Primeira Prova de SMA 5878 Análise Funcional II

Nome: ______________________________

Data: 30/05/2022

Questões	Notas
I.1	
I.2	
I.3	
I.4*	
II.1	
II.2*	
II.3	
II.4*	
II.5	
III.1	
III.2	
Total	

Questões	Notas
III.3	
III.4*	
IV.1	
IV.2*	
V.1	
V.2	
VI.1*	
VI.2	
VI.3	
VI.4	
VI.5	
Total	

- Cada questão vale 1.25 ponto. A nota da prova varia de zero a dez.
- As questões marcadas com (*) são obrigatórias.
- Até 10 questões contarão pontos.
- Você deve fazer ao menos uma questão de cada seção.

I - Analiticidade e a função resolvente

Questão I.1 Seja X um espaço de Banach sobre o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$,

(1) Defina função analítica de um aberto Λ de $\mathbb{C}$ em X.

(2) Se $f : \Lambda \to X$ uma função tal que $x^* \circ f : \Lambda \to C$ é analítica para todo $x^* \in X^*$. Mostre que $f : \Lambda \to X$ é analítica.

(3) Se Λ é um domínio de Cauchy limitado e $f : \bar{\Lambda} \to X$. Mostre que

   (a) Se $A : D(A) \subset X \to X$ é fechado, γ é uma curva retificável em Λ, dê condições para que as seguintes afirmações sejam verdadeiras

$$i) \int_\gamma f(\lambda)d\lambda \in D(A) \quad \text{e} \quad ii) \; A\int_\gamma f(\lambda)d\lambda = \int_\gamma Af(\lambda)d\lambda$$

   (b) Se f é analítica, enuncie e demonstre o Teorema de Cauchy, as Formulas Integrais de Cauchy para derivadas e o Teorema do Máximo Módulo.

(4) Mostre que se f é analítica em um aberto $\Lambda \subset \mathbb{C}$ e $\lambda_0 \in \Lambda$ então f possui uma expansão de Taylor na bola de raio $\mathrm{dist}(\lambda_0, \partial\Lambda)$ em torno de λ_0

(5) Seja $f : \mathbb{C} \to X$ uma função fracamente analítica. Prove que se $\{x^* \circ f(\lambda) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ é limitado para cada $x^* \in X^*$ então, f é constante.

(6) Seja D um domínio de Cauchy ilimitado que contém o exterior de uma bola. Se $f : D_f \to \mathbb{C}$ uma função analítica, $D_f \supset D$, mostre que

$$f(\lambda) = f(\infty) + \int_{\partial D^+} \frac{f(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi, \ \forall \lambda \in D.$$

$\boxed{\text{Questão I.2}}$ Seja X um espaço de Banach uniformemente convexo (dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x - y\| \geq \epsilon$ implica $\|(x+y)/2\| \leq 1 - \delta$). Mostre as seguintes arfirmativas:

(1) Para cada $0 \neq x^* \in X^*$, $x^*(x_0) = \|x^*\|$ para no máximo um $x_0 \in \bar{B}_1(0)$.

(2) Se Λ é um subconjunto aberto e conexo em $\mathbb{C}$, seja X um espaço de Banach uniformemente convexo e $f : \Lambda \to X$ analítica. Se $\|f(\lambda)\|$ atinge um máximo absoluto em algum ponto de Λ, então $f(\lambda)$ é constante em Λ.

$\boxed{\text{Questão I.3}}$ Sejam X, Y, espaços de Banach sobre $\mathbb{C}$ e denote por $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço das transformações lineares e contínuas de X em Y. Se Ξ um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ e $F : \Xi \to \mathcal{L}(X, Y)$, mostre que as seguintes afirmativas são equivalentes:

(1) Para cada $x \in X$ e $y^* \in Y^*$, a função $\Xi \ni \xi \mapsto y^*(F(\xi)x) \in \mathbb{C}$ é analítica.

(2) Para cada $x \in X$, a função $\Xi \ni \xi \mapsto F(\xi)x \in Y$ é analítica.

(3) A função $\Xi \ni \xi \mapsto F(\xi) \in \mathcal{L}(X, Y)$ é analítica.

$\boxed{\text{Questão}^* \text{ I.4}}$ Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear densamente definido.

