X, em geral, é um espaço métrico e denotaremos por $\mathrm{dist}(\cdot,\cdot) : X \times X \to [0, \infty)$ a sua métrica. Pedimos também que um sistema dinâmico goze de alguma propriedade de continuidade; isto é, iii) $\{(t,s,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times X : t \geqslant s\} \ni (t,s,x) \mapsto S(t,s)x \in X$ é contínua.

Definição

Seja X um espaço métrico e $\mathcal{C}(X)$ o espaço das transformações contínuas de X nele mesmo. Um sistema dinâmico em X é uma família $\{S(t,s) : t \geqslant s\} \subset \mathcal{C}(X)$ tal que

i) $S(t,t)x = x$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *e para todo* $x \in X$,

ii) $S(t,\sigma) \circ S(\sigma,s) = S(t,s)$ *para todo* $t \geqslant \sigma \geqslant s$,

iii) $\{(t,s,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times X : t \geqslant s\} \ni (t,s,x) \mapsto S(t,s)x \in X$ *é contínua.*

Em geral, distinguiremos dois tipos de sistemas dinâmicos.

Os sistemas dinâmicos autônomos são aqueles que satisfazem $S(t,s) = S(t-s,0)$ para todo $t \geqslant s$. Neste caso se definimos $T(t) = S(t,0) \in \mathcal{C}(X)$ temos que

i) $T(0)x = x$, para todo $x \in X$,

ii) $T(t)T(s) = T(t+s)$ para todo $t, s \in [0,\infty)$ e

iii) $[0,\infty) \times X \ni (t,x) \mapsto T(t)x \in X$ é contínua.

Uma família $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ com as propriedades acima é chamada um semigrupo contínuo.

É claro que, a partir de um semigrupoo $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ podemos definir um sistema dinâmico autônomo $\{S(t,s) : t \geqslant s\}$ fazendo $S(t,s) = T(t-s)$, $t \geqslant s$.

Note que, num sistema dinâmico autônomo, a evolução do estado x ocupado no instante s para o estado $S(t+s,s)x$ ocupado no instante $t+s$ é independente de s e depende apenas de t.

Os demais sistemas dinâmicos serão chamados sistemas dinâmicos não autônomos.

Os sistemas dinâmicos aparecem frequentemente associados a equações diferenciais que podem ser ordinárias, parciais ou funcionais.

Para exemplificar, vamos considerar uma classe de exemplos que surge nas equações diferenciais ordinárias

Exemplo

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x) \\ x(s) &= x_s \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{1}$$

onde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é uma função continuamente diferenciável. Nestas condições, o seguinte resultado vale*

Theorem

Para cada $x_s \in \mathbb{R}^n$ *e* $s \in \mathbb{R}$, *existe* $\tau > s$ *e função continuamente diferenciável* $[s, \tau) \ni t \mapsto \xi(t) \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $\xi(s) = x_s$ *e* $\dot{\xi}(t) = f(t, \xi(t))$ *para todo* $t \in (s, \tau)$. *Esta função é chamada uma solução do problema de valor inicial* (1) *e tem as seguintes propriedades*

- *Se existe* $\sigma > s$ *e função continuamente diferenciavel* $\eta : [s, \sigma) \to \mathbb{R}^n$ *tal que* $\eta(s) = x_s$ *e* $\dot{\eta}(t) = f(t, \eta(t))$ *para todo* $t \in (s, \sigma)$ *então* $\xi(t) = \eta(t)$ *para todo* $t \in [0, \min\{\sigma, \tau\})$
- *Existe* $\tau(s, x_s) > s$ *e uma solução* $[s, \tau(s, x_s)) \ni t \mapsto x(t, s, x_s) \in \mathbb{R}^n$ *de* (1) *tal que ou* $\tau(s, x_s) = \infty$ *ou* $\limsup_{t \to \tau(s, x_s)} \|x(t, s, x_s)\| = \infty$.
- *Se* $E = \{(t, s, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : s \leqslant t < \tau(s, x)\}$, *a função* $E \ni (t, s, x_s) \mapsto x(t, s, x_s) \in \mathbb{R}^n$ *é contínua.*

Denotaremos por $x(t,s,x_s)$, $t \in [s, \tau(s,x_s))$ *a única solução de* (1).

Suponha que existe uma constante $M > 0$ *tal que*

$$f(t,x) \cdot x < 0, \text{ sempre que } \|x\| \geqslant M, \quad \text{e para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Então, se $x(t,s,x_s)$ *é a solução de* (1),

$$\frac{d}{dt}\|x\|^2 = 2f(t,x) \cdot x.$$

Segue de (2) *que e do Teorema 1 que* $\tau(s,x_s) = \infty$ *para todo* $s \in \mathbb{R}$ *e* $x_s \in \mathbb{R}^n$.

Nestas condições defina $S(t,s) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $t \geqslant s$, *por*

$$S(t,s)x_s = x(t,s,x_s), \;\; x_s \in \mathbb{R}^n.$$

É claro que, em vista do Teorema 1, a única condição que precisamos verificar para concluir que $\{S(t,s) : t \geqslant s\}$ *é um sistema dinâmico (com* $X = \mathbb{R}^n$*) é a condição ii) da Definição 1.*

Esta condição segue da unicidade de solução para (1) *dada no Teorema 1 observando-se que* $x(t,\sigma,x(\sigma,s,x_s))$ *e* $x(t,s,x_s)$ *são ambas soluções de*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x) \\ x(\sigma) &= x(\sigma,s,x_s) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Se $f(t,x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$; isto é, f não depende de t, então $t \mapsto x(t+\tau,\tau,x_s)$ e $t \mapsto x(t+\sigma,\sigma,x_s)$ são ambas soluções de

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(x) \\ x(0) &= x_s \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Neste caso $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ definido por $T(t)x_0 = x(t,0,x_0)$ define um semigrupo contínuo de operadores (com $X = \mathbb{R}^n$).

Exercício

Por que o argumento acima não funciona se f depende de t?

Agora que já entendemos o que é um sistema dinâmico vamos procurar definir o que buscaremos compreender do mesmo.

Insistiremos numa abordagem abstrata para que os sistemas dinâmicos estudados incluam modelos mais gerais que as equações diferenciais ordinárias.

Assim, assumiremos que X é um espaço métrico ou, em situações onde a estrutura de espaço vetorial seja necesária, um espaço de Banach (que pode ter dimensão infinita).

Além disso, dada a natureza do espaço de estados X, gostaríamos de estudar os sistemas dinâmicos dissipativos (no exemplo acima todas as soluções eventualmente entram na bola de raio M).

Um conjunto no qual *t*odas as soluções entram (de forma uniforme em limitados de X) depois de decorrido um certo tempo é chamado absorvente. Queremos que os sistemas dinâmicos que consideraremos possuam conjuntos absorventes limitados.

Também queremos que a interseção de todos os conjuntos absorventes seja um compacto que chamaremos *atrator*.

O atrator será o conjunto assintótico de estados. Os estados que estão fora do atrator são estados transitórios.

Buscaremos condições para existência de atratores, procuraremos entender como é o sistema dinâmico dentro do atrator, como os conjuntos limitados são atraídos para o atrator, como o atrator se comporta sob perturbação e medir a sua complexidade.