

GERALDO ÁVILA

VARIÁVEIS
Complexas
e aplicações

3ª edição



LTC

Variáveis Complexas e Aplicações

Terceira edição

Geraldo Ávila

CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO-NA-FONTE
SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS. RJ.

A972v
3.ed.

Ávila, Geraldo, 1933-
Variáveis complexas e aplicações / Geraldo Ávila. - 3.ed. - Rio de Janeiro : LTC, 2008.
2024p.

Inclui bibliografia e índice
ISBN 978-85-216-1217-9

1. Funções de variáveis complexas. I. Título.

08-3559.

CDL: 515.9

CDU: 517.55

Prefácio

Muitas das atuais teorias matemáticas surgiram da Ciência Aplicada, e só depois adquiriram aquele aspecto axiomático e abstrato que tanto dificulta o seu aprendizado.

V. I. Arnold

A teoria das funções de uma variável complexa é uma extensão natural da teoria das funções reais, e é de importância fundamental, tanto em matemática pura como nas aplicações. Trata-se, pois, de disciplina mandatória nos currículos de matemática, física e diversos ramos da engenharia, sobretudo eletrônica e aeronáutica.

O presente livro foi escrito com vistas a atender às necessidades dos estudantes desses vários cursos. Os pré-requisitos são mínimos: apenas um curso de cálculo, cobrindo derivadas e integrais, seqüências e séries infinitas. O pouco que se requer de derivadas parciais, integrais de linha e integrais duplas pode ser suprido num curso concomitante de cálculo de várias variáveis.

A ênfase da exposição está no desenvolvimento dos métodos e técnicas da teoria. O formalismo e o rigor são reduzidos a um mínimo, como convém num primeiro curso, para facilitar o aprendizado, decorrência natural do que diz Arnold, eminente matemático russo da atualidade.

Insistimos em que o texto é apropriado tanto a matemáticos aplicados, físicos e engenheiros, como a estudantes que pretendam se dedicar à matemática em si, como carreira de ensino ou pesquisa. De fato, as necessidades de todos esses alunos são as mesmas: eles precisam adquirir familiaridade com a fórmula de Cauchy e suas conseqüências, com as séries de Taylor e de Laurent, com o cálculo de resíduos e aplicações. Só depois é que estarão preparados para apreciar devidamente um tratamento rigoroso do teorema de Cauchy-Goursat ou estudar tópicos especiais da teoria.

Os cinco primeiros capítulos cabem muito bem num curso de um semestre. O Capítulo 5, sobre singularidades isoladas e cálculo de resíduos, completa o que pode ser considerado conteúdo mínimo de um curso introdutório.

O Capítulo 7 versa sobre dinâmica dos fluidos e aerodinâmica, e é independente do Capítulo 6, sobre continuação analítica. Sem nos estendermos muito num assunto que pode rapidamente tornar-se bastante técnico, logramos, todavia, chegar às idéias centrais da teoria de Kutta-

Joukovski, apresentando, inclusive, o cálculo da força de levantamento que se exerce numa asa de avião. O tratamento que fazemos é direto e completo, abordando uma aplicação de largo alcance e que certamente há de interessar ao leitor curioso.

No Capítulo 6 apresentamos os resultados mais importantes sobre continuação analítica, noções elementares das superfícies de Riemann e propriedades da função gama. O Capítulo 8 é dedicado à representação conforme, com algumas aplicações à teoria do potencial e à eletrostática. Aqui o leitor verá que várias passagens do Capítulo 7 são exemplos de representação conforme; e que esses tópicos puderam ser apresentados nesse capítulo sem necessidade de desenvolver toda a teoria da representação conforme.

Escrito primeiramente em 1974, o livro teve uma segunda edição em 1990, e agora esta terceira edição, com a maior revisão feita, o maior acréscimo de matéria nova, tanto exemplos e exercícios como os tópicos dos Capítulos 6 e 8.

Queremos, por fim, agradecer aos dirigentes e aos dedicados funcionários da LTC Editora pelo continuado interesse e apoio ao nosso trabalho.

Geraldo Ávila
Brasília, janeiro de 2000

Sobre o Autor

Geraldo Severo de Souza Ávila foi professor no Instituto Tecnológico de Aeronáutica, no Instituto de Física Teórica de São Paulo (UNESP), nas Universidades de Wisconsin, Georgetown (em Washington, D. C.), Brasília, na Unicamp e na Universidade Federal de Goiás. Bacharel e licenciado em Matemática pela USP, mestre e doutor pela Universidade de Nova York (NYU), é membro titular da Academia Brasileira de Ciências e da Academia de Ciências do Estado de São Paulo. Foi presidente da Sociedade Brasileira de Matemática por dois anos. É autor de vários trabalhos de pesquisa e monografias especializadas na área de equações diferenciais parciais e propagação ondulatória, além de textos universitários e artigos de ensino e divulgação.

Sumário

CAPÍTULO 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Necessidade dos números complexos	1
Números complexos	2
Os reais como subcorpo dos complexos	3
O plano complexo	4
Módulo e complexo conjugado	6
Exercícios	7
Representação polar	8
Fórmulas do produto e do quociente	9
Fórmula de De Moivre	11
Exercícios	11
Respostas e sugestões	12
Propriedades do valor absoluto	13
Exercícios	15
Raízes n -ésimas	15
Raízes da unidade	16
Raízes primitivas	18
Exercícios	19
Respostas, sugestões e soluções	20
A exponencial	21
Propriedades da exponencial	22
Exercícios	24
Respostas, sugestões e soluções	25
Conjuntos de pontos no plano	26
Exercícios	31
Respostas e sugestões	33

CAPÍTULO 2

FUNÇÕES ANALÍTICAS

Funções de variável complexa	34
Exercícios	36
Limite e continuidade	36
Exercícios	42
Sugestões	43
Propriedades do limite	44
Exercícios	47

Sugestões e soluções	48
Função analítica	49
Regras de derivação	51
Exercícios	52
Sugestões	53
As equações de Cauchy-Riemann	53
Condição necessária e suficiente	55
Cauchy-Riemann em coordenadas polares	57
Interpretação geométrica	59
A função exponencial	61
Exercícios	62
As funções trigonométricas e hiperbólicas	63
Exercícios	64
O logaritmo	65
O logaritmo como transformação e sua inversa	67
Propriedades do logaritmo	69
Definição de z^a	70
As funções trigonométricas inversas	72
Exercícios	73
Respostas e sugestões	74

CAPÍTULO 3

TEORIA DA INTEGRAL

Arcos e contornos	75
Teorema de Jordan e conectividade simples	77
Arco regular e contornos	78
Exercícios	79
Integral de contorno	79
Integral curvilínea ou de contorno	81
Invariância da integral	81
Propriedades da integral	82
Exercícios	86
Respostas e sugestões	88
Teorema de Cauchy	89
Teorema de Green	89
Teorema de Cauchy	91
Integrais de contorno e primitivas	93
Exercícios	99
Sugestões	101
Fórmula integral de Cauchy	101
Derivadas de todas as ordens	103
Exercícios	107
Respostas e sugestões	109
Funções harmônicas	109
Função harmônica determina função analítica	111
Regiões multiplamente conexas	112
Princípio do módulo máximo	113
Problemas de Dirichlet e de Neumann	114
Exercícios	116
Respostas	117

CAPÍTULO 4

SÉRIES DE POTÊNCIAS

Séries de funções complexas	118
Convergência simples ou pontual	119
Convergência uniforme	120
Exercícios	125
Sugestões	127
Séries de potências	127
Exercícios	132
Respostas e sugestões	132
Séries de potências, série de Taylor	133
Exemplos de séries de potências	136
Produto e quociente de séries de potências	138
Exercícios	142
Sugestões	144
Série de Laurent	144
Regularidade no infinito	147
Zeros de funções analíticas	147
Exercícios	149

CAPÍTULO 5

SINGULARIDADES E RESÍDUOS

Singularidades isoladas	151
Singularidades removíveis	152
Singularidades do tipo pólo	153
Singularidades essenciais	154
Exercícios	156
Respostas	157
Teorema do resíduo	157
Exercícios	160
Respostas e sugestões	161
Integrais impróprias de funções racionais	161
Exercícios	163
Respostas e sugestões	164
Lema de Jordan	164
Exercícios	168
Respostas e sugestões	169
Integrandos multivalentes	169
Exercícios	173
Integrais envolvendo funções trigonométricas	173
Exercícios	174
Resíduos logarítmicos e princípio do argumento	175
Exercícios	178

CAPÍTULO 6

CONTINUAÇÃO ANALÍTICA

Primeiras conseqüências	181
Permanência das relações funcionais	

Continuação analítica por reflexão	183
Exercícios	185
Respostas e sugestões	186
Continuação analítica e singularidades	187
Singularidades	189
Continuação analítica por cadeias	192
Superfícies de Riemann	193
Exercícios	197
Funções analíticas definidas por integrais	198
A função gama	200
Continuação analítica a todo o plano	201
Exercícios	202

CAPÍTULO 7

APLICAÇÕES À DINÂMICA DOS FLUIDOS

Os movimentos fluidos a considerar	204
Conservação da massa	205
Escoamentos irrotacionais	209
As funções potenciais	210
Exemplos básicos	212
Exercícios	215
Fontes, sumidouros e vórtices	215
Exercícios	220
Escoamento em volta de um cilindro circular	221
Exercícios	225
Escoamento em volta de um cilindro qualquer	225
A dinâmica do movimento	226
Força sobre um cilindro e fórmula de Blasius	229
Fórmula de Kutta-Joukowski	231
A transformação de Möbius	232
Exercícios	234
Sugestões	235
A transformação de Joukowski	235
O potencial complexo apropriado ao perfil de Joukowski	238
Os paradoxos da teoria	242

CAPÍTULO 8

REPRESENTAÇÃO CONFORME E APLICAÇÕES

Considerações preliminares	245
Representação conforme	245
Invariância da equação de Laplace	248
Exercícios	248
Inversão local e inversão global	249
Inversão global	251
Exercícios	253
A transformação de Möbius	253
A razão cruzada	256
Exercícios	259

Potencial eletrostático	260
Os potenciais escalares	261
A transformação $w = z + e^z$	262
O condensador de placas paralelas	263
Exercícios	265
Referências e Bibliografia	267
Índice Alfabético	269

NÚMEROS COMPLEXOS

NECESSIDADE DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Os números complexos são comumente estudados nos cursos de Álgebra, ou em cursos que tratam das construções numéricas, aí incluídos os números inteiros, racionais e reais. Vamos fazer aqui uma apresentação desses números, mais do ponto de vista prático, sem maiores preocupações com os detalhes da teoria.

