Problemas em Álgebra Linear

A seguir são listadas diversas ilustrações do uso da teoria básica da Álgebra Linear. Cada um dos exemplos abaixo serão discutidos em sala de aula ou em listas de exercícios no decorrer do semestre.

1. Espaços Vetoriais e Transformações Lineares

1.1. **Exemplo I.** Os sistemas de controle de uma nave espacial são absolutamente críticos num voo. Como a nave é uma célula instável, requer um monitoramento computacional constante durante o seu voo. O sistema de controle de voo envia um fluxo de comandos para controlar superfícies aerodinâmicas e pequenos jatos thruster. A figura abaixo mostra um sistema de feedback de circuito fechado típico que controla o ângulo de elevação do nariz do cone da nave durante o voo. Os símbolos de junção $\otimes$ mostra onde sinais de vários sensores são adicionados aos sinais dos computadores.

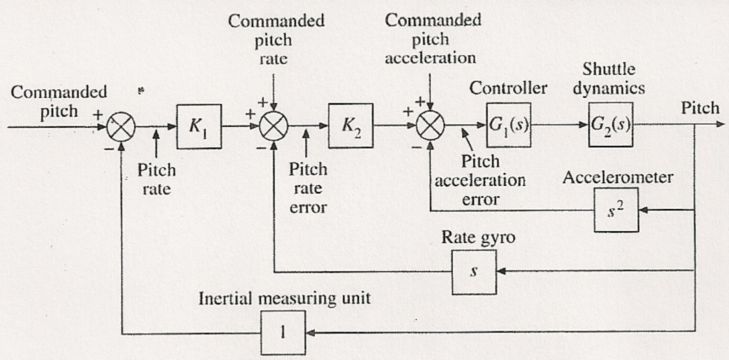


FIGURE 1 Pitch control system for the space shuttle. (*Source: Control Systems Engineering*, by Norman S. Nise, Benjamin-Cummings Publishing, 1992, p. 274. Simplified drawing based on *Space Shuttle GN&C Operations Manual*, Rockwell International, 1988.)

Matematicamente, "os signais que entram" e "os que saem" de um sistema são funções. É importante nas aplicações que estas funções possam ser somadas, como na figura acima, e multiplicadas por um escalar. Estas duas operações realizadas em funções possuem propriedades algébricas que são análogas às operações de soma de vetores e multiplicação de vetor por um escalar em V^3. Por esta razão, o conjunto de todos os possíveis "signais que entram" (funções) é chamado espaço vetorial.

Referência

· D. Lay, *Linear Algebra and its Applications*, Addison-Wesley Longman, 2000.

1.2. **Exemplo II.** Seja $\mathbb{S}$ o conjunto de todas as sequências infinitas de números reais da forma

$$(y_n)_n = (\ldots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \ldots).$$

Elementos de $\mathbb{S}$ aparecem em engenharia, por exemplo, quando um sinal é medido em tempo discreto. Um sinal pode elétrico, mecânico, ótico. . . O sistema de controle de uma nave, como no Exemplo I, utiliza sinais discretos ou "digitais". Novamente, como no Exemplo I, é importante que estas sequências possam ser somadas e multiplicadas por um escalar. Matematicamente, $\mathbb{S}$ precisa ter a estrutura de um espaço vetorial.

1.3. **Exemplo III.** Na disciplina Cálculo I aprendemos a encontrar primitivas de funções reais. Existe alguma relação entre a Álgebra Linear e o cálculo de (algumas) primitivas? Podemos, por exemplo, encontrar a primitiva de

$$\int t^3 e^t dt \text{ ou } \int e^t \cos t dt$$

utilizando ferramentas da Álgebra Linear?

2. Autovalores e autovetores

2.1. **Exemplo I.** O texto a seguir foi traduzido pelo Professor Sergio Henrique Monari Soares.

Suponha que as fêmeas de uma espécie biológica que se reproduz sexualmente são classificadas por idade, formando três faixas etárias. Uma unidade de tempo é escolhida de modo que nenhuma fêmea viva mais do que três unidades.

Estamos interessado na distribuição da população de fêmeas nos intervalos de tempo unitários, começando no tempo $t = 0$.

