Geometria

Roberta Godoi Wik Atique

1 Introdução

A Geometria é uma ciência muito antiga. Conhecimentos geométricos não triviais já eram dominados no Egito antigo, na Babilônia e na Grécia. Na forma como a conhecemos, podemos estabelecer o seu ponto inicial na Grécia, no tempo de Ptolomeu I, quando Euclides escreveu os *Elementos* (por volta do ano 300 a.C.).

Euclides e seus predecessores reconheceram o que nos dias de hoje todo estudante de Filosofia sabe: que não se pode provar tudo. Na construção de uma estrutura lógica, uma ou mais proposições devem sempre ser admitidas como axiomas a partir dos quais todas as outras são deduzidas.

Pelo tempo de Euclides, o que hoje chamamos de geometria euclidiana estava totalmente desenvolvida. De fato, o trabalho de Euclides foi aquele de um compilador que reuniu os teoremas conhecidos, já demostrados por seus predecessores, e os colocou em único texto com uma apresentação unificada.

Euclides ficou famoso pela concepção do livro em si, considerado como o primeiro tratado científico, modelo para todos os outros em qualquer ramo da ciência, e pela escolha que fez dos axiomas.

A descoberta das geometrias não euclidianas é um capítulo fascinante da história da matemática, que se inicia no próprio momento em que Euclides trouxe a público os *Elementos*, em que apresentava a Geometria euclidiana numa forma axiomática, e só termina na primeira metade do século XIX.

As tentativas de provar o quinto postulado a partir dos outros, ao longo de tantos séculos, transformaram-se, ao final, no estudo da geometria absoluta (de Bolyai) e permitiram o entendimento de que havia de fato toda uma família de proposições equivalentes ao quinto postulado, entre as quais o teorema da soma dos ângulos de um triângulo.

O estudo das três hipóteses possíveis para esta soma (igual, maior ou menor do que 180 graus) levou naturalmente à descoberta da Geometria hiperbólica, por Gauss, Lobachewsky e Bolyai.

Tanto esforço despendido redundou não apenas na descoberta da nova geometria, mas num profundo entendimento das bases sobre as quais ela e a geometria euclidiana se assentam.

Talvez a descoberta da nova geometria pudesse ter sido feita em época mais remota se não existissem os preconceitos de que a geometria euclidiana era a única possível e de que era a geometria do universo. Um preconceito tão forte que impediu Gauss, a figura dominante do século XIX, de publicar os próprios achados sobre o assunto.

As tentativas frustradas de provar o quinto postulado de Euclides, ao longo dos séculos, levaram pouco a pouco a um entendimento profundo da geometria, até ao ponto em que, na época de Gauss, se pode contemplar e aceitar o novo mundo sem considerá-lo paradoxal ou absurdo.

Muitas pessoas recebem com certa surpresa o fato de que a geometria se baseia em algumas noções para as quais não é apresentada definição e em algumas propriedades para as quais não é apresentada uma demonstração. É importante que se esclareça que isto ocorre com qualquer teoria matemática. O fato de ponto, reta, plano e espaço serem noções primitivas da geometria não significa que não se possa reforçar a intuição a respeito dessas noções. Nos *Elementos de Euclides*, por exemplo, ponto é definido como "aquilo que não possui partes"(ou seja, é indivisível), linha é "o que possui comprimento mas não largura"e reta é "uma linha que jaz igualmente com respeito a todos os seus pontos"(isto é, uma linha onde não existem pontos "especiais").

Embora tais descrições não possam ser utilizadas como definições (por utilizarem outros termos não definidos, como "comprimento", "largura", etc), ajudam a correlacionar entidades matemáticas com imagens intuitivas. Deve-se porém esclarecer que, do ponto de vista matemático, o que importa é estabelecer uma quantidade mínima de propriedades (postulados) que sejam capazes de caracterizar o comportamento destas entidades.

Euclides propôs 5 postulados que pareceram tão claros que qualquer pessoa poderia aceitá-los sem uma prova. A partir destes postulados ele provou em torno de 500 teoremas.