Como se sabe, as raízes de uma equação do 2º grau.

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

são dadas pela conhecida fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Obtemos, efetivamente, duas raízes, quando o discriminante $b^2 - 4ac$ é positivo e apenas uma se ele for nulo.

Quando o discriminante é negativo, a fórmula acima não conduz a nenhuma raiz real. Neste caso, o trinômio $ax^2 + bx + c$ é sempre diferente de zero, qualquer que seja o valor real que se atribua a x . Por exemplo, se tentarmos resolver a equação

$$x^2 - 6x + 13 = 0,$$

somos levados a

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2}.$$

que não representa número real algum. No entanto, se operarmos formalmente, como se $\sqrt{-1}$ fosse um número, obteremos:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{16 - 1}}{2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{-1},$$

ou seja, $x' = 3 + 2\sqrt{-1}$ e $x'' = 3 - 2\sqrt{-1}$. Vamos substituir esses "números" na equação original para verificar se eles são realmente raízes. Ao fazermos isto, devemos tratar o símbolo $\sqrt{-1}$ como se ele fosse mesmo um número; em particular, seu quadrado deve ser -1 : $(\sqrt{-1})^2 = -1$. Teremos:

$$\begin{aligned}(x')^2 - 6x' + 13 &= (3 + 2\sqrt{-1})^2 - 6(3 + 2\sqrt{-1}) + 13 \\ &= 9 + 12\sqrt{-1} - 4(-1) - 18 - 12\sqrt{-1} + 13 = 0.\end{aligned}$$

Do mesmo modo, verificamos que x'' também é raiz.

Números complexos

Dessas considerações segue-se que é possível resolver a equação do 2º grau mesmo no caso em que $b^2 - 4ac < 0$, se operarmos com o símbolo $i = \sqrt{-1}$ como se fosse um número¹. Ele deve ter a propriedade de que $i^2 = -1$ e deve operar ao lado dos números reais com as mesmas leis formais que regem estes números. Somos assim levados a introduzir os *números complexos* como sendo os números da forma $a + bi$, como

$$3 + 5i, \quad \frac{2}{3} - 2i, \quad \sqrt{2} + \frac{5}{2}i, \quad -3 - \frac{2}{\sqrt{5}}i.$$

O novo elemento $i = \sqrt{-1}$ é chamado *unidade imaginária*; a é chamado de *parte real* e b de *parte imaginária* do número complexo $a + bi$.

¹Na verdade, a motivação maior para a aceitação dos números complexos ocorreu no século XVI, quando os matemáticos descobriram a fórmula geral de resolução de equações do 3º grau. Aplicada à equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, essa fórmula se reduz a

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} - \sqrt[3]{-2 + 11\sqrt{-1}}.$$

Sabendo que $x = 4$ é raiz, percebeu-se que as raízes cúbicas aí indicadas devem ser $(2 + \sqrt{-1})$ e $(-2 + \sqrt{-1})$, respectivamente, o que se comprova elevando-as ao cubo e operando formalmente. Como tal procedimento permitia obter a raiz $x = 4$ pela fórmula, ficou evidente que tal interpretação deveria ser aceita. Portanto, os números complexos entraram na Matemática pela equação do 3º grau, não do 2º.

Vemos assim que, ao introduzirmos os números complexos, devemos definir adição e multiplicação de maneira que permaneçam válidas as propriedades associativa, comutativa e distributiva que essas operações possuem quando referidas aos números reais. Assim, os números complexos ficam determinados pelas seguintes regras:

$$i^2 = -1; \quad ai = ia;$$

$$a + bi = c + di \text{ significa } a = c, b = d;$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

O leitor deve notar que a definição de multiplicação é motivada pelo que obteríamos operando formalmente, assim:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bic - bidi = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Vejamos alguns exemplos de operações com números complexos:

$$(-5 + 7i) + (3 - 12i) = -2 - 5i;$$

$$(1 - 5i)(3 - 2i) = (3 + 10) + (2 - 15)i = 13 - 13i = 13(1 - i);$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{18}} - i\sqrt{50} \right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} - i\sqrt{100} = \frac{1}{3} - 10i.$$

A *subtração* de números complexos é definida em termos da adição e do oposto de um número. O *oposto* de $z = x + iy$ é o número $-z = (-x) - i(-y)$. Dados então $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, definimos:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Os reais como subcorpo dos complexos

Observe que os números complexos da forma $a + i0$ se comportam, com relação à adição e à multiplicação, do mesmo modo que os números reais a ; em outras palavras, fazendo corresponder o número complexo $a - i0$ ao número real a , então a soma $a + b$ corresponderá $(a + b) + i0$, que é o mesmo que $(a + i0) + (b + i0)$; e ao produto ab corresponderá $ab + i0$, que é o

mesmo que $(a + i0)(b + i0)$. Isso quer dizer que somar e multiplicar números reais equivale, pela correspondência $a \mapsto a + i0$, a somar e multiplicar, respectivamente, os números complexos correspondentes, o que nos permite identificar o número real a com o número complexo $a + i0$, já que, do ponto de vista da adição e da multiplicação, seu comportamento é o mesmo. Deste modo, os números complexos se apresentam como uma extensão natural dos números reais.

O plano complexo

Dado o número complexo $z = x + iy$, sua *parte real* x é denotada por $\operatorname{Re} z$, e sua *parte imaginária* y , por $\operatorname{Im} z$. O *plano complexo* é o conjunto das representações de todos os números complexos $z = x + iy$ pelos pontos $P = (x, y)$ do plano. É conveniente identificar o número complexo $z = x + iy$ com o ponto $P = (x, y)$, o que é possível através das seguintes definições:

$$(a, b) = (c, d) \text{ significa } a = c, b = d;$$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d);$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

É fácil ver então que $a = (a, 0)$ e $i = (0, 1)$.

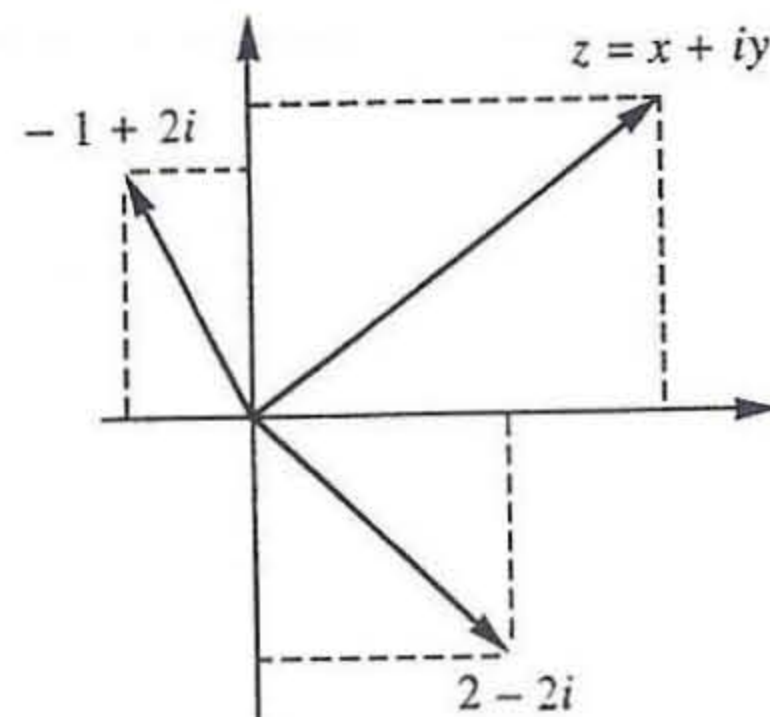


Fig. 1.1

A representação dos números complexos por pontos do plano é muito útil e de uso freqüente. Por meio dela, o número complexo $z = x + iy$ é identificado com o ponto (x, y) , ou com o vetor Oz de componentes x e y (Fig. 1.1). As conhecidas regras do paralelogramo para a soma e subtração de vetores se aplicam, então, no caso de soma e subtração de números complexos (Figs. 1.2 e 1.3).

