Lista 2 - Geometria Analítica e Álgebra Linear

Exercício 1. *Determinar as coordenadas do vetor* $\vec{u} = (4, -5, 3) \in \mathbb{R}^3$, *em relação às seguintes bases:*

a) Canônica, isto é, $E = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$;

b) $B_1 = \{(1, 1, 1), (1, 2, 0), (3, 1, 0)\}$;

c) $B_2 = \{(1, 2, 1), (0, 3, 2), (1, 1, 4)\}$.

Exercício 2. *Determinar as coordenadas do polinômio* t^3 *em relação à seguinte base de* $\mathcal{P}^3(\mathbb{R}) : B = \{1, 2 - t, t^2 + 1, 1 + t + t^3\}$.

Exercício 3. *A matriz de mudança de uma base* B *do* $\mathbb{R}^2$ *para a base* $C = \{(1, 1), (0, 2)\}$ *desse mesmo espaço é:*

$$M_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determine a base B.

Exercício 4. *A matriz de mudança da base* $B = \{1 + t, 1 - t^2\}$ *para uma base* C *ambas de um mesmo subespaço de* $\mathcal{P}^2(\mathbb{R})$ *é:*

$$M_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determine a base C.

Exercício 5. *Considere as bases* $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ *e* $C = \{\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3}\}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *assim relacionadas:*

$$\vec{g_1} = \vec{e_1} - \vec{e_2} - \vec{e_3}$$
$$\vec{g_2} = 2\vec{e_2} + 3\vec{e_3}$$
$$\vec{g_3} = 3\vec{e_1} + \vec{e_3}$$

a) Determine as matrizes de mudança de base M_B^C *de* B *para* C, *e a matriz de mudança de base* M_C^B *de* C *para* B.

b) Se um vetor $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ apresenta coordenadas 1, 2 e 3, em relação a B, quais as coordenadas de u relativamente a C?

Exercício 6. *Considere o seguinte subespaço vetorial de $M_2(\mathbb{R})$:*

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : x - y - z = 0 \right\}.$$

a) Mostre que os seguintes subconjuntos de $M_2(\mathbb{R})$ são bases de U :

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \; C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

b) Ache a matriz de mudança de base M_B^C de B para C e a matriz de mudança de base M_C^B de C para B.

c) Encontre uma base D de U de tal maneira que a matriz de mudança de D para B seja:

$$M_D^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 7. *Determine a matriz de mudança M_E^F da base $E = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ para a base $F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ nos casos:*

a)

$$\vec{f}_1 = -3\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$$
$$\vec{f}_2 = \vec{e_1} - 2\vec{e_2} + \vec{e_3}$$
$$\vec{f}_3 = \vec{e_1} + 2\vec{e_2}$$

b)

$$\vec{f}_1 = \vec{e_1} - \vec{e_3}$$
$$\vec{f}_2 = 3\vec{e_1}$$
$$\vec{f}_3 = 4\vec{e_1} - 3\vec{e_2}$$

Exercício 8. *Sendo $\vec{v} = -4\vec{f}_1 + \vec{f}_2 - \vec{f}_3$ ache $\vec{v}$ em função de $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$, nos casos do exercício anterior.*

Exercício 9. *Sejam* $E = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, $F = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ *e* $G = \{\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3}\}$ *bases, com:*

$$\vec{e_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{f_1} - \frac{1}{2}\vec{f_3} \qquad \vec{g_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$$

$$\vec{e_2} = \frac{1}{2}\vec{f_1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{f_3} \qquad \vec{g_2} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$$

$$\vec{e_3} = \vec{f_2} \qquad \vec{g_3} = \vec{e_1}$$

Ache ***todas*** *as matrizes de mudança de base.*

Exercício 10. *Mostre que a função*

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

definida por

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 2x_1x_2 + 25y_1y_2,$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Exercício 11. *Refaça o exercício anterior considerando*

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2y_1y_2.$$

Exercício 12. *Mostre que a função*

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

definida por

$$\langle (a, b, c, d), (x, y, z, w) \rangle = 2ax + by + cz + dw$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^4$.

Exercício 13. *Considere o espaço vetorial* $M_2(\mathbb{R})$ *e a função*

$$\langle , \rangle : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

dada por $\langle A, B \rangle = tr(A^TB)$, *onde* $tr(A^TB)$ *é o traço da matriz* A^TB *e* A^T *indica a transposta da matriz* A. *Mostre que a função* $\langle , \rangle$ *assim definida é um produto interno em* $M_2(\mathbb{R})$.

