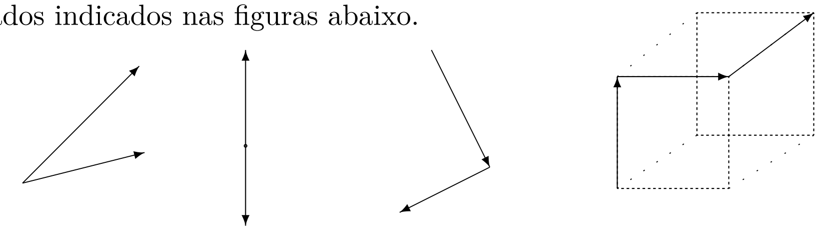
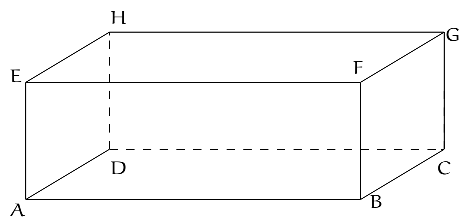
Lista de Exercícios de SMA374 - Álgebra Linear e Geometria Analítica 10.03.2020

Definição de vetores e propriedades básicas

Exercício 1. Encontre geometricamente a soma e a diferença dos vetores, cujos representantes são os segmentos orientados indicados nas figuras abaixo.



Exercício 2. A figura abaixo representa um paralelepípedo retângulo. Decida se cada uma das afirmativas abaixo é verdadeira ou falsa:



(a) $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF}$.

(b) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{HG}$.

(c) $\overrightarrow{AB}$ é paralelo a $\overrightarrow{CG}$.

(d) $||\overrightarrow{AC}|| = ||\overrightarrow{HF}||$.

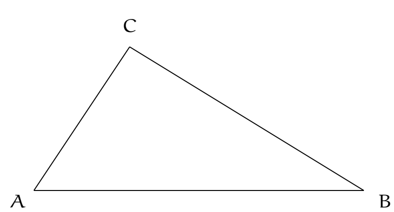
(e) $\overrightarrow{BG}$ é paralelo a $\overrightarrow{ED}$.

(f) o vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CG}$ são coplanares.

(g) os vetores $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$, e $\overrightarrow{FG}$ são coplanares.

(h) $\overrightarrow{DC}$ é paralelo ao plano HEF.

Exercício 3. Sejam M, N e P os pontos médios dos segmentos AB, BC e CA respectivamente, onde os pontos A, B e C são dados pela figura abaixo. Exprima os vetores $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{AN}$ e $\overrightarrow{CM}$ em função dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.



Exercício 4. Se $\alpha\vec{v} = \vec{0}$, mostre que $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

Exercício 5. Se $\alpha\vec{v} = \alpha\vec{u}$, com $\alpha \neq 0$, mostre que $\vec{v} = \vec{u}$.

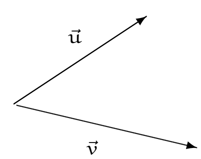
Exercício 6. Seja $\vec{v} \neq \vec{0}$. Mostre que $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ é um vetor unitário.

Exercício 7. Resolva o sistema nas incógnitas $\vec{x}$ e $\vec{y}$: $\begin{cases} \vec{x} + 3\vec{y} = \vec{u} \\ 3\vec{x} - \vec{y} = 4\vec{u} - 2\vec{v}. \end{cases}$

Exercício 8. Mostre que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases e que sua medida é a semi-soma das medidas das bases.
Seja $ABCDEF$ um hexágono regular de centro O. Mostre que

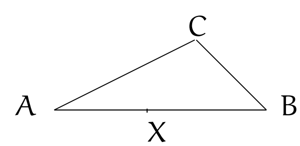
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 6\overrightarrow{AO}.$$

Exercício 9. São dados um triângulo ΔABC e os pontos X, Y e Z, tais que tenhamos as seguinte identidades $\overrightarrow{AX} = m \cdot \overrightarrow{XB}$, $\overrightarrow{BY} = n \cdot \overrightarrow{YC}$, $\overrightarrow{CZ} = p \cdot \overrightarrow{ZA}$, onde m, n, $p \in \mathbb{R}$. Exprima os vetores $\overrightarrow{CX}$, $\overrightarrow{AY}$ e $\overrightarrow{BZ}$ em função de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ e m, n, p.



Exercício 10. Sejam ABC um triângulo e X um ponto do segmento AB como na figura ao lado. Mostre que

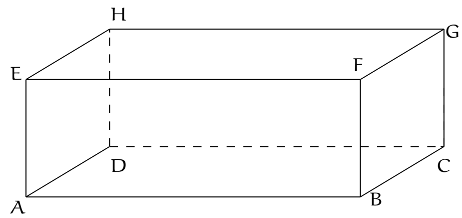
$$\overrightarrow{CX} = \frac{\|\overrightarrow{BX}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}\overrightarrow{CA} + \frac{\|\overrightarrow{AX}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}\overrightarrow{CB}.$$



Exercício 11. Dado um triângulo ABC, seja $\vec{u} = (1/2)\overrightarrow{CA} + (1/3)\overrightarrow{CB}$. Seja X um ponto do segmento de reta AB tal que o vetor $\overrightarrow{CX}$ é paralelo ao vetor $\vec{u}$.
(a) Exprima $\overrightarrow{CX}$ como combinação linear de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.
(b) Calcule $\dfrac{\|\overrightarrow{AX}\|}{\|\overrightarrow{XB}\|}$ e a razão em que X divide o segmento de reta AB.

Exercício 12. Sejam ABC um triângulo e seja X a interseção do lado AB com a bissetriz interna do ângulo $A\widehat{C}B$.
(a) Mostre que o vetor $\dfrac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} + \dfrac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|}$ é paralelo ao vetor $\overrightarrow{CX}$.
Sugestão: use propriedades do losângo.
(b) Mostre que $\overrightarrow{CX}$ é combinação linear de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.

Exercício 13. Considere o paralelepípedo retângulo como abaixo:



(a) Escreva o vetor $\overrightarrow{AG}$ como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AB}$.

(b) Escreva o vetor $\overrightarrow{BH}$ como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AB}$.

(c) O vetor $\overrightarrow{AG}$ pode ser escrito como combinação linear de $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AB}$? Justifique sua resposta.

Exercício 14. Seja ABC um triângulo. Suponha que M, N e P sejam os pontos médios de AB, BC e CA respectivamente. Seja G o ponto comum às retas AN e BP e seja H o ponto comum às retas AN e CM.

(a) Mostre que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

(b) Mostre que $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

(c) Mostre que existem números reais α, β, λ e μ tais que $\overrightarrow{AG} = \lambda\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BG} = \mu\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{CH} = \alpha\overrightarrow{CM}$ e $\overrightarrow{AH} = \mu\overrightarrow{AN}$.

(d) Mostre que $\lambda = \mu = \alpha = \beta = 2/3$.

(e) Mostre que $G = H$.

(f) Você demonstrou que as medianas de um triângulo se encontram num mesmo ponto e que este ponto divide cada mediana na razão $2:1$ a partir do vértice correspondente. Concorda?

Exercício 15. Seja ΔABC um triângulo qualquer, com medianas dadas pelos segmentos AD, BE e CF. Prove que $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.

Exercício 16. Seja $OABC$ um tetraedro, X o ponto de encontro das medianas do triângulo ΔABC (isto é, o baricentro do triângulo ΔABC). Exprima o vetor $\overrightarrow{OX}$ em termos dos vetroes $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.