

**Lista 7 - Funções de Variáveis Complexas**

**Exercício 1** Obtenha os desenvolvimentos em séries de potências, conforme especificação em cada caso. Determine os respectivos discos de convergência e represente-os graficamente.

a)  $f(z) = \frac{1}{z}$  em potências de de  $z + i$ .

b)  $f(z) = \frac{i}{z + i}$  em potências de de  $z - 1$ .

c)  $f(z) = \frac{1}{2z - 3}$  em potências de  $z + i$ .

**Exercício 2** Determine os raios de convergência das séries dadas:

a)  $\sum_{n=0}^{+\infty} nz^n$     b)  $\sum_{n=0}^{+\infty} n!z^n$     c)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - i)^n}{n!}$     d)  $\sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{n})^n z^n$     e)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(3n^2 + 5)(z + i)^n$

**Exercício 3** Mostre que:

a)  $\operatorname{sen}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$ ,  $|z| < \infty$ .

b)  $\operatorname{sec}(z) = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{5z^4}{24} + \dots$ ,  $|z| < \frac{\pi}{2}$ .

c)  $\ln(1 + z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$ ,  $|z| < \infty$ .

d)  $\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2z^{2n+1}}{2n+1}$ ,  $|z| < 1$ .

**Exercício 4** Desenvolva  $f(z) = \operatorname{sen}(z)$  numa série de Taylor em torno de  $z = \pi/4$ .

**Exercício 5** Desenvolva  $f(z) = \ln(3 - iz)$  em série de potências de  $z - 2i$ , escolhendo o ramo do logaritmo para o qual  $f(0) = \ln 3$ . Determine o domínio de convergência.

**Exercício 6** Desenvolva em séries de potências de  $z$ :

a)  $f(z) = \arccos(z)$ , fixando a condição  $\arccos(0) = 1$ .

b)  $f(z) = \arctan(z)$ , fixando a condição  $\arctan(0) = 0$ .

**Gabarito**

**Exercício 1** a)  $\frac{1}{z} = i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z + i)^n}{i^n}$  e o disco de convergência é  $|z + i| < 1$ .

b)  $\frac{i}{z + i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n i \frac{(z - 1)^n}{(i + 1)^{n+1}}$  e o disco de convergência é  $|z - 1| < \sqrt{2}$ .

c)  $\frac{1}{2z - 3} = - \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \frac{(z + i)^n}{(3 + 2i)^{n+1}}$  e o disco de convergência é  $|z + i| < \frac{\sqrt{13}}{2}$ .

**Exercício 2** a)  $r = 1$     b)  $r = 0$     c)  $r = \infty$     d)  $r = 0$     e)  $r = 1$ .

**Exercício 4**  $f(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ 1 + \left( z - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{(z - \pi/4)^2}{2!} - \frac{(z - \pi/4)^3}{3!} + \dots \right\}$ .

**Exercício 5**  $\ln 5 - \frac{i(z - 2i)}{5} + \frac{(z - 2i)^2}{2 \cdot 5^2} + \frac{i(z - 2i)^3}{3 \cdot 5^3} - \frac{(z - 2i)^4}{4 \cdot 5^4} - \dots$ . O domínio de convergência é  $|z - 2i| < 5$ .

**Exercício 6** a)

b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{2n-1}, |z| < 1$ .