Exercício 14. *Sejam* $P = (1, 3, -3), Q = (-2, -1, 4)$ *e* $\vec{u} = (-1, 4, 0)$*. Calcule* $d(P, Q)$ *e determine as coordenadas dos vetores* $\overrightarrow{QP}$*,* $P + \vec{u}$ *e* $Q + 2\overrightarrow{PQ}$*.*

Exercício 15. *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^3$ *munido do produto interno canônico. Dados vetores* $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$*, mostre que a norma*

$$\|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle}$$

indica a distância usual em $\mathbb{R}^3$ *entre* u *e* v*.*

Exercício 16. *No exercício anterior, conclua que se* $v = (0, 0, 0)$ *então*

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2},$$

o qual representa a distância entre u *e a origem (lembre que no exercício anterior utilizamos o produto interno canônico).*

Exercício 17. *Conforme o* ***Exercício 15****, dado um vetor* v*, escrevemos*

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

O objetivo deste exercício é mostrar que a norma de v *depende do produto interno considerado. Para isto, considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$ *e tome* $v = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$*. Calcule a norma de* v*, considerando:*

a) O produto interno canônico de $\mathbb{R}^2$*;*

b) O produto interno definido no ***Exercício 10****.*

Exercício 18. *Considere os vetores* $u = (1, -3)$ *e* $v = (2, 5)$ *de* $\mathbb{R}^2$*. Encontre.*

a) $\langle u, v\rangle$ *em relação ao produto interno canônico de* $\mathbb{R}^2$*;*

b) $\langle u, v\rangle$ *em relação ao produto interno de* $\mathbb{R}^2$ *do* ***Exercício 11****;*

c) $\|v\|$ *usando o produto interno canônico de* $\mathbb{R}^2$*;*

d) $\|v\|$ *usando o produto interno de* $\mathbb{R}^2$ *do* ***Exercício 11****.*

Exercício 19. *Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores tais que*

$$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}, \quad \|\vec{u}\|=\frac{3}{2}, \quad \|\vec{v}\|=\frac{1}{2}, \quad \|\vec{w}\|=2.$$

Calcule $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle+\langle\vec{v},\vec{w}\rangle+\langle\vec{w},\vec{u}\rangle$.

Exercício 20. *Sabemos que se um vetor v verifica $\|v\|=1$, então v é chamado de **vetor unitário** ou **versor**. Utilizando o produto interno canônico do $\mathbb{R}^3$, mostre que os vetores canônicos*

$$\vec{i}=(1,0,0), \quad \vec{j}=(0,1,0), \quad \vec{k}=(0,0,1)$$

são vetores unitários.

Exercício 21. *Determine o valor de $a\in\mathbb{R}$ de modo que o vetor $\vec{u}=(a,-2a,2a)$ seja um **vetor unitário**.*

Exercício 22. *Sabemos que todo vetor não-nulo v pode ser **normalizado**, bastando apenas fazer*

$$u=\frac{v}{\|v\|},$$

*neste caso dizemos que u **é o vetor** v **normalizado**. Considerando o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno canônico e o vetor $v=(1,2,3)\in\mathbb{R}^3$, obtenha o vetor v normalizado.*

Exercício 23. *Seja V um espaço vetorial real com produto interno $\langle,\rangle : V\times V\to\mathbb{R}$ e sejam $u,v\in V$. Prove que*

$$\frac{1}{4}\|u+v\|^2-\frac{1}{4}\|u-v\|^2=\langle u,v\rangle$$

e também que

$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2\|u\|^2+2\|v\|^2.$$

Exercício 24. *Seja V um espaço vetorial com produto interno. Então, sabemos que valem a **desigualdade de Cachy-Schwarz***

$$|\langle u,v\rangle|\leq\|u\|\cdot\|v\|;\ \forall\ u,v\in V$$

e a ***desigualdade triangular***

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|;\ \forall\ u, v \in V.$$

Em cada um dos itens abaixo, mostre que a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade triangular são válidas para os vetores dados:

a) $u = (-4, 2, 1)$ *e* $v = (8, -4, -2)$*, usando o produto interno canônico de* $\mathbb{R}^3$*.*

b) $u = (-2, 1)$ *e* $v = (1, 0)$*, usando o produto interno* $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 3x_1x_2 + 2y_1y_2$*.*

