Terceira Lista de Exercícios de SMA380- Análise 28.02.2020

Números reais

Professora: Maria do Carmo Carbinatto

Exercício 1. *Defina* $\mathbb{C} = \{ (a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. *Dizemos que* $(a, b) = (c, d)$ *se e somente se* $a = c$ *e* $b = d$. *Defina em* $\mathbb{C}$ *as seguintes operações:*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc), \quad (a, b), (c, d) \in \mathbb{C}.$$

(a) *Mostre que* $\mathbb{C}$ *munido das operações* $+$ *e* $\cdot$ *definidas acima é um corpo.*

Cada elemento de $\mathbb{C}$ *é chamado um número complexo. Mostramos em* (a) *que o conjuntos dos número complexos munido das operações* $+$ *e* $\cdot$ *é um corpo.*

(b) *Mostre que* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *dada por* $f(a) = (a, 0)$ *é injetora,* $f(a+b) = f(a)+f(b)$ *e* $f(a\cdot b) = f(a)\cdot f(b)$ *para todos* a, $b \in \mathbb{R}$. *Logo* $f\colon \mathbb{R} \to f(\mathbb{C})$ *é um isomorfismo entre corpos.*

Em vista do resultado de (b) *o subconjunto* $\{ (a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ *de* $\mathbb{C}$ *é idendificado como* $\mathbb{R}$ *e com esta identificação dizemos que* $\mathbb{R}$ é um subcorpo dos números complexos.

(c) *Defina* $i = (0, 1)$. *Com a identificação acima, mostre que* $i^2 = -1$ *e que* $(a, b) = a + bi$, *para todo* a, $b \in \mathbb{R}$.

(d) *Mostre que não podemos definir uma ordem no corpo dos números complexos de modo a torná-lo um corpo ordenado.*

Exercício 2. *Fixe* $b > 1$.

(a) *Se* m, n, p *e* q *são inteiros tais que* $n > 0$, $q > 0$ *e* $r = m/n = p/q$, *mostre que* $(b^m)^{1/n} = (b^p)^{1/q}$. *Portanto, faz sentido definir* $b^r := (b^m)^{1/n}$.

(b) *Mostre que* $b^{r+s} = b^r b^s$ *para quaisquer que sejam* r *e* s *racionais.*

(c) *Se* x *é real, defina* $B(x)$ *como o conjunto de todos os números* b^t *tais que* t *é racional e* $t \leq x$. *Mostre que se* r *é racional, então* $b^r = \sup B(r)$.

(d) *Mostre que para todo* x *real, existe* $\sup B(x)$. *Portanto faz sentido definir* $b^x := \sup B(x)$.

(e) *Mostre que* $b^{x+y} = b^x b^y$ *para quaisquer que sejam* x *e* y *reais.*

Exercício 3. *Seja* A *um conjunto não-vazio dos números reais o qual é limitado informente. Seja* $-A$ *o conjunto de todos os números reais* $-x$ *tais que* $x \in A$. *Mostre que* $\inf A = -\sup(-A)$.

Exercício 4. *Diz-se que uma função* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *é limitada superiormente quando sua imagem* $f(X) := \{ f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ *é um subconjunto de* $\mathbb{R}$ *limitado superiormente. Então define-se*

$\sup f := \sup\{ f(x) \mid x \in \mathbb{R} \}$.

(a) *Mostre que se* $f,\ g\colon X \to \mathbb{R}$ *são funções limitadas superiormente o mesmo ocorre com a soma* $f + g\colon X \to \mathbb{R}$ *e tem-se* $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$.

(b) *Dê um exemplo com* $\sup(f + g) < \sup f + \sup g$.

(c) *Enuncie e demonstre um resultado análogo para o* $\inf f$.

Exercício 5. *Sejam funções* $f,\ g\colon X \to \mathbb{R}^+$ *limitadas superiormente.*

(a) *Mostre que o produto* $fg\colon X \to \mathbb{R}^+$ *é uma função limitada superiormente e que* $\sup(fg) \leq \sup f \sup g$. *Dê exemplos onde se tenha a desigualdade estrita.*

(b) $\sup(f^2) = (\sup f)^2$.

(c) *Enuncie e demonstre resultados análogos aos de* (a) *e* (b) *para funções* $f,\ g\colon X \to \mathbb{R}^+$ *limitadas inferiormente.*

Exercício 6. *Sejam* X *e* $Y \subset \mathbb{R}$ *não vazios e* $c \in \mathbb{R}$. *Sejam* $X + Y = \{ x + y \mid x \in X \text{ e } y \in Y \}$ *e* $cX = \{ cx \mid x \in X \}$.

(a) *Prove que se* X *e* Y *forem limitados, então* $X + Y$ *é limitado e* $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$ *e* $\inf(X + Y) = \inf X + \inf Y$.

(b) *Mostre que se* X *for limitado, então* cX *é limitado.*

(c) *Se* X *for limitado e* $c > 0$, *mostre que* $\sup(cX) = c \sup X$ *e* $\inf(cX) = c \inf X$. *Enuncie e demonstre resultados análogos para* $c < 0$.

Exercício 7. *Sejam* X *e* Y *conjuntos de números reais positivos não vazios. Definimos* $X \cdot Y = \{ x \cdot y \mid x \in X \text{ e } y \in Y \}$. *Mostre que se* X *e* Y *forem limitados, então* $X \cdot Y$ *é limitado e* $\sup(X \cdot Y) = \sup X \cdot \sup Y$ *e* $\inf(X \cdot Y) = \inf X \cdot \inf Y$.

Exercício 8. *Sejam* X *e* Y *subconjuntos não vazios e* $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ *uma função limitada. Para cada* $x_0 \in X$ *e cada* $y_0 \in Y$, *definamos*

$$s_1(x_0) := \sup\{ f(x_0, y) \mid y \in Y \} \text{ e } s_2(y_0) := \sup\{ f(x, y_0) \mid x \in X \}.$$

Isto define duas funções $s_1\colon X \to \mathbb{R}$ *e* $s_2\colon Y \to \mathbb{R}$. *Mostre que*

$$\sup\{ s_1(x) \mid x \in X \} = \sup\{ s_2(y) \mid y \in Y \}.$$

Exercício 9. *Mostre que a união de dois intervalos fechados, limitados e que têm pelo menos um ponto em comum é também um intervalo fechado e limitado. Mostre o mesmo resultado para a interseção.*