(1) Defina o operador dual A^* de A

(2) Mostre que se A for fechado então $D(A^*)$ será total.

(3) Mostre que se A for fechado e X for reflexivo então $D(A)$ será denso.

(4) Mostre que

$$\rho(A) = \rho(A^*) \text{ e } ((\lambda - A)^{-1})^* = (\lambda - A^*)^{-1}, \forall \lambda \in \rho(A)$$

II - Projeções Espectrais e Cálculo Operacional

$\boxed{\text{Questão II.1}}$ Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado e com resolvente $\rho(A)$ não vazio.

(1) Defina resolvente $\rho(A)$, espectro $\sigma(A)$, espectro pontual $\sigma_p(A)$, espectro contínuo $\sigma_c(A)$ e espectro residual $\sigma_r(A)$ de A.

(2) Mostre a identidade do resolvente, que $\rho(A) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ é contínua e que $\rho(A)$ é aberto.

(3) Mostre que $\rho(A) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ é analítica.

(4) Defina conjunto espectral e, se σ é um conjunto espectral, defina a projeção espectral P_σ associada a ele.

(5) Seja $\gamma : [0, 1] \to \rho(A)$ uma curva fechada, retificável e simples e $\sigma \subset \sigma(A)$ tal que $n(\gamma, \lambda) = 1$ para todo $\lambda \in \sigma$ (σ é interior a γ) e $n(\gamma, \lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \sigma(A) \backslash \sigma$. Mostre que

$$\Pi = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\lambda - A)^{-1} d\lambda$$

é uma projeção e que, se $X^\sigma = \Pi(X)$ e $A^\sigma : X^\sigma \to X$ é definido por $A^\sigma x^\sigma = Ax^\sigma$, $\forall$ $x^\sigma \in X^\sigma$, então $A^\sigma(X^\sigma) \subset X^\sigma$, $A^\sigma \in \mathcal{L}(X^\sigma)$ e $\sigma(A^\sigma) = \sigma$.

(6) Dado um ponto isolado λ_0 de $\sigma(A)$, determine a série de Laurent de $\rho(A) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ em torno de λ_0.
   (a) Mostre se λ_0 é um auto-valor de multiplicidade algébrica finita então, λ_0 é um polo.
   (b) Mostre que λ_0 é um auto-valor isolado ou uma singularidade essencial e exiba um exemplo para o qual λ_0 é um auto-valor isolado e uma singularidade essencial.

$\boxed{\text{Questão}^* \text{ II.2}}$ Seja A uma matrix $n \times n$ com coeficiente reais. Sejam $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, $k \leq n$ os auto-valores de A e P_j a projeção associada ao conjunto espectral $\sigma_j = \{\lambda_j\}$, $1 \leq j \leq n$.

(1) Se m_j é a dimensão da imagem de P_j, mostre que

$$(\xi - A)^{-1} = \sum_{j=1}^{k} \frac{P_j}{\xi - \lambda_j} + \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{m_j - 1} (\xi - \lambda_j)^{-n-1}(-1)^n D_j^n$$

Use isto para encontrar uma expressão para e^{At}, para cada $t \in \mathbb{R}$. (Sugestão: Faça o desenvolvimento em série de Laurent de $(\xi - A)^{-1}$ em torno de λ_j para cada $j = 1, \cdots, k$).

(2) Se $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é simétrico resolva a equação

$$(\lambda - A)u = f$$

para $\lambda \notin \{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$. Use isto para encontrar uma expressão para e^{At}, para cada $t \in \mathbb{R}$ (Sugestão: Mostre que $R(P_{\{\lambda_j\}}) = N(\lambda_j - A)$ e use a função inteira $\lambda \mapsto e^{\lambda t}$ para calcular e^{At}).

$\boxed{\text{Questão II.3}}$ Seja H um espaço de Hilbert com dimensão infinita, $A \in \mathcal{L}(H)$ auto adjunto e $f : D(f) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função analítica em um aberto que contém $\bar{B}_{\|A\|_{\mathcal{L}(H)}}(0)$. De condições sobre a função f para que

(1) $f(A)$ seja auto-adjunto e
(2) $f(A)$ seja compacto.

Conclua que, para cada $t \in \mathbb{R}^+$,

(3) e^{At} é auto-adjunto.