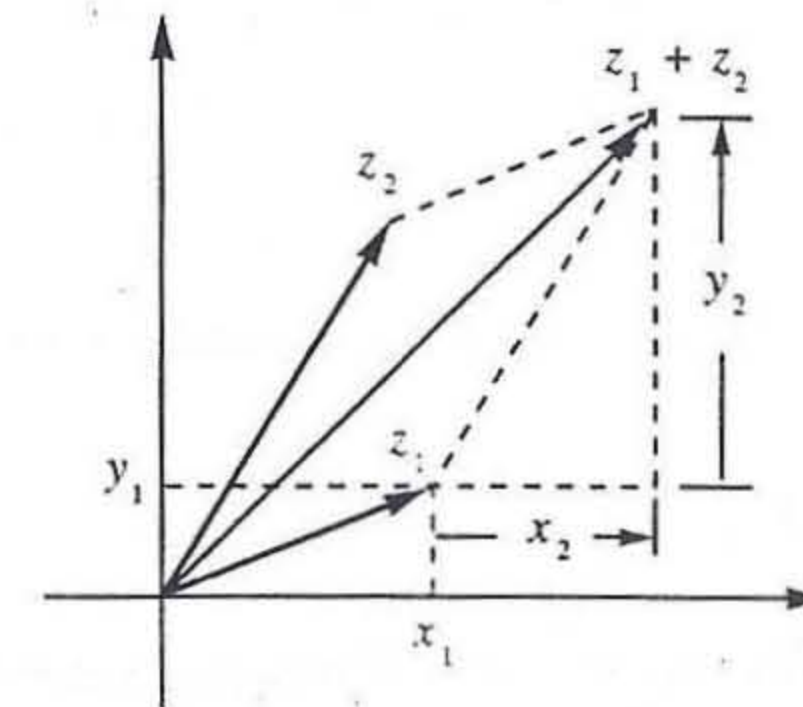


Fig. 1.2

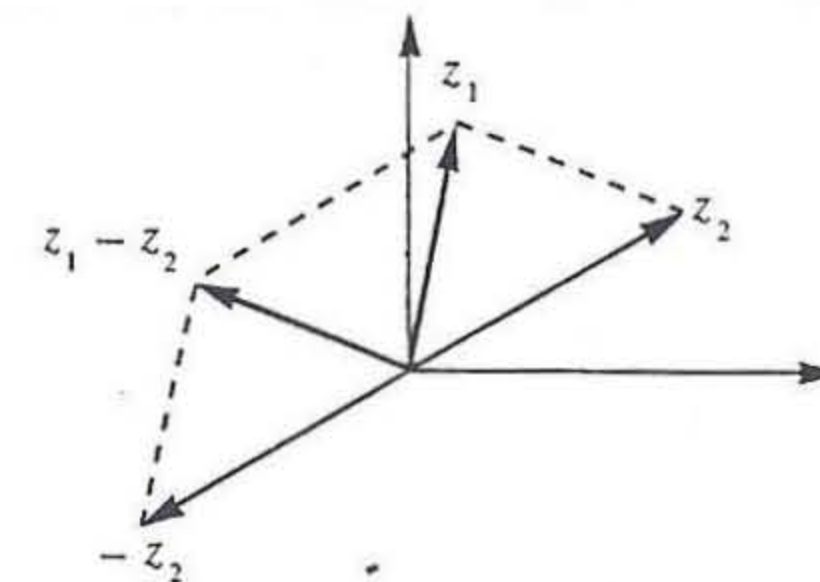


Fig. 1.3

Módulo e complexo conjugado

Definimos o *módulo*, *valor absoluto* ou *norma* de um número complexo $z = x + iy$ como sendo o número não-negativo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Como se vê, ele é a distância do ponto z à origem.

O *complexo conjugado* de $z = x + iy$ é definido como sendo $\bar{z} = x - iy$. A Fig. 1.4 ilustra exemplos de complexos conjugados.

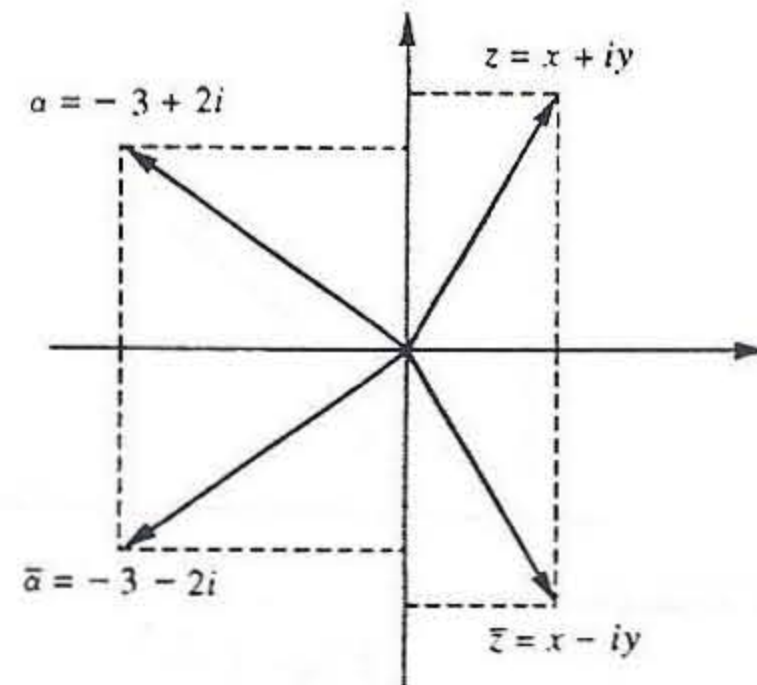


Fig. 1.4

Em termos do módulo e do conjugado, temos:

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = (x^2 + y^2) + i(-xy + yx) = x^2 + y^2,$$

isto é, $z\bar{z} = |z|^2$. Esta propriedade permite calcular o *quociente* $z = z_1/z_2$ de dois números complexos z_1 e z_2 , $z_2 \neq 0$, que é definido pela condição $zz_2 = z_1$. Para isso, basta multiplicar o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador. Exemplos:

$$\frac{-3 + i}{1 - 2i} = \frac{(-3 + i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{-5 - 5i}{1^2 + 2^2} = -1 - i.$$

Em geral, com $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Deixamos ao leitor a tarefa de provar as seguintes propriedades:

$$|z| = |\bar{z}|; \quad \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}; \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i};$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2; \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2; \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

Esta última segue da penúltima e da definição de quociente:

$$z z_2 = z_1; \quad \text{logo, } \bar{z} \bar{z}_2 = \bar{z}_1, \quad \text{donde } \bar{z} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

EXERCÍCIOS

Reduza à forma $a + bi$ cada uma das expressões dadas nos Exercs 1 a 11.

1. $(3 + 5i) + (-2 + i)$. 2. $(-3 + 4i) - (1 - 2i)$. 3. $(\sqrt{3} - i) - i[2 - i(\sqrt{3} - 4)]$

4. $(3 - 5i)(-2 - 4i)$. 5. $(1 + \frac{i}{3})(-\frac{6}{5} + 3i)$. 6. $(3i - i)(\frac{1}{3} + \frac{i}{2})$.

7. $7 - 2i(2 - \frac{2i}{5})$. 8. $(2 + 3i)^2$. 9. $(4 - 2i)^2$.

10. $(1 + i)^3$. 11. $1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + 5i^4 - 6i^5$.

12. Mostre que $\sum_{n=0}^N i^n = 1, 1 - i, i$ ou zero, conforme o resto da divisão de N por 4 seja zero, 1, 2 ou 3, respectivamente.

13. Mostre que $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.

14. Mostre que $(x - iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$.

15. Mostre que $(x + iy)^2(x - iy)^2 = (x^2 + y^2)^2$.

16. Mostre que $(x + iy)^n(x - iy)^n = (x^2 + y^2)^n$.

Reduza à forma $a + bi$ cada uma das expressões dadas nos Exercs. 17 a 27.

17. $\frac{1}{2 + 3i}$. 18. $\frac{1}{4 - 3i}$. 19. $\frac{1 - i}{3 - 2i}$. 20. $\frac{3 - i}{2i - 1}$.

21. $\frac{1 - i}{1 + i}$. 22. $\frac{1 - i}{1 - i}$. 23. $\frac{4 - 3i}{i - 1}$. 24. $\frac{1 - i}{\sqrt{2} - i}$.

25. $\frac{1}{(1 + i)^2}$. 26. $\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^{30}$. 27. $(1 - i)(\sqrt{3} + i)$.

Nos Exercs. 28 a 32, represente graficamente os números complexos z_1 , z_2 , $z_1 z_2$ e z_1/z_2 .

$$28. z_1 = 3 + 4i, z_2 = \frac{1-i}{5\sqrt{2}} \quad 29. z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, z_2 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

$$30. z_1 = \frac{1+i}{2\sqrt{2}}, z_2 = 1+i\sqrt{3} \quad 31. z_1 = 1+2i, z_2 = 2-i$$

$$32. z_1 = 3-i, z_2 = 3-i/2$$

$$33. \text{Mostre que } \operatorname{Re}[-i(2-3i)^2] = -12.$$

$$34. \text{Mostre que } \frac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{2}+i} = -i.$$

$$35. \text{Mostre que } \operatorname{Im}\left[\frac{1-i\sqrt{3}^2}{i-2}\right] = \frac{2(1+2\sqrt{3})}{5}.$$

$$36. \text{Mostre que } \frac{1+i \operatorname{tg} \theta}{1-i \operatorname{tg} \theta} = \cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta.$$

37. Dados dois números complexos α e β , prove que

$$|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2.$$

Faça um gráfico e obtenha a seguinte interpretação geométrica: a soma dos quadrados dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados das diagonais.