Exercício 25. *Seja* V *um espaço vetorial real munido de um produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$*. Observe que utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, concluímos que para quaisquer vetores não-nulos* $u, v \in V$ *o quociente*

$$\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\,\|v\|}$$

pertence ao intervalo $[-1, 1]$*. Deste modo, existe um único* $\theta \in [0, \pi]$ *tal que*

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\,\|v\|}.$$

O ângulo θ *é chamado* ***ângulo entre os vetores não-nulos*** u ***e*** v*.*
Encontre $\cos(\theta)$*, sendo* θ *o ângulo entre os vetores*

a) $u = (1, -3)$ *e* $v = (2, 4)$ *de* $\mathbb{R}^2$*, com o produto interno canônico de* $\mathbb{R}^2$*;*

a) $u = (1, 0)$ *e* $v = (0, 1)$ *de* $\mathbb{R}^2$*, com o produto interno canônico de* $\mathbb{R}^2$*;*

c) $u = (1, 2, 3, 4)$ *e* $v = (-1, 1, 4, -3)$ *de* $\mathbb{R}^4$*, com o produto interno do* ***Exercício 12****.*

Exercício 26. *Seja* V *um espaço vetorial real munido de um produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$*. Dizemos que* $u, v \in V$ *são* ***ortogonais*** *se* $\langle u, v \rangle = 0$*. Neste caso, escrevemos* $u \perp v$*. Prove que:*

a) O vetor nulo 0_V *é ortogonal a todo vetor* $v \in V$*;*

b) Se $u \perp v$*, então* $v \perp u$*;*

c) Se um vetor $v \in V$ verifica $v \perp u$, para todo $u \in V$, então v é o vetor nulo 0_V;

d) Se $v \perp w$ e $u \perp w$, então $(v+u) \perp w$;

e) Se $v \perp u$ e λ é um escalar, então $\lambda v \perp u$.

Exercício 27. *Seja B uma base de um espaço vetorial V com produto interno. Dizemos que B é uma* ***base ortogonal*** *se quaisquer dois vetores distintos de B são ortogonais. Considerando o produto interno de $M_2(\mathbb{R})$ definido no* ***Exercício 13****, obtenha uma base ortogonal de $M_2(\mathbb{R})$.*

Exercício 28. *Seja V um espaço vetorial. Prove que todo conjunto ortogonal de vetores não-nulos de V é um conjunto linearmente independente.*
A recíproca é verdadeira? Caso sua resposta seja sim, prove este fato, caso sua resposta seja não, apresente um contraexemplo.

Exercício 29. *Considere $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual. Aplique o processo de Gram-Schmidt ao conjunto $B = \{(2,1),(1,1)\}$ para encontrar uma base ortogonal $\{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$.*

Exercício 30. *Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Aplique o processo de Gram-Schmidt ao conjunto $A = \{(1,0,0),(1,1,1),(0,0,1)\}$ para encontrar uma base ortogonal $\{w_1, w_2, w_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.*

Exercício 31. *Sabemos que uma base ortogonal na qual cada vetor tem norma 1 é chamada* ***base ortonormal****. Mostre que:*

a) $B = \{(1,0),(0,1)\}$ é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^2$;

b) $C = \left\{ \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \right\}$ é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$;

c) Se $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base ortogonal de um espaço vetorial n-dimensional V, sempre é possível obter (a partir de B) uma base ortonormal de V.

Exercício 32. *Sabendo que $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é base ortonormal de V^3, descreva o conjunto solução do seguinte sistema de equações:*

$$\begin{cases} \langle \vec{x},\ \vec{i} - \vec{k} \rangle = 1, \\ \vec{x} + \vec{y} = \vec{i} + \vec{j}. \end{cases}$$

Exercício 33. *Decomponha o vetor* $\vec{v} = (-1, -3, 2)_B$ *como soma de dois vetores* $\vec{p}$ *e* $\vec{q}$, *de modo que* $\vec{p}$ *seja paralelo e* $\vec{q}$ *seja ortogonal ao vetor* $\vec{u} = (0, 1, 3)_B$, *onde* $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ *é base ortonormal de* $\mathbb{V}^3$.