$\boxed{\text{Questão}^* \text{ II.4}}$ Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado com resolvente $\rho(A)$ não vazio. Suponha que o espectro $\sigma(A)$ de A contenha um conjunto espectral limitado σ e seja $\sigma' = \sigma_e(A) \backslash \sigma$. Se P_σ ($P_{\sigma'}$) for a projeção espectral associada ao conjunto espectral σ (σ'), $X_\sigma = R(P_\sigma)$ e $X'_\sigma = R(P_{\sigma'}$, mostre que o operador A tem tem uma decomposição dada pela decomposição $X = X_\sigma \oplus X_{\sigma'}$ do espaço de forma que os espectros das partes A_σ e $A_{\sigma'}$ de A em X_σ e em $X_{\sigma'}$ coincidem com σ e σ' respectivamente e $A_\sigma \in \mathcal{L}(X_\sigma)$.

$\boxed{\text{Questão II.5}}$ Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador fechado com resolvente não vazio. Se $f \in \mathcal{U}_\infty(A)$ então

(1) Mostre que existe o limite $\lim_{\lambda \to \infty} f(\lambda) = f(\infty)$.

(2) Se D um domínio de Cauchy ilimitado que contém o exterior de uma bola. Se $f : D_f \to \mathbb{C}$ uma função analítica, $D_f \supset D$, mostre que

$$f(\lambda) = f(\infty) + \int_{\partial D^+} \frac{f(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi, \ \forall \lambda \in D.$$

(3) Defina $f(A)$ e mostre que o espectro de $f(A)$ é exatamente o conjunto dos valores $f(\lambda)$, assumidos por f, quando λ percorre $\sigma_e(A)$. Simbolicamente, $\sigma(f(A)) = f(\sigma_e(A))$.

III - Continuidade do Resolvente e do Espectro

$\boxed{\text{Questão III.1}}$ Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, Λ um subconjunto do plano complexo e $R : \Lambda \to \mathcal{L}(X)$ tal que

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda) R(\lambda) R(\mu), \quad \forall\ \lambda, \mu \in \Lambda.$$

(1) Mostre que o núcleo $N(R(\lambda))$ e a imagem $\mathrm{Im}(R(\lambda))$ de $R(\lambda)$ são independentes de $\lambda \in \Lambda$.
(2) Mostre que existe um operador fechado e densamente definido $A : D(A) \subset X \to X$ tal que $\Lambda \subset \rho(A)$ e $R(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$ se, e somente se, $N(R(\lambda)) = \{0\}$ e $\mathrm{Im}(R(\lambda))$ é denso em X para algum $\lambda \in \Lambda$

$\boxed{\text{Questão III.2}}$ Seja X um espaço de Banach complexo e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear com resolvente não vazio.

(1) Defina o conjunto resolvente $\rho(A)$ e o espectro $\sigma(A)$ de A.
(2) Se A é fechado, mostre a identidade do resolvente, que a função $\rho(A) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ é contínua e que $\rho(A)$ é aberto.
(3) Mostre que $\rho(A) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ é analítica e não admite extensão analítica própria.
(4) Se $\lambda_0 \in \rho(A)$, relacione $\mathrm{dist}(\lambda_0, \sigma(A))$ e o raio espectral de $(\lambda_0 - A)^{-1}$.

$\boxed{\text{Questão III.3}}$ Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e suponha que $S, T \in \mathcal{L}(X)$.

(1) Se $\lambda \in \rho(S) \cap \rho(T)$, então os resolventes de S e T satisfazem a equação

$$(\lambda - S)^{-1} - (\lambda - T)^{-1} = (\lambda - S)^{-1}(S - T)(\lambda - T)^{-1}$$

(2) Para um $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ fixo, o conjunto $\mathcal{S}$ de todos os $T \in \mathcal{L}(X)$ tais que $\lambda_0 \in \rho(T)$ é aberto.
(3) Dados um conjunto aberto e não vazio Δ em $\mathbb{C}$ e $T \in \mathcal{L}(X)$ com $\sigma(T) \subset \Delta$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\sigma(S) \subset \Delta$ sempre que $S \in \mathcal{L}(X)$ e $\|S - T\| < \epsilon$; isto é, espectro de T é uma função semicontinua superiormente de T.