38. Dados três vértices de um paralelogramo pelos números complexos z_1 , z_2 e z_3 , determine o vértice z_4 oposto a z_2 . Faça um gráfico.

39. Prove que o produto de dois números complexos é zero se e somente se um dos fatores se anula.

40. O Teorema Fundamental da Álgebra afirma que todo polinômio com coeficientes complexos possui uma raiz (real ou complexa). Prove, como corolário, que todo polinômio $P(x)$ de grau n possui n raízes, contadas as multiplicidades; e sendo $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ essas raízes, então $P(x)$ se escreve $P(x) = a(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$. Prove também que se o polinômio tem coeficientes reais, e se α é uma raiz complexa, então $\bar{\alpha}$ também é raiz.

REPRESENTAÇÃO POLAR

Considerando a representação geométrica de um número complexo $z \neq 0$, chama-se *argumento* de z o ângulo θ formado pelo eixo Ox e o vetor Oz (Fig.

1.5). Como em Trigonometria, os ângulos são aqui orientados: consideramos positivo o sentido de percurso oposto ao dos ponteiros do relógio.

O argumento de z só pode ser definido quando $z \neq 0$; mesmo nesta hipótese, o argumento só fica determinado a menos de múltiplos inteiros de 2π . Como $x = |z| \cos \theta$ e $y = |z| \operatorname{sen} \theta$, temos a seguinte representação de z , conhecida como *representação polar* ou *representação trigonométrica*:

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta), \quad r = |z|;$$

r e θ são designados as *coordenadas polares* de z .

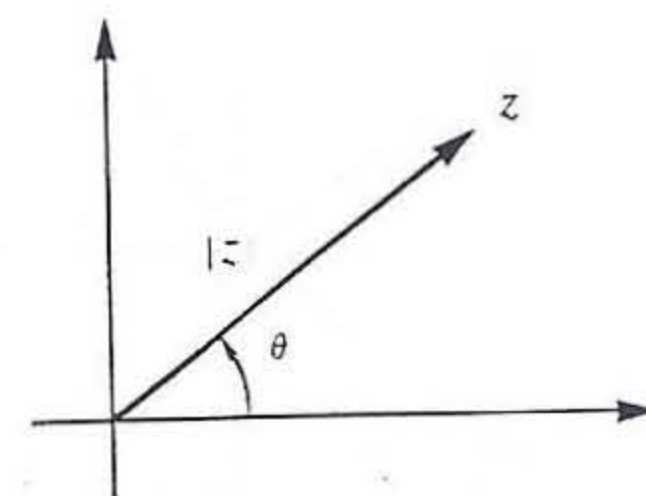


Fig. 1.5

Fórmulas do produto e do quociente

De posse da representação polar, vamos deduzir uma regra muito conveniente para a multiplicação. Sejam

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$$

dois números complexos quaisquer. Então,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)], \end{aligned}$$

isto é,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i(\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2))].$$

Vemos assim que o produto de dois números complexos é o número cujo módulo é o produto dos módulos dos fatores e cujo argumento é a soma dos

argumentos dos fatores (Fig. 1.6). Observe que os triângulos de vértices $0, 1, z_1$ e $0, z_2, z_1 z_2$ são semelhantes, o que facilita a construção do produto $z_1 z_2$ a partir dos dados $0, 1, z_2$.

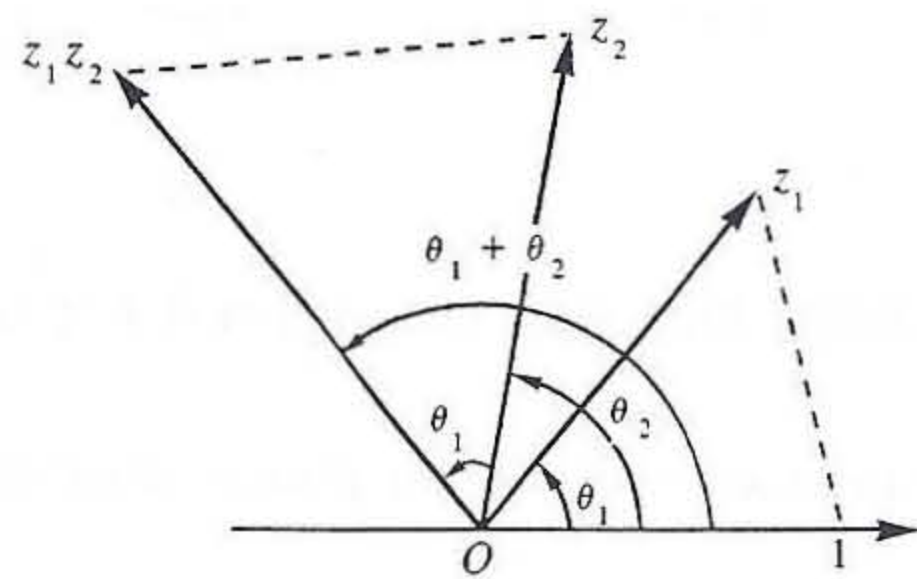


Fig. 1.6

Vamos deduzir resultado análogo para a divisão. Como

$$\frac{1}{\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta} = \frac{\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta}{(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)} = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta,$$

temos:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1}{\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)(\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2) \\ &= \frac{r_1}{r_2} [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)],$$

isto é, para dividir números complexos basta fazer o quociente dos módulos e a diferença dos argumentos (Fig. 1.7). Também aqui, como no caso do produto, a construção do quociente é facilitada pela semelhança dos triângulos de vértices $0, 1, z_1/z_2$ e $0, z_2, z_1$.

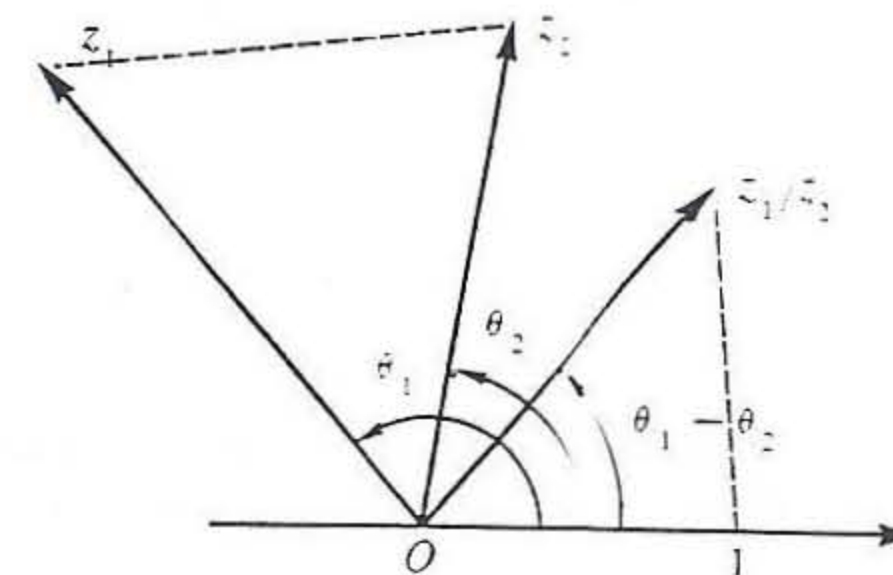


Fig. 1.7

Fórmula de De Moivre

A fórmula de multiplicação acima estende-se para um número qualquer de fatores. Sendo

$$z_j = r_j (\cos \theta_j + i \operatorname{sen} \theta_j), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

teremos:

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)].$$

A demonstração deste fato é simples e fica a cargo do leitor. Em particular, quando todos os fatores são iguais e de módulo unitário, obtemos a fórmula seguinte, chamada *fórmula de De Moivre*.

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta.$$

Esta fórmula é válida também para expoentes negativos. De fato,

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{-n} &= \frac{1}{(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n} = \frac{1}{\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta} \\ &= \cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta = \cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta). \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS

Nos Exercs. 1 a 12, determine o argumento dos números complexos dados, escreva esses números na forma polar e represente-os geometricamente.

- | | | |
|--|----------------------------------|-------------------------|
| 1. $z = -2 + 2i.$ | 2. $z = 1 + i\sqrt{3}.$ | 3. $z = -\sqrt{3} + i.$ |
| 4. $z = \left(\frac{i}{1+i}\right)^5.$ | 5. $z = \frac{1}{-1-i\sqrt{3}}.$ | 6. $z = -1 - i.$ |
| 7. $z = \frac{-3+3i}{1+i\sqrt{3}}.$ | 8. $z = \frac{-4}{\sqrt{3}-i}.$ | 9. $z = 1 + 2i.$ |
| 10. $z = -1 + 3i.$ | 11. $z = -3 - 2i.$ | 12. $z = 4 - i.$ |

Nos Exercs. 13 a 18, reduza os números z_1 e z_2 à forma polar e determine as formas polares de $z_1 z_2$ e z_1/z_2 . Represente esses quatro números num gráfico.