Exercício 34. *Seja* $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *uma base ortonormal de um espaço vetorial n-dimensional* V. *Então, para todo* $v \in V$, *podemos escrever*

$$v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v, v_2 \rangle v_2 + \cdots + \langle v, v_n \rangle v_n.$$

Note que este resultado nos permite obter facilmente as coordenadas de um vetor em relação a uma base ortonormal.

Exercício 35. *Sejam* V *um espaço vetorial com produto interno e* $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ *uma base ortonormal de* V, *onde*

$$v_1 = (0, 1, 0), \quad v_2 = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right), \quad v_3 = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right).$$

Obtenha as coordenadas do vetor $v = (1, 1, 1)$ *em relação à base ortonormal* B.

Exercício 36. *Considere os seguintes vetores em* $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{v} = (a, b) \neq (0, 0), \quad \vec{w_1} = (-b, a), \quad \vec{w_2} = (b, -a).$$

Mostre que conjuntos $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}, \vec{w_1}\}$ *e* $\mathcal{B}_2 = \{\vec{v}, \vec{w_2}\}$ *são duas bases ortogonais de* $\mathbb{R}^2$ *e determine a orientação destas bases.*

Exercício 37. *Determine a orientação das bases ortonormais do* ***Exercício 31****.*

Exercício 38. *Sejam os vetores* $\vec{u} = (2, 1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 3)$ *e* $\vec{w} = (-1, 2, 1)$ *(dados em relação à base canônica do* $\mathbb{R}^3$*). Mostre que estes vetores formam uma base do* $\mathbb{R}^3$, *determine a orientação desta base e calcule os seguintes produtos vetoriais:*

a) $\vec{u} \times \vec{v}$; *b)* $\vec{u} \times \vec{w}$; *c)* $\vec{v} \times \vec{w}$.

Exercício 39. *Dada a base ortonormal positiva* $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, *calcule os seguintes produtos vetoriais:*

a) $\vec{i} \times \vec{i}$;

b) $\vec{j} \times \vec{j}$;

c) $\vec{k} \times \vec{k}$;

d) $\vec{i} \times \vec{j}$;

e) $\vec{j} \times \vec{k}$;

f) $\vec{k} \times \vec{i}$;

g) $\vec{j} \times \vec{i}$;

h) $\vec{k} \times \vec{j}$;

i) $\vec{i} \times \vec{k}$.

Exercício 40. *Calcule a área do paralelogramo* $ABCD$ *cujos vértices são dados pelos seguintes pontos:* $A(1,1,0), B(0,1,2), C(4,1,0)$ *e* $D(5,1,-2)$.

Exercício 41. *Em relação à base ortonormal positiva* $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ *de* $\mathbb{V}^3$*, são dados os vetores* $\vec{u} = (1,2,3)$ *e* $\vec{v} = (-1,1,2)$. *Calcule* $\vec{u} \times \vec{v}$ *e obtenha um vetor unitário* $\vec{w}$ *de tal modo que* $\vec{w}$ *seja ortogonal aos vetores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$.

Exercício 42. *a) Sejam* $B = (-5,2,3)$ *e* $C = (4,-7,-6)$. *Escreva a equação na forma vetorial para a reta* BC. *Verifique se* $D = (3,1,4)$ *pertence a essa reta.*

b) Dados $A = (1,2,3)$ *e* $\vec{u} = (3,2,1)$*, escreva equações da reta que contém o ponto* A *e é paralela a* $\vec{u}$*, na forma vetorial. Obtenha dois vetores unitários dessa reta.*

Exercício 43. *Faça um esboço dos gráficos dos planos cujas equações gerais são dadas por:*

$$\textit{(i)}\ x = 2, \quad \textit{(ii)}\ y + 1 = 0, \quad \textit{(iii)}\ z + 4 = 0, \quad \textit{(iv)}\ x - z = 0.$$

Exercício 44. *Obtenha uma equação vetorial da reta* s *que contém o ponto* $P = (1,1,0)$*, é paralela ou está contida no plano dado por* $\pi : 2x + y - z - 3 = 0$ *e é concorrente à reta dada por* $r : (x,y,z) = (1,0,0) + \lambda(-1,0,1)$*, para* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercício 45. *Obtenha um vetor normal ao plano* π *em cada caso:*

a) π *contém* $A = (1,1,1)$, $B = (1,0,1)$ *e* $C = (1,2,3)$;

b) $\pi := X = (1,2,0) + \lambda(1,-1,1) + \mu(0,1,-2)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

c) $\pi : x - 2y + 4z + 1 = 0$.

