Segunda Lista de Exercícios de SMA380- Análise 21.02.2020

Corpo ordenado - tópicos complementares

Professora: Maria do Carmo Carbinatto

Exercício 1. *(Continuação do Exercício 5 da Primeira Lista)*

(f) *O menor subcorpo de* K *identifica-se ao corpo dos racionais? Justifique sua resposta.*

Exercício 2. *Seja* K *um corpo ordenado. Mostre que as seguintes afirmativas são equivalentes:*

(i) $\mathbb{N} \subset K$ *é ilimitado superioremente. (entenda a identificação descrita no Exercício 5da Primeira Lista)*

(ii) *Dados* a, $b \in K$, *com* $a > 0$, *existe um* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $n \cdot a > b$.

(iii) *Para qualquer que seja* $a \in K$, *com* $a > 0$, *existe um* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $0 < \frac{1}{n} < a$.

Exercício 3. *Seja* $Q(t)$ *o conjunto das funções racionais* $r(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$, *onde* p *e* q *são polinômios com coeficientes racionais, sendo* q *não identicamente nulo. O conjunto* $Q(t)$ *munido das operações usuais é um corpo.*

Dizemos que uma fração $r(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$ *em* $Q(t)$ *é positiva quando o coeficiente do termo de maior grau do polinômio* pq *for positivo. Seja* P *o conjunto das frações positivas.*

(a) *Mostre que* P *satisfaz as propriedades* (P1) *e* (P2) *do Exercício 3 da Primeira Lista.*

(b) *Mostre que* $Q(t)$ *é um corpo ordenado.*

(c) *Seja* $p(t) = t$. *Mostre que* $p(t) - n \in P$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

(d) *Mostre que* $\mathbb{N} \subset Q(t)$ *(entenda a identificação descrita no Exercício 5 da Primeira Lista) é limitado superiormente.*

Exercício 4. *(Depois do corpo* $\mathbb{Z}_2$ *ser apresentado em Álgebra I) Mostre que não podemos definir uma ordem* $\mathbb{Z}_2$ *de modo a torná-lo um corpo ordenado.*