SME301 - Métodos Numéricos para Engenharia I - Lista 1

1. (a) Deduza a conversão de um número fracionário F_0 da base 10 para a base 2 e dê um exemplo numérico.

(b) Represente, em APFN (aritmética de ponto flutuante normalizada), o número $x = \frac{9}{1100}$ por: **truncamento** e **arredondamento**. Utilize 6 algarismos para representar a mantissa.

2. Seja $I = [-2, 2]$ um intervalo fechado da reta e f uma função real tal que $f(x) = 2\ln(x^2+0.1) - x^2 + 1$. Divida I em intervalos fechados da forma $[x_i, x_{i+1}]$ (com $x_i = 0.5\,i$, $i = -4, -3, ..., 2, 3$) e identifique quatro desses intervalos com a propriedade de terem **exatamente** um zero de $f(x)$.

Dica: utilize o Teorema do Valor Intermediário do cálculo diferencial para funções contínuas e a análise dos zeros da derivada da função em cada um dos subintervalos.

3. Aplique o método da bissecção com 4 iterações no intervalo $[1.5, 2]$ para encontrar um dos zeros da função definida no exercício 2. Qual é a precisão dessa aproximação?

4. Descreva sucintamente cada um dos passos do método de iteração do ponto fixo para a obtenção de uma determinada raíz de uma função real $f(x)$. Tome como premissa a existência de um único zero $\xi \in [a, b]$ da função $f(x)$, isto é, $f(\xi) = 0$.

5. Seja $I = [0.4, 0.6]$ e $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função não-linear tal que $f(x) = x + 2x\,sen(x) - 1$. (a) Mostre que:

$$\varphi_1(x) = -2x\,sen(x) + 1 \quad \text{e} \quad \varphi_2(x) = \frac{1}{(1 + 2\,sen(x))}$$

são duas funções de iteração de f para o método iterativo do ponto fixo.

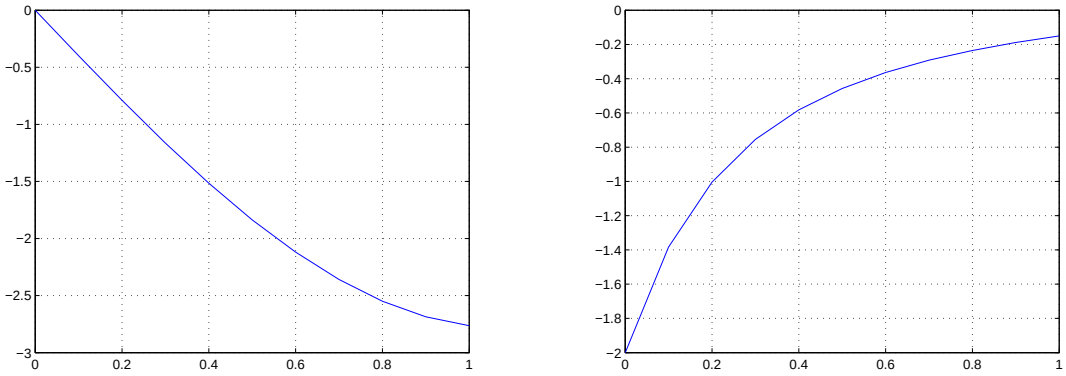
(b) Podemos garantir a convergência do método do ponto fixo para ambas as funções de iteração? Justifique, com base nos gráficos da Figura 1 e dos dados no final do exercício, a sua resposta.

(c) Com base na resposta apresentada em (b), faça 5 iterações com o método do ponto fixo (tome $x_0 = 0.55$ como aproximação inicial) e obtenha uma aproximação para a raíz de $f(x)$ em I.

Dados: $\varphi_1(I) = [0.32243, 0.68846]$ e $\varphi_2(I) = [0.46964, 0.56216]$.

6. Usando a malha $x_i = 0.5\,i$, $i = 0, 1, 2, 3$, para gerar os intervalos $[x_i, x_{i+1}]$:

(a) localize dois zeros positivos ξ_1 e ξ_2 ($\xi_1 < \xi_2$) da função não-linear $f(x) = sen(e^x)$ nos intervalos gerados.



(a) (b)

Figura 1: Gráfico de derivadas definidas no intervalo $[0, 1]$ para o exercício 5. (a) $\varphi_1'(x)$ e (b) $\varphi_2'(x)$.

(b) aplique o método de Newton-Raphson para refinar o primeiro zero ξ_1, até obter a precisão $\varepsilon = 10^{-2}$, partindo do extremo mais próximo de ξ_1.

7. Dado o sistema de equações:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 \\ x_2^2 - 9 = -x_1^2 \end{cases}$$

(a) Converta o sistema acima na forma vetorial de modo que o método de Newton para sistemas possa ser aplicado.

(b) Calcule a matriz Jacobiana associada ao equacionamento do ítem (b).

(c) Faça 3 iterações com o método de Newton tomando $x_0 = (x_1, x_2)^T = (1.0, 5.0)^T$ como aproximação inicial. Estime o erro relativo em cada uma das iterações.