Lista 1 - Geometria Analítica e Álgebra Linear

Exercício 1. *Seja o vetor* $\vec{v} = (2, -5)$. *Sabendo que a origem do segmento que representa este vetor é o ponto* $A(-1, 3)$, *determine a extremidade deste segmento.*

Exercício 2. *Sejam os vetores* $\vec{u} = (3, -1)$ *e* $\vec{v} = (-1, 2)$. *Encontre um vetor* $\vec{w} = (x, y)$ *que verique cada uma das seguintes equações:*

(*a*) $4(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{1}{3}\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{w}$.

(*b*) $3\vec{w} - 2(\vec{v} - \vec{u}) = 2(4\vec{w} - 3\vec{u})$.

Exercício 3. *Sejam dados os pontos* $A(-1, 3), B(2, 5)$ *e* $C(3, 1)$. *Escreva os seguintes vetores em coordenadas:*

(*a*) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB}$.

(*b*) $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BC}$.

(*c*) $3\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{CB}$.

Exercício 4. *Dados os vetores* $\vec{u} = (3, -4)$ *e* $\vec{v} = \left(-\frac{9}{4}, 3\right)$, *mostre que existem escalares* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tais que* $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ *e* $\vec{v} = \beta\vec{u}$.

Exercício 5. *Dados os vetores* $\vec{u} = (2, -4)$, $\vec{v} = (-5, 1)$ *e* $\vec{w} = (-12, 6)$, *mostre que* $\vec{w}$ *pode ser escrito como combinação linear de* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$.

Exercício 6. *Dados dois pontos* $A(2, -3, 1)$ *e* $B(4, 5, -2)$, *prove que existe um ponto* $P(x, y, z)$ *que verifica* $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$.

Exercício 7. *Determine um vetor* $\vec{v} = (x, y, z)$ *que torna válida a equação*

$$(3, 7, 1) + 2\vec{v} = (6, 10, 4) - \vec{v}.$$

Exercício 8. *Sejam os vetores* $\vec{u} = (4, 1, -3)$ *e* $\vec{v} = (6, a, b)$. *Encontre valores para as coordenadas* a *e* b *do vetor* $\vec{v}$ *de modo que* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *sejam l. d.*

Exercício 9. *Em cada caso abaixo, decida se os vetores dados são l. i. ou l. d.*

(*a*) $\vec{u} = (-1, -5, 0), \vec{v} = (2, 1, 3)$ *e* $\vec{w} = (-2, -7, -1)$.

(*b*) $\vec{u} = (2, 1, -1), \vec{v} = (3, -1, 0)$ *e* $\vec{w} = (1, 0, 4)$.

Exercício 10. *Sejam os pontos* $A(3,1,-2), B(1,5,1)$ *e* $C(\alpha,\beta,7)$. *Encontre escalares* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ *de modo que os vetores* $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{BC}$ *sejam l. d.*

Exercício 11. *Seja* $E = \{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$ *base de* V^3. *Considere* $\vec{u} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$, $\vec{v} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$ *e* $\vec{w} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2} + c\vec{e_3}$. *Determine as condições que os números* a, b *e* c *devem satisfazer para que* $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ *seja l. d.*

Exercício 12. *Sejam* $ABCDEF$ *um hexágono regular de centro* O. *Mostre que*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 6\overrightarrow{AO}.$$

Exercício 13. *Dados quatro pontos* A, B, C *e* X *tais que* $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$, *exprima* $\overrightarrow{CX}$ *em função de* $\overrightarrow{CA}$ *e* $\overrightarrow{CB}$ *(e* m*).*

Sugestão: *Na relação* $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$ *faça aparecer* C *em ambos os membros.*

Exercício 14. *Sejam* ABC *um triângulo e* X *um ponto do segmento* $\overline{AB}$. *Mostre que*

$$\overrightarrow{CX} = \frac{\|\overrightarrow{BX}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}\overrightarrow{CA} + \frac{\|\overrightarrow{AX}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}\overrightarrow{CB}.$$

Exercício 15. *Dado um triângulo* ABC, *seja* $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$. *Seja* X *um ponto do segmento de reta* $\overline{AB}$ *tal que o vetor* $\overrightarrow{CX}$ *é paralelo ao vetor* $\vec{u}$.

a) Exprima $\overrightarrow{CX}$ *como combinação linear do vetores* $\overrightarrow{CA}$ *e* $\overrightarrow{CB}$.

b) Calcule $\dfrac{\|\overrightarrow{AX}\|}{\|\overrightarrow{XB}\|}$.