- | | |
|---|---|
| 13. $z_1 = \sqrt{3} + 3i, z_2 = \frac{3-i\sqrt{3}}{2}.$ | 14. $z_1 = 1 + i, z_2 = \sqrt{3} + i.$ |
| 15. $z_1 = 1 - i, z_2 = -1 + i\sqrt{3}.$ | 16. $z_1 = -1 - i, z_2 = -1 - i\sqrt{3}.$ |
| 17. $z_1 = 1 + 2i, z_2 = 2 + i.$ | 18. $z_1 = 1 - i, z_2 = -1 + 2i.$ |
19. Prove que se $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ e $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, então z_1, z_2 e z_3 são os vértices de um triângulo equilátero inscrito no círculo unitário de centro na origem. Faça um gráfico.
20. Prove que

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta \quad \text{e} \quad \sin 3\theta = -\sin^3 \theta + 3 \cos^2 \theta \sin \theta.$$

21. Obtenha fórmulas análogas às do exercício anterior para $\cos 4\theta$ e $\sin 4\theta$.
22. Prove, de um modo geral, que

$$\begin{aligned} \cos n\theta &= \cos^n \theta - \frac{n(n-1)}{2} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \dots \\ &= P(\cos \theta, \sin \theta), \\ \sin n\theta &= n \cos^{n-1} \theta \sin \theta - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta + \dots \\ &= Q(\cos \theta, \sin \theta), \end{aligned}$$

onde P e Q são polinômios convenientes, homogêneos e de grau n nas duas variáveis $\cos \theta$ e $\sin \theta$.

RESPOSTAS E SUGESTÕES

- | | |
|---|---|
| 1. $z = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right).$ | 2. $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right).$ |
|---|---|

- | | |
|---|---|
| 3. $z = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right).$ | 4. $z = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right).$ |
| 9. $z = \sqrt{5}(\cos \theta + i \sin \theta)$, onde $\theta = \arccos(1/\sqrt{5})$, $0 < \theta < \pi/2$. | |
| 12. $z = \sqrt{17}(\cos \theta + i \sin \theta)$, onde $\theta = \arccos(4/\sqrt{17})$, $-\pi/2 < \theta < 0$. | |
| 20. Desenvolva $(\cos \theta + i \sin \theta)^3$ pela fórmula do binômio e pela fórmula de De Moivre. | |

PROPRIEDADES DO VALOR ABSOLUTO

As seguintes propriedades são de verificação imediata:

$$|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0;$$

$$|z| = |-z|; \quad |\operatorname{Re}z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im}z| \leq |z|.$$

A propriedade

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

segue da seguinte observação: $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 \overline{z_1})(z_2 \overline{z_2}) = |z_1|^2 |z_2|^2$. Menos trivial é a *desigualdade do triângulo*,

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \tag{1.1}$$

assim chamada por exprimir propriedade geométrica bem conhecida: *a soma dos comprimentos de dois lados de um triângulo é maior ou igual ao comprimento do terceiro lado* (Fig. 1.8). Para demonstrá-la, observemos que

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + (z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \overline{z_2}| \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| |z_2| \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

Daqui segue a desigualdade desejada por uma simples extração de raiz.

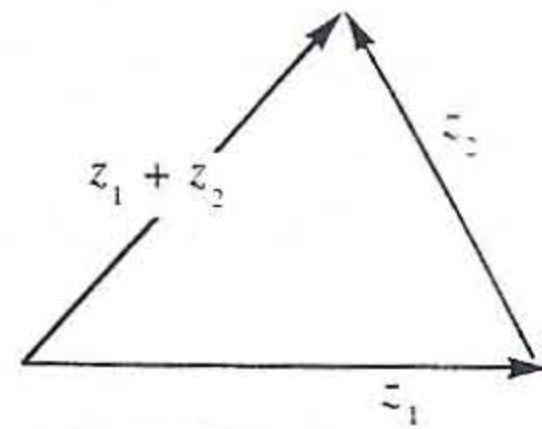


Fig. 1.8

Como $|-z_2| = |z_2|$, vale também a desigualdade

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

pois

$$|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|.$$

Uma terceira desigualdade muito importante é a seguinte:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|. \quad (1.2)$$

Para demonstrá-la, basta observar que

$$|z_1| = |(z_1 + z_2 - z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|.$$

Obtém-se daqui o resultado desejado subtraindo $|z_2|$ do primeiro e último membros.

Trocando z_1 com z_2 em (1.2), obtemos também a desigualdade

$$||z_2| - |z_1|| \leq |z_1 + z_2|. \quad (1.3)$$

Pondo agora $|z_1| - |z_2| = a$, as desigualdades (1.2) e (1.3) podem ser escritas, respectivamente, $a \leq |z_1 + z_2|$ e $-a \leq |z_1 + z_2|$, donde segue-se que $|a| \leq |z_1 + z_2|$, ou seja,

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|.$$

EXERCÍCIOS

1. Mostre que $\left| \frac{2+i}{2-i\sqrt{3}} \right|^2 = \frac{5}{7}$ e $\frac{(\sqrt{3}+i)(1-3i)}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{2}$.
2. Demonstre, por indução, a desigualdade seguinte: e interprete o resultado graficamente.

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|.$$

3. Supondo ser $|z_2| > |z_3|$, prove que

$$\left| \frac{z_1}{z_2 + z_3} \right| \leq \frac{|z_1|}{|z_2| - |z_3|} \quad \text{e} \quad \left| \frac{z_1}{z_2 - z_3} \right| \leq \frac{|z_1|}{|z_2| + |z_3|}$$

4. Prove que $|z| \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2}|z|$, onde $z = x + iy$.
5. Prove que $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$, quaisquer que sejam os números complexos z_1 e z_2 .
6. Prove que, se vale a desigualdade do exercício anterior, então $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, quaisquer que sejam os números z_1 e z_2 ; isto é, a desigualdade do triângulo (1.1) é equivalente a (1.2) ou (1.3).
7. Sendo $z \neq 0$, mostre que $\operatorname{Re} z = |z| \operatorname{sen} \theta$ se e somente se $\theta > 0$.
8. Utilize o resultado anterior com $z = z_1 \bar{z}_2$ para provar que, sendo $z_1 \neq 0$ e $z_2 \neq 0$, então a igualdade vale em (1.1) se e somente se $\arg z_1 = \arg z_2$, a menos de um múltiplo inteiro de 2π . Interprete este resultado geometricamente.

RAÍZES n-ÉSIMAS

Diz-se que um número z é raiz n -ésima de um dado número complexo a se $z^n = a$. Como veremos logo a seguir, um número complexo ($\neq 0$) possui n raízes distintas. Para isso, consideremos o número dado $a \neq 0$ em sua forma polar: $a = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$; e representemos, também em forma polar, a raiz que desejamos encontrar: $z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$. Utilizando a fórmula de De Moivre, a equação $z^n = a$ assume a forma seguinte:

$$\rho^n (\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi) = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

Como a igualdade de números complexos requer a igualdade das partes reais e das partes imaginárias, separadamente, devemos ter

$$\rho^n \cos n\varphi = r \cos \theta \quad \text{e} \quad \rho^n \operatorname{sen} n\varphi = r \operatorname{sen} \theta.$$

Estas equações, por sua vez, equivalem a

$$\rho^n = r, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi.$$

onde k é um inteiro. Daqui segue-se que ρ é a raiz n -ésima positiva de r , donde

$$z = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right). \quad (1.4)$$

Esta fórmula produz n raízes distintas, quando a k se atribuem os valores $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Como é fácil ver, qualquer outro valor atribuído a k conduz a uma raiz já obtida com um dos valores acima, precisamente aquele que é o resto da divisão de k por n . Vemos, assim, que um número complexo $a \neq 0$ possui n raízes n -ésimas z_0, z_1, \dots, z_{n-1} , todas com o mesmo módulo $\rho = \sqrt[n]{|a|}$ (Fig. 1.9) e com argumentos

$$\varphi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

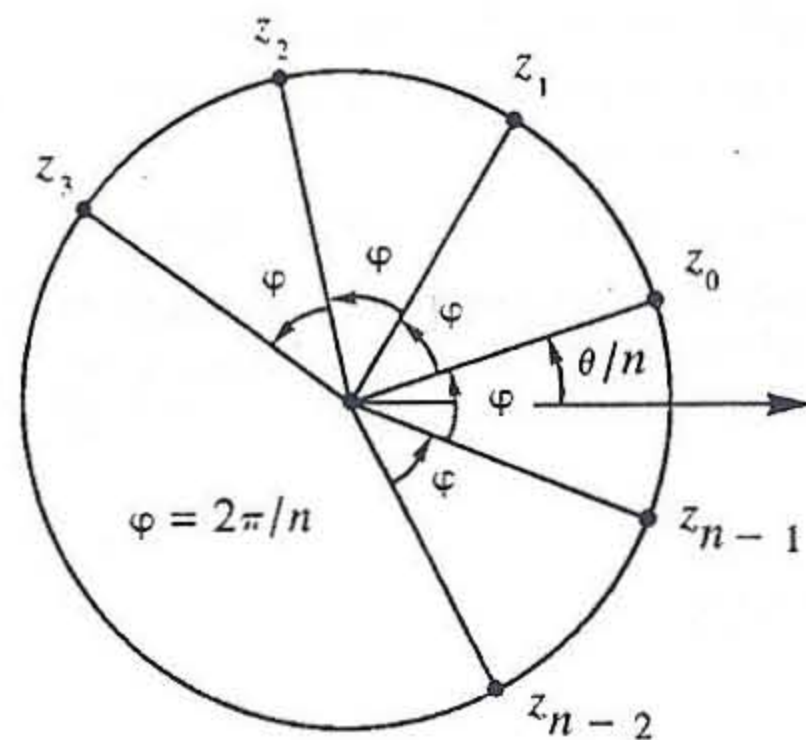


Fig. 1.9

Raízes da unidade

No caso particular $a = 1$, o ângulo θ assume o valor zero e a fórmula (1.4) se reduz a

$$z = \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \right)$$

que são as raízes n -ésimas da unidade. Pondo

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n},$$

e utilizando a fórmula de De Moivre, vemos que as raízes n -ésimas da unidade são dadas por