$\boxed{\text{Questão}^* \text{ III.4}}$ Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador fechado. Assuma $\rho(A) \supset [0, \infty)$ e que exista uma constante $M > 0$ tal que $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$ para todo $\lambda \in [0, \infty)$. Mostre que

(1) Existe $\phi \in \frac{\pi}{2}$ tal que $\rho(A) \supset \Sigma_\phi := \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg(\lambda) \leq \phi\}$ e que existe uma constante $\bar{M} \geq M$ tal que $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \bar{M}$ para todo $\lambda \in \Sigma_\phi$.
(2) Para cada $x \in X$, $\lambda(\lambda - A)^{-1}x \stackrel{\lambda \to \infty}{\longrightarrow} x$ e para cada $x \in D(A)$, $\lambda A(\lambda - A)^{-1}x \stackrel{\lambda \to \infty}{\longrightarrow} Ax$.

(3) Seja $A_\lambda = \lambda A(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Mostre que, para cada $x \in D(A)$, $A_\lambda \overset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} Ax$.

(4) Suponha que A tenha resolvente compacto
 (a) $A_n^{-1}x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} A^{-1}x$ para todo $x \in X$,
 (b) Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, $\{A_n^{-1}x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subseqüência convergente.
 (c) Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{N}(I + A_n^{-1}) = \{0\}$ para todo $n > n_0$.
 (d) Existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e $M > 0$ tais que $I - A_n^{-1}$ é invertível e $\|(I - A_n)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$, $\forall n \geq n_0$.
 (e) Os auto-valores de A_n^{-1} convergem para os auto-valores de A^{-1}. Sugestão: Mostre que se $\lambda \in \rho(A^{-1})$, existe $\delta > 0$ e n_0 tal que $B_\delta(\lambda) \subset \rho(A_n^{-1})$ para todo $n \geq n_0$.

IV - Representação Mini-Max de auto-valores e a decomposição espectral

Questão IV.1 Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ e $A \in \mathcal{K}(X)$ um operador auto-adjunto tal que $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in H$. Mostre que,

(1) $\lambda_1 = \max\{\langle Ax, x\rangle : \|x\| = 1\}$ é um auto-valor (Sugestão: Mostre que se $\{x_n\}$ é uma seqüência com $\|x_n\| = 1$ e $\langle Ax_n, x_n\rangle \to \lambda_1$ então $\{x_n\}$ converge fracamente para $v_1 \in H$ e $\{Ax_n\}$ converge fortemente para Av_1)

(2) Mostre que o subespaço H_1 de H dos vetores ortogonais a v_1 é invariante por A e que a restrição A_1 de A a H_1 é auto-adjunto. Indutivamente, defina $\lambda_n = \max\{\langle Ax, x\rangle : \|x\| = 1\ x \perp v_j,\ 1 \leq j \leq n-1\}$. Conclua que os auto-valores de A são dados por

$$\lambda_{n+1} = \max\{\langle Ax, x\rangle : \|x\| = 1\ x \perp v_j,\ 1 \leq j \leq n\},\ n \geq 0,$$

e que os auto-vetores correspondentes podem ser escolhidos ortogonais dois a dois. Observe que esta construção permite que dois auto-valores consecutivos sejam iguais.

(3) Seja $\mathcal{V}_n = \{F : F$ é um subsepaço vetorial com dimensão n de $H\}$ Mostre que

$$\lambda_{n+1} = \inf_{F\in\mathcal{V}_n} \sup\{\langle Ax, x\rangle : \|x\| = 1,\ x \perp F\},\ n \geq 0,$$

and

$$\lambda_{n+1} = \sup_{F\in\mathcal{V}_{n+1}} \inf\{\langle Ax, x\rangle : \|x\| = 1,\ x \in F\},\ n \geq 0.$$

Questão* IV.2 Seja $H = L^2(0,\pi)$ e $D(A_0) = C_0^2(0,\pi)$ o conjunto das funções C^2 com suporte compacto em $(0,\pi)$. Defina $A_0 : D(A_0) \subset H \to H$ por

$$(A_0\phi)(x) = -\phi''(x), \quad x \in (0,\pi).$$

(1) Mostre que que A_0 é simétrico e que $\langle A_0\phi, \phi\rangle \geq \frac{2}{\pi^2}\|\phi\|_H^2$ para todo $\phi \in D(A_0)$. Conlua que A_0 tem uma extensão auto adjunta A e, após resolver todos os ítens do exercício, que $a = 1$.