Exercício 16. *Seja* E *uma base de* V^3. *Determine* $m \in \mathbb{R}$ *de modo que a sequência de vetores abaixo sejam l. d.*

a) $(m,1,m)_E$, $(1,m,1)_E$

b) $(1-m^2, 1-m, 0)_E$, $(m,m,m)_E$

Exercício 17. *Seja* $E = \{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$ *uma base de* V^3. *Suponha que* $F = \{\vec{f_1},\vec{f_2},\vec{f_3}\}$, *onde* $\vec{f_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$, $\vec{f_2} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$ *e* $\vec{f_3} = \vec{e_1}$ *seja uma base de* V^3. *Encontre as coordenadas de* $\vec{r} = -3\vec{e_1} - \vec{e_3}$ *em relação as bases* E *e* F.

Exercício 18. *Seja* $E = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ *uma base de* V^3, $\vec{f_1} = \vec{e_1} - \vec{e_2}$, $\vec{f_2} = \vec{e_2} - \vec{e_3}$ *e* $\vec{f_3} = 3\vec{e_3}$. *Suponha que* $F = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ *seja uma base de* V^3. *Calcule* m *para que os vetores* $\vec{u} = (0, m, 1)_E$ *e* $\vec{v} = (0, 1, -1)_F$ *sejam paralelos.*

Exercício 19. *Mostre que os vetores* $u = (1, 1)$ *e* $v = (-1, 1)$ *formam uma base de* $\mathbb{R}^2$. *Exprima cada um dos vetores* $e_1 = (1, 0)$ *e* $e_2 = (0, 1)$ *como combinação linear dos elementos dessa base.*

Exercício 20. *Mostre que os vetores*

$$\alpha_1 = (1, 0, -1), \alpha_2 = (1, 2, 1), \alpha_3 = (0, -3, 2)$$

formam um base de $\mathbb{R}^3$. *Escreva cada um dos vetores da base canônica* $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ *como combinação lineares* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Exercício 21. *Para quais valores de* a *o conjunto* $(a, 1, 0), (1, a, 1), (0, 1, a)$ *é base do* $\mathbb{R}^3$.

Exercício 22. *Explique por que os seguintes conjuntos de vetores não são bases dos espaços indicados (Faça este exercício por inspeção).*

a) $u_1 = (1, 2), u_2 = (0, 3), u_1 = (2, 7)$ *de* $\mathbb{R}^2$

b) $u_1 = (-1, 3, 2), u_2 = (6, 1, 1)$ *de* $\mathbb{R}^3$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ *de* M_{22}

Exercício 23. *Determine as coordenadas de* $x = (1, 0, 0)$ *em relação à base*

$$\beta = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 0), (1, 0, -1)\}.$$

Exercício 24. *Mostrar que os vetores*

$$\alpha_1 = (1, 1, 0, 0), \alpha_2 = (0, 0, 1, 1), \alpha_3 = (1, 0, 0, 4), \alpha_4 = (0, 0, 0, 2)$$

formam um base de $\mathbb{R}^4$. *Determinar as coordenadas de cada um dos vetores da base canônica em relação a base* $\beta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$.

Exercício 25. *Mostre que*

$$M_{22} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

é um espaço vetorial real e mostre que

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

formam uma base para este espaço.

Exercício 26. *Seja* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ *um plano do* $\mathbb{R}^3$ *passando pela origem. Mostre que* S *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$.

