# Lista 3 - Geometria Analítica e Álgebra Linear

**Exercício 1.** *Em $V^3$, considere as retas $r : A + \alpha\vec{u}, \alpha \in \mathbb{R}$, e $s : B + \beta\vec{v}, \beta \in \mathbb{R}$. Se $r \parallel s$, o que pode se dizer do vetor $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$?*

**Exercício 2.** *Determine a posição relativa entre o plano $\pi : X = (1, 2, 1) + \lambda(1, -1, 1) + \beta(0, 1, 2)$, $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, e a reta $r : X = (1, 3, 4) + t(1, 1, 1), t \in \mathbb{R}$.*

**Exercício 3.** *Determine a equação geral do plano $\pi$ que passa pelo ponto $A = (2, 1, -2)$ e é perpendicular à reta* $r : \begin{cases} x = -4 + 3t, \\ y = 1 + 2t, \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = t, \end{cases}$

**Exercício 4.** *Determine a equação geral, a equação vetorial e a equação paramétrica de um plano $\pi$ que contém as retas $r$ e $s$, as quais passam pelo ponto $A = (1, 0, 0)$ e possuem, respectivamente, $\vec{u} = (2, 2, 1)$ e $\vec{v} = (1, 1, 1)$ como vetores diretores.*

**Exercício 5.** *O plano $\pi_1$ contém os pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$. O plano $\pi_2$ contém o ponto $Q = (-1, -1, 0)$ e é pararelo aos vetores $\vec{u} = (0, 1, -1)$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)$. O plano $\pi_3$ tem equação vetorial $X = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 1, 0) + \mu(1, 0, 1)$, com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

*a) Obtenha as equações gerais dos três planos;*

*b) Mostre que a interseção destes três planos se reduz a um único ponto e determine-o.*

**Exercício 6.** *Dados os planos $\pi_1 : x - y + z + 1 = 0$, $\pi_2 : x + y - z - 1 = 0$ e $\pi_3 : x + y + 2z - 2 = 0$, encontre uma equação geral do plano $\pi$ que contém $\pi_1 \cap \pi_2$ e é perpendicular ao plano $\pi_3$.*

**Exercício 7.** *Obtenha um vetor normal ao plano $\pi$ em cada caso:*

*a) $\pi$ contém os pontos $A = (1, 1, 1), B = (1, 0, 1)$ e $C = (1, 2, 3)$;*

*b) $\pi$ tem equação vetorial $X = (1, 2, 0) + \alpha(1, -1, 1) + \beta(0, 1, -2)$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;*

*c)* $\pi : x - 2y + 4z + 1 = 0.$

**Exercício 8.** *Determine o polinômio característico das matrizes abaixo e calcule os autovalores e respectivos autovetores:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ -2 & 17 & -2 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

**Exercício 9.** *Determine o núcleo e a imagem da transformação linear*

$$T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ dada por } T(x, y, z, t) = (x + y + 2z, -x + 2t).$$

**Exercício 10.** *Ache uma transformação linear* $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *tal que*

$$\mathrm{Ker}(T) = [(1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)] \text{ e } \mathrm{Im}(T) = [(1, -1, 0, 2), (0, 1, -1, 0)].$$

**Exercício 11.** *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que*

$$[T]_{can} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

*Ache uma base de* $\mathrm{Im}(T)$ *e uma base de* $\mathrm{Ker}(T)$.

**Exercício 12.** *Seja* $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *uma transformação linear dada por*

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ z - w & 0 \end{pmatrix}$$

(a) *Determine a matriz de* $T$ *com relação à base canônica.*

(b) *Determine a matriz de* $T$ *com relação à base*

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

*de* $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

*(c) Exiba a matriz $M$ tal que $[T]_{\mathcal{B}} = M^{-1}[T]_{can}M$.*

**Exercício 13.** *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear cuja matriz com relação à base canônica seja*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

*(a) Determine $T(x, y, z)$.*

*(b) Qual é a matriz de $T$ com relação à base $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0), (1, -1, 1), (0, 1, -1)\}$?*

*(c) O operador $T$ é invertível? Justifique.*

**Exercício 14.** *Seja $A$ uma matriz $2 \times 2$ simétrica em $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, isto é, tal que $A^t = A$. Mostre que $A$ é diagonalizável.*

**Exercício 15.** *Determine a matriz $P$ invertível tal que $P^{-1}AP$ seja diagonal, onde*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercício 16.** *Ache os autovalores de $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e de $A^{-1}$.*

**Exercício 17.** *Determine todos os valores de $a, b, c \in \mathbb{C}$ para os quais a matriz abaixo seja diagonalizável:*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercício 18.** *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear dado por $T(x, y, z) = (x + y + z, 3x - 2y - z, -2x + 3y + 2z)$.*

*a) Determine $T^*$.*

*b) Determine $\mathrm{Ker}(T^*)$ e $\mathrm{Im}(T^*)$.*

**Exercício 19.** *Dada a matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ *determine uma matriz invertível* $M$ *tal que* $M^t A M$ *seja diagonal.*

**Exercício 20.** *Identifique as cônicas:*

*(a)* $7x^2 - 8xy + y^2 - 17\sqrt{5}\ x + 11\sqrt{5}\ y + 41 = 0.$

*(b)* $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 15x - 20y + 50 = 0.$

*(c)* $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 12 = 0.$

**Exercício 21.** *Identifique as quádricas:*

*(a)* $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 3 = 0.$

*(b)* $3z^2 + 2xy + x + 1 = 0.$

*(c)* $2xy - 6x + 10y + z - 31 = 0.$