$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}.$$

Observe que, representadas no plano complexo, essas raízes são os vértices de um polígono regular de n lados. A Fig. 1.10 ilustra as raízes da unidade no caso $n = 6$. Aqui,

$$\omega = \cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\omega^2 = -\bar{\omega}, \quad \omega^3 = -1, \quad \omega^4 = -\omega, \quad \omega^5 = \bar{\omega}.$$

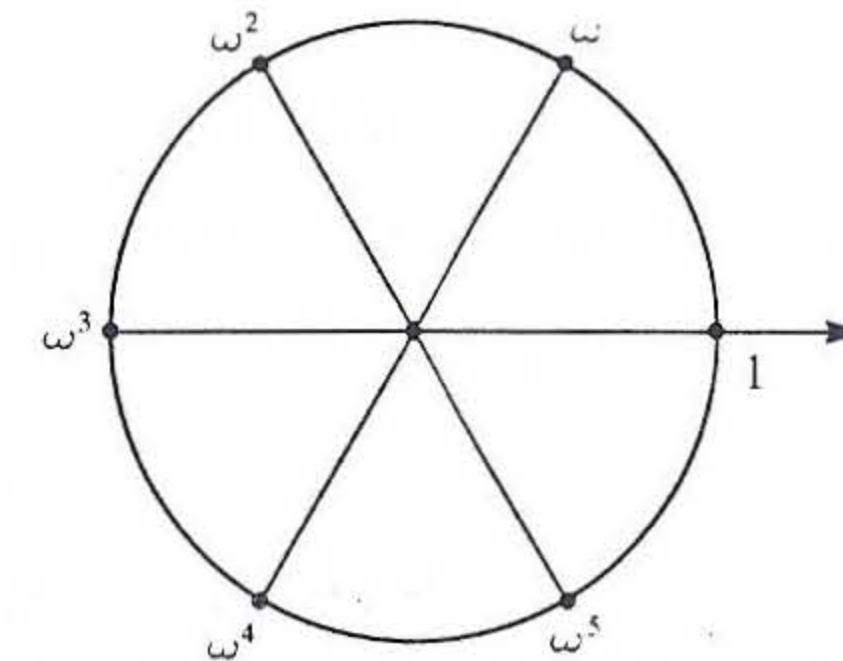


Fig. 1.10

A fórmula (1.4) pode ser escrita assim:

$$z = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{n} \right) \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \right),$$

ou seja,

$$a = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{n} \right) \cdot \omega^k, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Esta expressão nos diz que as raízes n -ésimas de um número complexo não nulo podem ser obtidas como o produto de uma de suas raízes particulares,

$$z_0 = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta}{n} \right)$$

pelas raízes n -ésimas da unidade, $1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$.

Como exemplo, seja determinar as raízes cúbicas do número $a = 8$. Uma delas é $z_0 = 2$. As raízes cúbicas da unidade são dadas por $1, \omega, \omega^2$, sendo que agora

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo, as raízes cúbicas de 8 são (Fig. 1.11):

$$z_0 = 2; \quad z_1 = 2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + i\sqrt{3},$$

$$z_2 = 2\omega^2 = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

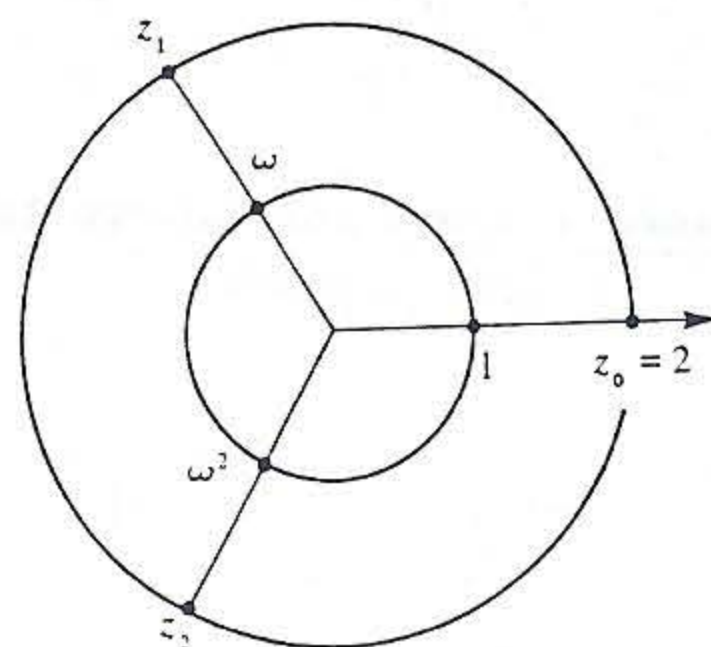


Fig. 1.11

Raízes primitivas

Chama-se *raiz n -ésima primitiva da unidade* qualquer raiz n -ésima $z \neq 1$ tal que n é o menor inteiro positivo tal que $z^n = 1$. É claro que, qualquer que seja n ,

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$$

é raiz primitiva. Ela é a primeira raiz primitiva que ocorre quando percorremos o círculo unitário no sentido anti-horário a partir da unidade real. Mas pode não ser a única raiz primitiva; por exemplo, no caso das raízes triplas da unidade, como vimos há pouco, ω é raiz primitiva, mas ω^2 também é. Já no caso das raízes sêxtuplas, ω e ω^5 são raízes primitivas, enquanto ω^2 ,

ω^3 e ω^4 não o são. Veja o Exerc. 22 adiante para uma caracterização das raízes primitivas.

Observação. O processo de cálculo de raízes, utilizando a representação trigonométrica, é de caráter geral: mas nem sempre é o mais conveniente. Por exemplo, no cálculo da raiz quadrada do número $-7 - 24i$, é mais fácil proceder assim:

$$\sqrt{-7 - 24i} = x + iy, \quad \text{donde } x^2 - y^2 + 2ixy = -7 - 24i.$$

Mas isto equivale a

$$x^2 - y^2 = -7, \quad xy = -12.$$

Resolvendo esta última equação em relação a x e substituindo na primeira, obtemos uma equação quadrática para y^2 , cuja solução é $y^2 = 16$ (como y é real, $y^2 > 0$). Logo, $y = \pm 4$ e $x = -3$. Finalmente,

$$\sqrt{-7 - 24i} = \pm(3 - 4i).$$

EXERCÍCIOS

Calcule as raízes dos números complexos dados nos Exercs. 1 a 8 e faça a representação gráfica correspondente.

1. $\sqrt[3]{-1}$.
2. $(1 + i\sqrt{3})^{1/2}$.
3. $\sqrt{2i}$.
4. $\sqrt{-2i}$.
5. $\sqrt[3]{i}$.
6. $\sqrt{-i}$.
7. $(-1 + i\sqrt{3})^{1/4}$.
8. $(-1 - i\sqrt{3})^{1/2}$.

Usando o procedimento descrito na Observação acima, calcule as raízes indicadas nos Exercs. 9 a 11.

9. $\sqrt{-5 - 12i}$.
10. $\sqrt{3 + 4i}$.
11. $\sqrt{1 + 2i\sqrt{6}}$.

12. Decomponha o polinômio $P(x) = x^4 + 1$ em fatores do 2º grau com coeficientes reais.
13. Faça o mesmo com o polinômio $P(x) = x^4 + 9$.

Nos Exercs. 14 a 21, decomponha cada polinômio dado em um produto de fatores do 1º grau.

14. $P(z) = z^6 - 64$. 15. $P(z) = z^6 + 64$. 16. $P(z) = 3z^2 - i$.
17. $P(z) = 5z^3 + 8$. 18. $P(z) = z^2 - 2z + 2$. 19. $P(z) = 2z^2 - z + 1$.
20. $P(z) = z^2 - (1 + i)z + 5i$.
21. $P(z) = z^4 - (1 - i)z^2 - i$.
22. Prove que $\omega = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ é raiz n -ésima primitiva da unidade se e somente se k e n forem primos entre si. Em consequência, sendo $n > 2$, as raízes primitivas são sempre em número maior do que 1; e exatamente $n - 1$ se n for número primo.
23. Prove que se $\omega = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ é raiz n -ésima primitiva da unidade, então as n raízes n -ésimas da unidade são dadas por $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$.
24. Prove que $1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0$, onde ω é qualquer raiz n -ésima da unidade, diferente de 1.
25. Prove que
- $$1 + 2\omega + 3\omega^2 + \dots + n\omega^{n-1} = \frac{n}{\omega - 1},$$
- onde ω é qualquer raiz n -ésima da unidade, diferente de 1.