Exercício 27. *Descreva o espaço vetorial das soluções do seguinte sistema linear:*

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 5z + 3w = 0 \\ 4x + 4y + 10z + 3w = 0. \end{cases}$$

Exercício 28. *Seja* W_1 *o conjunto das matrizes da forma*

$$\begin{bmatrix} x & -x \\ y & z \end{bmatrix}$$

e seja W_2 *o conjunto das matrizes da forma*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -a & c \end{bmatrix}.$$

Mostre que W_1 *e* W_2 *são subespaços de* $V = M(2, 2)$.

Exercício 29. *Qual é o menor número de elementos em um conjunto gerador de* $\mathbb{C}^2$ *se o considerarmos como espaço vetorial sobre*

(a) $\mathbb{C}$;

(b) $\mathbb{R}$.

Exercício 30. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$.*

(a) Mostre que $0.v = 0$ para todo vetor $v \in V$ e que $\alpha.0 = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

(b) Mostre que se $\alpha.v = 0$, com $\alpha \in \mathbb{K}$ e $v \in V$, então ou $\alpha = 0$ ou $v = 0$.

Exercício 31. *Mostre que se $\mathcal{A}$ é um conjunto gerador de um espaço vetorial V e que se $\mathcal{B}$ é um conjunto que contém $\mathcal{A}$, então $\mathcal{B}$ é um conjunto gerador de V.*

Exercício 32. *Mostre que o conjunto $\{1, x^2, \ldots, x^n\}$ é uma base do $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathcal{P}^n(\mathbb{R})$. Esta base é chamada de base canônica de $\mathcal{P}^n(\mathbb{R})$.*

Exercício 33. *Seja V um espaço de dimensão $n \geq 1$. Mostre que:*

a) todo conjunto de vetores com mais do que n elementos é linearmente dependente.

b) nenhum conjunto com menos do que n elementos pode gerar V.

Exercício 34. *Mostre que o conjunto S das soluções do sistema linear homogêneo:*

$$\begin{cases} 5x + y + 2z - 3w = 0 \\ 6x + y - 3z + 2w = 0 \\ 3x + y + 12z - 13w = 0 \end{cases}$$

é um $\mathbb{R}-$espaço vetorial e exiba uma base de S.

Exercício 35. *Seja $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.*

(a) Mostre que $\mathcal{B} = \{1, 2 + x, 3x - x^2, x - x^3\}$ é base de V.

(b) Escreva as coordenadas de $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ com relação à base $\mathcal{B}$.

Exercício 36. *Verifique se S é um subespaço vetorial do espaço vetorial V sobre o corpo $\mathbb{R}$ em questão nos seguintes casos:*

a) $V = \mathbb{R}^n$ e $S = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \colon a_1 \cdot a_2 = 0\}$;

b) $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $S = \{f \in V \colon f(0) = f(1)\}$.

Exercício 37. *Sejam W_1 e W_2 subespaços de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V.*

a) Dê um exemplo mostrando que $W_1 \cup W_2$ pode não ser subespaço de V.

b) Prove que $W_1 \cup W_2$ é um subespaço de V se e somente se $W_1 \subseteq W_2$ ou $W_2 \subseteq W_1$.

Exercício 38. *Sejam E, F espaços vetoriais. Uma função $f: E \to F$ é dita*

- ***par**: quando $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in E$;*
- ***ímpar**: quando $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in E$.*

Prove que o conjunto $\mathcal{A}_1$ das funções pares e o conjunto $\mathcal{A}_2$ das funções ímpares são subespaços vetoriais de $\mathcal{F}(E, F)$.

Exercício 39. *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $S \subseteq V$ um subconjunto não vazio de V. Mostre que S é um subespaço de V se e somente se $S + S \subseteq S$ e $\lambda S \subseteq S$ para cada $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Exercício 40. *Verifique (justificando) se os polinômios*

$$p(x) = 1 - x, \quad q(x) = 5 + 3x - 2x^2 \quad e \quad r(x) = 1 + 3x - x^2$$

são LI ou LD. Caso forem LD, escreva um deles como combinação linear dos outros.