Euclides apresentou seus axiomas divididos em 2 grupos: as noções comuns e os postulados. A distinção entre eles não é muito clara. As noções comuns parecem ter sido consideradas como hipóteses aceitáveis a todas as ciências ou admissíveis por qualquer pessoa, enquanto que os postulados seriam hipóteses peculiares da geometria.

1. **Noções comuns**

   (a) Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais.

   (b) Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais.

   (c) Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.

   (d) Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais.

   (e) O todo é maior do que qualquer uma das partes.

2. **Postulados**

   (a) Pode-se traçar uma (única) reta ligando quaisquer dois pontos.

   (b) Pode-se continuar (de uma única maneira) qualquer reta finita continuamente em uma reta.

   (c) Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.

   (d) Todos os ângulos retos são iguais.

   (e) É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

Euclides também fez uso de outras hipóteses:

- Retas são conjuntos ilimitados.

- Vale o axioma de Pasch: sejam A, B e C três pontos não colineares e seja m uma reta que não contém nenhum destes pontos. Se m corta o segmento AB, então ela também corta o segmento AC ou o segmento CB.

- As retas são contínuas (ou seja, em cada reta vale o axioma de Dedekind).

Muitas provas do quinto postulado de Euclides foram propostas, mas no geral elas continham uma suposição equivalente ao que se queria provar. As seguintes afirmações são equivalentes ao quinto postulado:

1. Duas retas que se interseptam não podem ser paralelas a uma mesma reta (Playfair).

2. Retas paralelas têm distância constante uma da outra (Proclus).

3. A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus (Legendre).

Um trabalho interessante foi o de Jesuit Saccheri (1667-1733). Ele negou o quinto postulado e deduziu consequências lógicas, esperando chegar numa contradição. Saccheri obteve muitos resultados estranhos, alguns dos quais ele afirmou serem inconsistentes com os outros postulados de Euclides. Na verdade ele descobriu alguns fatos fundamentais sobre o que viria a ser chamado de geometria hiperbólica.

Gauss (1777-1855), aparentemente, foi o primeiro matemático que observou que a negação do quinto postulado não levaria a uma contradição e que geometrias diferentes da de Euclides poderiam existir.

Com esta divisão em geometria euclidiana e não euclidiana, tornou-se útil classificar os resultados em categorias de acordo com a sua dependência do quinto postulado. A geometria absoluta consiste nos teoremas de Euclides que não fazem uso deste postulado. São igualmente válidos na geometria euclidiana e hiperbólica.

2 Axiomas

2.1 Axiomas de Incidência

I_1. Qualquer que seja a reta existem pontos que pertencem à reta e pontos que não pertencem à reta.

I_2. Dados dois pontos distintos existe uma única reta que contém estes pontos.

2.2 Axiomas de Ordem

II_1. Dados três pontos de uma reta, um e apenas um deles está entre os outros dois.

II_2. Dados dois pontos A e B sempre existem: um ponto C entre A e B e um ponto D tal que B está entre A e D.

II_3. Uma reta r determina exatamente dois semi-planos distintos cuja intersecção é a reta r.

2.3 Axiomas sobre Medição de Segmentos (ou Axiomas de Continuidade)

III_1. A todo par de pontos do plano corresponde um número maior ou igual a zero. Este número é zero se e só se os pontos são coincidentes.

III_2. Os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que a diferença entre estes números meça a distância entre os pontos correspondentes.

III_3. Se o ponto C está entre A e B então

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$$

III_4. Todo ângulo tem uma medida maior ou igual a zero. A medida de ângulo é zero se e somente se ele é constituído por duas semi-retas coincidentes.

$\mathbf{III}_5$. É possível colocar, em correspondência biunívoca, os números reais entre zero e 180 e as semi-retas de mesma origem que dividem um dado semi-plano, de modo que a diferença entre estes números seja a medida do ângulo formado pelas semi-retas correspondentes.

$\mathbf{III}_6$. Se uma semi-reta S_{OC} divide um ângulo $A\hat{O}B$ então

$$A\hat{O}B = A\hat{O}C + C\hat{O}B$$

2.4 Axioma de Congruência

IV. (Critério LAL) Dados dois triângulos ABC e EFG, se $AB = EF$, $AC = EG$ e $\hat{A} = \hat{E}$ então $ABC = EFG$.