(2) Use o Teorema de Friedrichs para caracterizar o domínio de A e mostre que A tem resolvente compacto.

(3) Mostre que H tem uma base de auto-funções, que $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots\}$ e $\lambda_n = n^2 \in \sigma_p(A)$ com auto-funções $\phi_n(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}(nx)$, $n \in \mathbb{N}$. Conclua que para toda $f \in H$,

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n, \quad \text{onde} \quad a_n = \int_0^{\pi} f(x)\phi_n(x)dx$$

with the series converging in H

V - Imagem Numérica e a Localização do Espectro

$\boxed{\text{Questão V.1}}$ Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador fechado densamente definido.

(1) Defina a imagem numérica de A.
(2) Se $W(A)$ é a imagem numérica de A e Σ um subconjunto aberto e conexo em $\mathbb{C}\backslash W(A)$, mostre que:
 (a) Se $\lambda \notin \overline{W(A)}$ então $\lambda - A$ é injetora e tem imagem fechada e satisfaz

$$\|(\lambda - A)x\|_X \geq d(\lambda, W(A))\|x\|. \tag{1}$$

 (b) Se $\rho(A) \cap \Sigma \neq \emptyset$, então $\rho(A) \supset \Sigma$ e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{d(\lambda, W(A))}, \quad \forall \lambda \in \Sigma. \tag{2}$$

 onde $d(\lambda, W(A))$ é a distância de λ a $W(A)$.
(3) Mostre que, se H é um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ e $A \in \mathcal{L}(H)$ é auto-adjunto, então $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Questão V.2}}$ Seja X um espaço de Banach.

(1) Defina o que se entende por um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ ser dissipativo.
(2) Mostre que o operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é dissipativo se, e somente se,

$$\|(\lambda - A)x\| \geq \lambda\|x\| \tag{3}$$

 para todo $x \in D(A)$ e $\lambda > 0$.
(3) Se X^* é estritamente convexo e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador fechado, densamente definido e dissipativo com $\overline{R(I - A)} = X$, mostre que $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda > 0\}$ e que

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda}, \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{C} \text{ com } \mathrm{Re}\lambda > 0.$$

 A hipótese que X^* seja estritamente convexo é necessária?

VI - Questões Variadas

$\boxed{\text{Questão}^* \text{ VI.1}}$ Enuncie e demonstre o Teorema de Friedrichs.

$\boxed{\text{Questão VI.2}}$ Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador fechado, densamente definido e com $1 \in \rho(A)$. Defina em $D(A)$ a norma $\|x\|_1 = \|x\|_X + \|Ax\|_X$. Mostre que

(1) $\overline{D(A^2)}^X = X$
(2) $Y := (D(A), \|\cdot\|_1)$ é um espaço de Banach.
(3) $\overline{D(A^2)}^Y = Y$.

$\boxed{\text{Questão VI.3}}$ Seja X um espaço de Banach complexo e $A \in \mathcal{L}(X)$. Mostre que, se $r > \|A\|_{\mathcal{L}(X)}$ e $\gamma_r(t) = r\mathrm{e}^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$, então

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \mathrm{e}^{\lambda} (\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

$\boxed{\text{Questão VI.4}}$ Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador fechado e densamente definido. Denote por $X^{\odot}$ o fecho de $D(A^*)$ em X^* com a norma herdada de X^* e $A^{\odot} : D(A^{\odot}) \subset X^{\odot} \to X^{\odot}$ a parte de A em $X^{\odot}$. Então

$$\sigma_r(A) = \sigma_p(A^*) = \sigma_p(A^{\odot}). \tag{4}$$

$\boxed{\text{Questão VI.5}}$ Seja $X = \ell^1(\mathbb{C}) = \big\{\{x_n\} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\big\}$ com a norma $\|\{x_n\}\|_{\ell^1(\mathbb{C})} = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Seja $A : D(A) \subset X \to X$ definido por

$$D(A) = \{\{x_n\} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : x_n = 0 \text{ exceto para um número finito de } n's\}$$
$$A\{x_n\} = \left\{ \sum_{j=n}^{\infty} \frac{j^2}{n^2} x_j \right\}.$$

Mostre que $0 \in \rho(A)$ e que A não é fechável.