Exercício 46. *Seja* r *a reta determinada pelos pontos* $A = (1,0,4)$ *e* $B = (3,-2,9)$. *Obtenha a equação vetorial de* r *e verifique se o ponto* $P = (-9,10,-9)$ *pertence ou não à reta* r.

Exercício 47. *Seja π o plano que contém o ponto $A = (3, 7, 1)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (1, 1, 0)$.*

a) *Obtenha a equação vetorial de π;*

b) *Verifique se o ponto $(1, 2, 2)$ pertence a π;*

c) *Verifique se o vetor $\vec{w} = (2, 2, 5)$ é paralelo a π;*

d) *Os pontos $A, A + \vec{u}$ e $A + \vec{v}$ pertencem a π (por quê?). Eles são colineares?*

Exercício 48. *Dados o ponto $A = (0, 2, 1)$ e a reta $r : X = (0, 2, -2) + \lambda(1, -1, 2)$, ache os pontos da reta r que distam $\sqrt{3}$ do ponto A. A distância do ponto A à reta r é maior, menor ou igual a $\sqrt{3}$? Por quê?*

Exercício 49. *Verifique se a aplicação $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y, z) = (z, x + y)$ é linear.*

Exercício 50. *Verifique se a aplicação $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x) = (x, 2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ é linear.*

Exercício 51. *Quais das seguintes aplicações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ são transformações lineares?*

a) $F_1(x, y, z) = (x - y, x + y, 0)$;

b) $F_2(x, y, z) = (x, x, x)$;

c) $F_3(x, y, z) = (2x^2 + 3y, x, z)$.

Exercício 52. *Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear assim definido na base canônica: $F(1, 0, 0) = (2, 3, 1)$, $F(0, 1, 0) = (5, 2, 7)$ e $F(0, 0, 1) = (2, 0, 7)$. Determine $F(x, y, z)$, onde (x, y, z) é um vetor qualquer de $\mathbb{R}^3$.*

Exercício 53. *Existe um operador linear $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $F(1, 1, 1) = (1, 2, 3)$, $F(1, 2, 3) = (1, 4, 9)$ e $F(2, 3, 4) = (1, 8, 27)$? Justifique sua resposta.*

Exercício 54. *Seja F o operador linear do $\mathbb{R}^2$ tal que $F(1, 0) = (2, 1)$ e $F(0, 1) = (1, 4)$.*

a) *Determine* $F(2,4)$;

b) *Determine* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $F(x,y) = (2,3)$;

c) *Prove que* F *é injetor e sobrejetor.*

Exercício 55. *Determine uma transformação linear* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *tal que* $Im(F) = [(1,1,2,1),(2,1,0,1)]$.

Exercício 56. *Seja* F *o operador linear de* $M_2(\mathbb{R})$ *definido por* $F(X) = BX$, $\forall X \in M_2(\mathbb{R})$, *onde* $B \in M_2(\mathbb{R})$. *No caso de* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, *determine* $Ker(F)$ *e uma base da imagem de* F.

Exercício 57. *Encontre uma transformação linear do* $\mathbb{R}^3$ *no* $\mathbb{R}^2$ *cujo núcleo seja gerado por* $(1,1,0)$.

Exercício 58. *Para cada uma das transformações lineares abaixo, determine uma base e a dimensão do núcleo e da imagem:*

a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *dada por* $F(x,y,z) = x + y - z$;

b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $F(x,y) = (2x, x+y)$;

c) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *dada por* $F(x,y,z) = (x-y-z, x+y+z, 2x-y+z, -y)$;

d) $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ *dada por* $F(X) = MX + X$, *onde* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercício 59. *Mostre que o operador linear* F *do* $\mathbb{R}^3$ *dado por* $F(x,y,z) = (x+z, x-z, y)$ *é um automorfismo. Determine* F^{-1}.

Exercício 60. *Considere uma transformação linear* $T : U \to V$.

a) *Prove que, se o conjunto* $\{T(u_1), T(u_2), ..., T(u_r)\}$ *é l.i. em* V, *então* $\{u_1, u_2, ..., u_r\}$ *é l.i. em* U.

b) *Prove que, se* T *é injetora e* $\{u_1, u_2, ..., u_r\}$ *é l.i. em* U *então* $\{T(u_1), T(u_2), ..., T(u_r)\}$ *é l.i. em* V.