Seja x_{it}, $i = 0, 1, 2$ e $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$, o tamanho da i-ésima faixa etária no instante t. O vetor

$$x_t = \begin{pmatrix} x_{0t} \\ x_{1t} \\ x_{2t} \end{pmatrix}$$

é chamado o vetor população no instante t. Suas componentes são os tamanhos das três faixas etárias, com x_{0t} sendo o tamanho da faixa mais jovem e x_{2t} o tamanho da faixa mais velha.

Faremos agora certas suposições que nos permitirão determinar como x_1, o vetor população no instante 1, está relacionado a x_0. Em termos de componentes,

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_{00} \\ x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}$$

Denotemos por b_0, b_1, b_2 as taxas de natalidade de fêmeas em cada uma das três faixas etárias e por s_0, s_1, s_2 as taxas de sobrevivência. Isto é, s_i é a proporção de fêmeas da i-ésima faixa etária que sobrevive por uma unidade de tempo. Naturalmente, $s_2 = 0$. Vamos supor que os valores b_i e s_i sejam constantes e não variem com o tempo, com a densidade populacional e nem com outros fatores. Então:

$$\begin{aligned} x_{01} &= b_0 x_{00} + b_1 x_{10} + b_2 x_{20}, \\ x_{11} &= s_0 x_{00}, \\ x_{21} &= s_1 x_{10}. \end{aligned}$$

Estas equações expressam os seguintes fatos: No instante $t = 1$, as fêmeas da faixa mais jovem são aquelas que nasceram durante o intervalo de tempo unitário precedente, enquanto as fêmeas das outras duas faixas mais velhas são aquelas que sobreviveram desde o tempo $t = 0$.

Matricialmente o sistema algébrico acima pode ser escrito como

$$x_1 = Ax_0, \qquad A = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ s_0 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Agora, x_2 ésta relacionado a x_1 do mesmo modo que x_1 está relacionado a x_0, de modo que

$$x_2 = Ax_1 \quad \text{ou} \quad x_2 = A^2 x_0.$$

Assim, $x_3 = Ax_2 = A^3 x_0$ e, em geral,

$$x_k = A^k x_0$$

para todo inteiro positivo $k \in \mathbb{N}$.

Questão: existe uma distribuição etária *estável*; isto é, existe um vetor população x_k tal que $x_{k+1} = \lambda x_k$, onde λ é constante?

Note que não estamos pedindo que a população permaneça fixada, mas que exista uma distribuição etária tal que a proporção de fêmeas para cada faixa etária permaneça constante.

Referência

· A. L. Rabestein, *Elementary Differential Equations with Linear Algebra*, Academic Press, 1975.

2.2. **Exemplo II.** Suponha que um estudo demográfico mostre que a cada ano cerca de 5% da população do centro de uma cidade muda-se para a periferia (e 95% permanece no centro), enquanto que 3% da população da perifeira muda-se para o centro (e 97% permanece na periferia).

(a) Liste alguns fatos que devemos ignorar para que a seguinte equação matricial

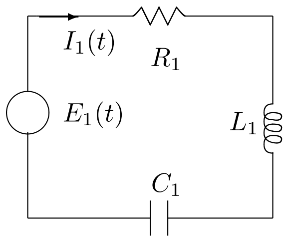
$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{pmatrix} \mathbf{x}_0$$

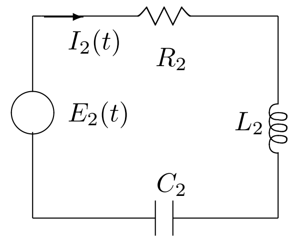
descreva a mudança na população de um ano para outro. Interprete a equação acima. A matriz $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{pmatrix}$ é chamada *matriz de migração.*

(b) Se $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} r_0 \\ s_0 \end{pmatrix}$, onde r_0 é o número de pessoas que vivem no centro e s_0 é o número de pessoas que vivem na periferia num determinado ano, o que representa a fórmula $\mathbf{x}_{k+1} = A^k \mathbf{x}_0$, onde k é um número natural?

Questão: Para estabelecer metas (de infra-estrutura, por exemplo) é importante saber o comportamento da população a longo prazo. Com base na dinâmica da população apresentada, podemos concluir algo sobre o seu comportamento quando k é "grande"?

2.3. **Exemplo III.** Um transformador envolve dois circuitos elétricos, sendo que um deles induz uma corrente no outro por indução magnética.