RESPOSTAS, SUGESTÕES E SOLUÇÕES

1. $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ e -1 . 3. $1 + i$. 4. $1 - i$.
5. $\frac{\pm\sqrt{3} + i}{2}$ e $-i$. 7. $\pm \frac{-1 + i\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}}$ e $\pm \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt[4]{8}}$.
12. Pondo $\omega = (1 + i)/\sqrt{2}$, temos:
- $$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - i^2 = (x^2 - i)(x^2 + i) = (x^2 - \omega^2)(x^2 - \bar{\omega}^2) \\ &= [(x - \omega)(x + \omega)][(x - \bar{\omega})(x - \bar{\omega})] \\ &= [(x - \omega)(x - \bar{\omega})][(x + \omega)(x - \bar{\omega})] \\ &= (x^2 - \sqrt{2} + 1)(x^2 - \sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$
25. Seja S a referida soma. Então,
- $$\begin{aligned} S &= (1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1}) + \omega[1 + 2\omega - 3\omega^2 + \dots + (n-1)\omega^{n-2}] \\ &= \omega(S - n\omega^{n-1}). \end{aligned}$$

A EXPONENCIAL

Admitimos que o leitor tenha familiaridade com as funções trigonométricas, a constante de Euler e e a função exponencial e^x , conceitos estes que são estudados nos cursos de Cálculo. Lembramos, em particular, os desenvolvimentos dessas funções em séries de MacLaurin, válidos para todos os valores reais da variável x :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots; \quad (1.5)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots; \quad (1.6)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (1.7)$$

A constante de Euler e , que é um número irracional compreendido entre 2 e 3 ($e \approx 2,71828\dots$), é dada pela série

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots,$$

que se obtém de (1.5) com $x = 1$.

Vamos tomar o desenvolvimento (1.5) como base para definir e^z com z complexo. Se e^z já tivesse significado para z complexo, e o desenvolvimento (1.5) fosse válido neste caso, então teríamos, com y real,

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \frac{(iy)^7}{7!} + \dots \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - i\frac{y^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

Admitindo ainda que seja possível rearrumar os termos desta série, pondo juntos os termos reais e separadamente os termos imaginários, obtemos:

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots\right),$$

ou seja, em vista de (1.6) e (1.7),

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y. \quad (1.8)$$

Essas considerações, que são puramente formais, não estabelecem a relação (1.8), mas servem como motivação para definirmos a função exponencial. Fazemos isso tomando a relação (1.8) como ponto de partida; ela é aqui usada para definir a exponencial no caso de expoente puramente imaginário iy . Por outro lado, a definição da exponencial no caso de um expoente qualquer $z = x + iy$ é feita de maneira a manter a propriedade aditiva da exponencial real:

$$e^{x_1+x_2} = e^{x_1} e^{x_2}.$$

Definimos, então, a exponencial e^z , para um número complexo qualquer $z = x + iy$, mediante a expressão

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y). \quad (1.9)$$

Propriedades da exponencial

Da definição que acabamos de dar da exponencial, e das propriedades das funções reais $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ e e^x , decorrem as seguintes propriedades da exponencial complexa:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}; \quad (1.10)$$

$$e^{-z} = 1/e^z; \quad (1.11)$$

$$(e^z)^n = e^{nz}, \quad n \text{ inteiro}; \quad (1.12)$$

$$e^z \neq 0 \quad \text{para todo } z; \quad (1.13)$$

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}; \quad (1.14)$$

$$e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i, \quad k \text{ inteiro}. \quad (1.15)$$

Demonstração de (1.10). Com a notação usual,

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{e} \quad z_2 = x_2 + iy_2,$$

obtemos, em vista da definição (1.9),

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= e^{x_1} (\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1) \cdot e^{x_2} (\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2) \\ &= e^{x_1+x_2} [(\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2) \\ &\quad + i (\operatorname{sen} y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \operatorname{sen} y_2)] \\ &= e^{x_1+x_2} [\cos(y_1 + y_2) + i \operatorname{sen}(y_1 + y_2)]. \end{aligned}$$

Daqui e da definição (1.9) concluímos que

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{x_1+x_2} e^{i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2},$$

o que completa a demonstração.

Demonstração de (1.11). Temos, com $z = x + iy$,

$$\begin{aligned} e^{-z} &= e^{-x-iy} = \frac{1}{e^x} [(\cos(-y) + i \operatorname{sen}(-y))] = \\ &= \frac{1}{e^x} (\cos y - i \operatorname{sen} y) = \frac{1}{e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)} = \frac{1}{e^{x+iy}} = \frac{1}{e^z} \end{aligned}$$

Demonstração de (1.12). A fórmula (1.12) é imediata nos casos $n = 0$ e $n = 1$. Para $n = 2$, ela segue facilmente de (1.10); e em geral, para $n > 0$, ela é estabelecida por indução. Para isso, como ela é válida para $n = 0$, basta mostrar que do fato de ser válida para $n = k$ segue-se que é válida também para $n = k + 1$, $k \geq 0$. Supomos, então, que

$$(e^z)^k = e^{kz}.$$

Em conseqüência,

$$(e^z)^{k+1} = (e^z)^k (e^z) = e^{kz} e^z = e^{kz+z} = e^{(k+1)z}.$$

O caso $n < 0$ reduz-se facilmente ao caso $n > 0$. De fato, supondo $n < 0$, temos

$$(e^z)^n = \frac{1}{(e^z)^{-n}};$$

mas $-n > 0$, logo $(e^z)^{-n} = e^{-nz}$, portanto,

$$(e^z)^n = \frac{1}{e^{-nz}} = e^{nz}.$$

Isto completa a demonstração de (1.12).

Deixamos ao leitor a tarefa de demonstrar as propriedades (1.13), (1.14) e (1.15).

Com a notação exponencial, a representação polar de um número complexo assume a forma compacta $z = re^{i\theta}$, onde $r = |z|$ e $\theta = \arg z$; por exemplo, $i = e^{i\pi/2}$, $-2 = 2e^{i\pi}$, $-4i = 4e^{-i\pi/2}$ etc. A mesma notação permite escrever a fórmula de De Moivre assim:

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$$

Observamos também que é costume usar a notação $\exp z$ em lugar de e^z , principalmente quando o expoente é muito carregado. Por exemplo, costuma-se escrever

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] \text{ em vez de } e^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}.$$

EXERCÍCIOS

Reduza à forma $re^{i\theta}$ cada um dos números complexos dados nos Exercs. 1 a 6 e faça os gráficos correspondentes.

- | | | | |
|----------------------|------------------------|-----------------------|--|
| 1. $1 + i$. | 2. $1 - i$. | 3. $-1 + i$. | 4. $-1 - i$. |
| 5. $1 + i\sqrt{3}$. | 6. $1 - i\sqrt{3}$. | 7. $\sqrt{3} + i$. | 8. $\sqrt{3} - i$. |
| 9. $-\sqrt{3} - i$. | 10. $-1 - i\sqrt{3}$. | 11. $\frac{i}{1+i}$. | 12. $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$. |

Volte à p. 12 e refaça os Exercs. 1 a 12 lá propostos, utilizando agora a notação exponencial. Você há de ver que, juntamente com sua representação geométrica, essa notação facilita muito o trabalho de extrair raízes.

13. Mostre que $\exp(3 - 7\pi i) = -e^3$.
14. Mostre que $\exp\frac{3 - 2\pi i}{6} = \frac{\sqrt{e}(1 - i\sqrt{3})}{2}$.
15. Estabeleça as fórmulas de Euler:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

16. Sendo $z = re^{i\theta}$, prove que $|e^{iz}| = e^{-r \operatorname{sen} \theta}$.

17. Prove que $r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} = r_3 e^{i\theta_3}$, onde

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \theta_3 = \frac{r_1 \operatorname{sen} \theta_1 + r_2 \operatorname{sen} \theta_2}{r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2}.$$

Faça um gráfico.

18. Estabeleça as duas identidades seguintes:

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}[(n + 1/2)\theta]}{2 \operatorname{sen}(\theta/2)};$$

$$\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 2\theta + \dots + \operatorname{sen} n\theta = \frac{1}{2 \operatorname{sen}(\theta/2)} \left[\cos \frac{\theta}{2} - \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \right]$$

19. Prove que a condição para que três números complexos a , b e c sejam vértices de um triângulo equilátero é que $a + jb + j^2 c = 0$, onde $j = e^{2\pi i/3}$. Prove que esta condição equivale a $b + jc + j^2 a = 0$ e a $c + ja + j^2 b = 0$.

20. Determine z de forma que o triângulo de vértices i , z e iz seja equilátero.

21. Prove que $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i$, k inteiro. Isto prova, em particular, que e^z é função periódica de período $2\pi i$.

RESPOSTAS, SUGESTÕES E SOLUÇÕES

1. $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$. 2. $\sqrt{2}e^{-\pi i/4}$. 6. $2e^{-i\pi/3}$. 11. $\frac{e^{-i/4}}{\sqrt{2}}$

18. Utilize a fórmula de De Moivre e a soma dos termos de uma PG, assim:

$$\sum_{j=0}^n [\cos j\theta + i \operatorname{sen} j\theta] = \sum_{j=0}^n e^{ij\theta} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta/2} - e^{i(n+1/2)\theta}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} = \text{etc.}$$

19. Observe que as raízes cúbicas da unidade são 1 , w e w^2 , e que $1 + j = -j^2$. Faça uma figura e note que a condição mencionada equivale a $a = b + (c - b)(-j^2)$.

