Primeira Lista de Exercícios de SMA380- Análise 21.02.2020

Corpo ordenado

Professora: Maria do Carmo Carbinatto

Exercício 1. *Seja* E *um subconjunto não-vazio de um conjunto ordenado. Suponha que* α *seja um limitante inferior de* E *e que* β *seja um limitante superior de* E*. Mostre que* $\alpha \preceq \beta$.

Exercício 2. *Seja* $(K, \prec)$ *um corpo ordenado e sejam* $A \subset B \subset K$ *conjuntos* limitados, *isto é, ambos limitados superior e inferiormente. Mostre que* $\inf B \preceq \inf A \preceq \sup A \preceq \sup B$.

Exercício 3. *Seja* K *um corpo. Suponha que exista um subconjunto* P *de* K *com as seguintes propriedades:*
(P1) *Se* $x,\, y \in P$, *então* $x + y,\ x \cdot y \in P$;
(P2) *Dado um* $x \in K$ *exatamente uma das três alternativas ocorre: ou* $x = 0$, *ou* $x \in P$ *ou* $-x \in P$.
Mostre que K *é um corpo ordenado.*

Exercício 4. *Seja* K *um corpo ordenado. Existe um subconjunto* P *de* K *com as propriedades* (P1) *e* (P2) *do Exercício 3? Justifique sua resposta.*

Exercício 5. *Seja* $(K, +, \cdot, \prec)$ *um corpo ordenado, denote o elemento neutro da operação* $+$ *por* $0'$ *e denote o elemento neutro da operação* $\cdot$ *por* $1'$*. Defina a função* $f\colon \mathbb{N} \to K$ *por* $f(0) = 0'$, $f(1) = 1'$ *e* $f(m + 1) = f(m) + 1'$.
(a) *Mostre que* $f(m + n) = f(m) + f(n)$ *para todos* $m,\, n \in \mathbb{N}$.
(b) *Mostre que* $f(n) \succ 0'$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
(c) *Se* $m,\, n \in \mathbb{N}$ *são tais que* $m < n$, *mostre que* $f(m) \prec f(n)$.
(d) *Mostre que* f *é injetora.*

Logo, a função f *definie uma bijeção do conjunto* $\mathbb{N}$ *dos números naturais sobre o conjunto* $\mathbb{N}' = f(\mathbb{N})$, *formado pelos elementos,* $1'$, $f(2) = 1' + 1'$, $f(3) = 1' + 1' + 1'$ *e assim por diante. Com isso, costuma-se identificar* $\mathbb{N}'$ *com* $\mathbb{N}$ *e considerar os números naturais contidos em* K.
(e) *Com base na identificação explique como deve ser entendida a seguinte sequência de inclusões* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset K$.

Exercício 6. *Seja* α *um corte. Mostre que existe um* $r_\alpha \in \mathbb{Q}$ *tal que* $r_\alpha < 0$ *e* $r_\alpha \in \alpha^c$.

Exercício 7. *Sejam* α *e* β *cortes. Mostre que existe um* $p \in \beta^c$ *tal que* $p \leq r_\alpha$, *onde* r_α *é como no Exercício 6.*

Exercício 8. *Sejam* α *e* β *cortes e* $p \in \alpha^c$ *e* $q \in \beta^c$. *Mostre que* $p + q < a + b$ *para todo* $a \in \alpha$ *e* $b \in \beta$.