O correspondente sistema de equações (diferenciais) para as correntes I_1 e I_2 num instante t é dado por:

$$(\star) \qquad \begin{cases} L_1\dfrac{d^2I_1}{dt^2} + M\dfrac{d^2I_2}{dt^2} + R_1I_1 = E_1 \\ \\ L_2\dfrac{d^2I_2}{dt^2} + M\dfrac{d^2I_1}{dt^2} + R_2I_2 = E_2, \end{cases}$$

onde M é o coeficiente de indução mútua.

(a) Suponha que $M^2 \neq L_1L_2$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, encontre uma matrizes $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{f}(t) \in M_{4\times 1}(\mathbb{R})$ e uma matriz $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ tal que o sistema de equações $(\star)$ seja reescrito na forma $\dfrac{d}{dt}\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}$.

Questão: Como encontrar soluções da equação diferencial $(\star)$?

2.4. **Exemplo IV.** (Números de Fibonacci) A sequência de Fibonacci é dada pela seguinte fórmula

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k, \text{ onde } k \in \mathbb{N},\ F_0 = 0 \text{ e } F_1 = 1.$$

Assim alguns números de Fibonacci são:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

Estes números possuem importantes aplicações. Por exemplo, plantas e árvores crescem num determinado padrão que lembra tal sequência. Dado $k \in \mathbb{N}$, defina $\mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix}$.

(a) Mostre que para cada $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{u}_k$.

Questão: Mostre que para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right].$$

Note que a expressão acima é sempre um número inteiro!!! (Por quê?)

3. Espaço com Produto Interno

3.1. **Exemplo I.** Existe uma função da forma $y = ax + b$ que passa pelos dados $(2,1)$, $(5,2)$, $(7,3)$, $(8,3)$? Existe uma equação da forma $y = ax + b$ que melhor aproxima os dados $(2,1)$, $(5,2)$, $(7,3)$, $(8,3)$?

3.2. **Exemplo II.** Existe uma equação da forma $y = a + bx + cx^2$ que melhor aproxima os dados

$$(-2,3),\ (-1,5),\ (0,5),\ (1,4),\ (2,3)?$$

3.3. **Exemplo III.** Quantum mechanics "lives" in a Hilbert space, and Hilbert space is "just" an infinite-dimensional vector space, so that the vectors are actually functions. Then the mathematics of quantum mechanics is pretty much "just" linear operators in the Hilbert space.

Quantum mechanics	Algebra Linear
wave function	vetores
linear operator	matrizes
eigenstates	autovetores
physical system	espaços de Hilbert
physical observable	matriz hermetiana

Visto em *http://physics.stackexchange.com/questions/39165/linear-algebra-for-quantum-physics* em 01 de agosto de 2017.

3.4. **Exemplo IV.** Durante o próximo ano, o governo de uma cidade está planejando reconstruir x centenas de quilômetros de rodovias e pontes públicas e melhorar y centenas de hectares de parques e áreas de recreação. O governo da cidade deve decidir como alocar seus recursos (dinheiro, equipamentos, mão de obra, etc.) entre os dois projetos. Deve verificar que se o retorno é maior trabalhar nos dois projetos simultaneamente ou trabalhar somente em um. Uma restrição que as variáveis x e y devem satisfazer é

$$4x^2 + 9y^2 \leq 36.$$

(a) Represente geometricamente a região dos pontos (x, y) que satisfazem a condição acima.

A região descrita em (a) é chamada *região viável*. Cada ponto da região viável representa um cronograma de trabalho possível para o ano. Os pontos curva $4x^2 + 9y^2 = 36$ utiliza o máximo de recursos disponíveis.

Uma vez escolhido o cronograma de trabalho, o governo da cidade quer saber a opinião de seus residentes. Para medir o valor ou a utilidade que os residentes atribuiriam aos diversos cronogramas de trabalhos possíveis (x, y), os economistas usam funções do tipo

$$q(x, y) = xy.$$

O conjunto dos pontos (x, y) tais que $q(x, y)$ é constante é uma *curva indiferença*.

(b) Apresente três curvas indiferenças.

(c) Interprete o significado de uma curva indiferença.

Questão: Encontrar o cronograma de trabalho que maximiza da função utilidade q.

(d) (Somente poderá ser respondida no final do semestre) Você percebe alguma relação com algo que estudou em Cálculo II?