20. Como z e iz têm o mesmo módulo, eles jazem na mesma circunferência de centro na origem; e como o terceiro vértice do triângulo é i , vemos que um de seus lados (de vértices z e iz) é paralelo ao eixo Ox . Então esses vértices z e iz jazem nas retas $y = x$ e $y = -x$ (já que eles estão simetricamente posicionados em relação ao eixo Oy e fazem entre si um ângulo de $\pi/2$ radianos). Eles podem estar ambos no semiplano superior ou ambos no semiplano inferior. (Faça uma figura em cada caso.) No primeiro caso, z , i e iz estão posicionados no sentido anti-horário, portanto, de acordo com o exercício anterior, devemos ter

$$z + ji + j^2(iz) = 0, \quad \text{donde} \quad z = \frac{-ij}{1 + ij^2} = \frac{e^{\pi i/4}}{2 \operatorname{sen}(5\pi/12)}.$$

No segundo caso, i , z e iz é que estarão posicionados no sentido anti-horário, portanto,

$$i + jz + j^2(iz) = 0, \quad \text{donde } z = \frac{-i}{j + ij^2} = \frac{-e^{3\pi i/4}}{2 \operatorname{sen}(\pi/12)}.$$

CONJUNTOS DE PONTOS NO PLANO

Dados os números $r > 0$ e z_0 complexo qualquer, chama-se *disco aberto*² de centro z_0 e raio r ao conjunto $D_r(z_0)$ de todos os números complexos que estão a uma distância menor do que r do ponto z_0 , isto é,

$$D_r(z_0) = \{z: |z - z_0| < r\},$$

como ilustra a Fig. 1.12. O *disco fechado* é o conjunto $\{z: |z - z_0| \leq r\}$, que inclui a fronteira, isto é, o círculo $\{z: |z - z_0| = r\}$.

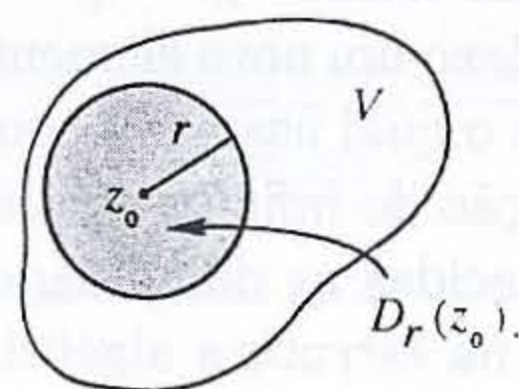


Fig. 1.12

Chama-se *vizinhança* de um ponto z_0 a todo conjunto V que contém um disco de centro z_0 . Em particular, qualquer disco $D_r(z_0)$ é uma vizinhança de z_0 , que freqüentemente denotaremos por $V_r(z_0)$. Usaremos $V'_r(z_0)$ para denotar a vizinhança $V_r(z_0)$, da qual excluimos o ponto z_0 , isto é, $V'_r(z_0) = V_r(z_0) - \{z_0\}$. Costuma-se chamar $V'_r(z_0)$ de *vizinhança perfurada*.

Dizemos que z_0 é *ponto interior* de um conjunto C se C é vizinhança de z_0 , isto é, se existe um disco de centro z_0 todo contido em C . Dizemos que C é *aberto* se todos os seus pontos são interiores, ou seja, se C é vizinhança de cada um de seus pontos.

A título de ilustração, vamos demonstrar que todo disco $D_r(z_0)$ é aberto. Para isto, seja w um ponto qualquer de $D_r(z_0)$. Temos de mostrar que existe

²No 2º grau é costume distinguir entre "círculo" e "circunferência". Mas na universidade, "círculo" costuma ter o mesmo significado de "circunferência", daí a palavra "disco" ser usada para designar o interior do círculo.

um disco $D_\varepsilon(w)$ contido em $D_r(z_0)$ (Fig. 1.13). Seja $\delta = |w - z_0|$; então, $\delta < r$. Seja $\varepsilon < r - \delta$ e z um ponto qualquer de $D_\varepsilon(w)$. Pela desigualdade do triângulo,

$$|z - z_0| = |(z - w) + (w - z_0)| \leq |z - w| + |w - z_0|.$$

Como $|z - w| < \varepsilon < r - \delta$ e $|w - z_0| = \delta$, obtemos $|z - z_0| < (r - \delta) + \delta = r$. Logo, $z \in D_r(z_0)$. Mas z é arbitrário em $D_\varepsilon(w)$, o que nos leva a concluir que $D_\varepsilon(w) \subset D_r(z_0)$, e isto completa a demonstração.

Dizemos que um conjunto F é *fechado* quando o seu complementar é aberto. Lembramos que o *complementar* de um conjunto C é o conjunto C' dos pontos que não pertencem a C . É claro que o complementar do complementar de C é o próprio C .

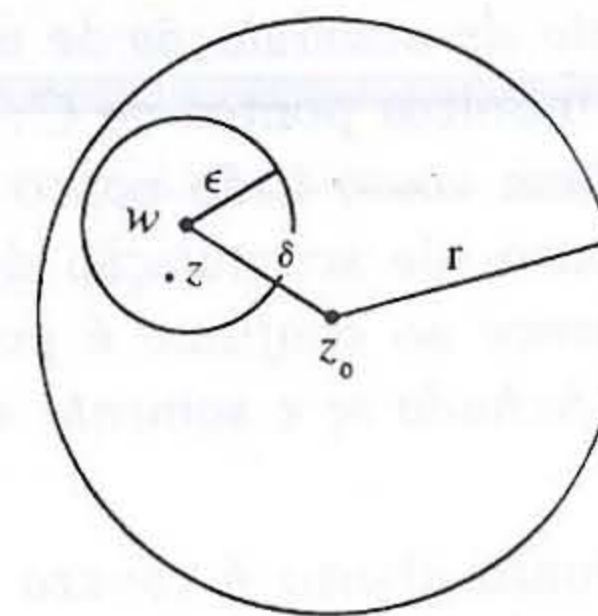


Fig. 1.13

Chama-se *fronteira* de um conjunto C ao conjunto dos pontos z tais que qualquer vizinhança de z contém pontos de C e pontos do seu complementar C' (Fig. 1.14). Desta definição segue-se que a fronteira de C é também a fronteira de C' . Um ponto da fronteira pode ou não pertencer ao conjunto em questão. Por exemplo, no conjunto

$$A = \{z: 3 \leq |z| < 5\},$$

a fronteira é a união do conjunto dos pontos z tais que $|z| = 3$ (que pertencem ao conjunto) com o conjunto dos pontos z tais que $|z| = 5$ (que não

pertencem ao conjunto). Esse conjunto não é aberto nem fechado.

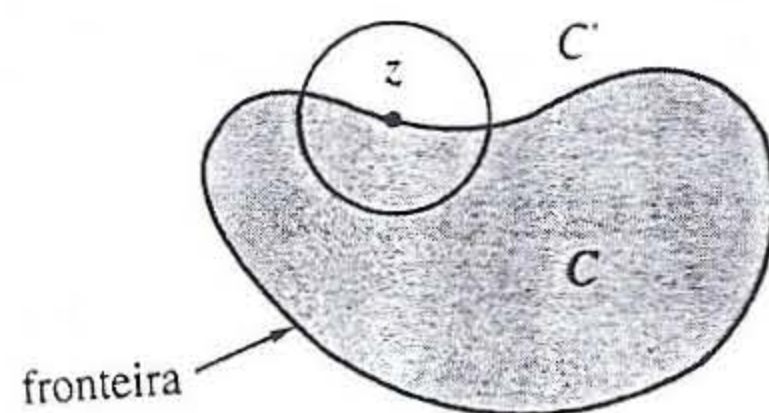


Fig. 1.14

É fácil ver que nenhum ponto interior a um conjunto pode ser ponto de sua fronteira, e nenhum ponto da fronteira pode ser ponto interior. Em consequência, *um conjunto é aberto se e somente se ele não contém pontos de sua fronteira*. Daqui e da definição de conjunto fechado segue-se que *um conjunto é fechado se e somente se ele contém todos os pontos de sua fronteira*.

Dizemos que z_0 é *ponto de acumulação* de um conjunto C se qualquer vizinhança de z_0 contém infinitos pontos de C . É fácil ver que um ponto interior a um conjunto, bem como todo ponto da fronteira que não pertence ao conjunto, são pontos de acumulação do conjunto; todo ponto de acumulação que não pertence ao conjunto é ponto da fronteira; em consequência, *um conjunto é fechado se e somente se ele contém todos os seus pontos de acumulação*.

Dizemos que um conjunto aberto é *conexo* se quaisquer dois de seus pontos podem ser ligados por um arco todo contido no conjunto. (Veja a definição de arco no início do Capítulo 3.) Chama-se *região* a todo conjunto aberto e conexo. É freqüente, na literatura, o uso do vocábulo “domínio” com o mesmo significado de “região”, caso em que se deve tomar cuidado para não confundir “domínio” com “domínio de função”; por isso mesmo usaremos sempre o vocábulo “região” com o significado que lhe damos aqui, e não “domínio”.

Diz-se que um conjunto C é *limitado* se existe um número positivo K tal que $|z| \leq K$ para todo z em C . Chama-se conjunto *compacto* a todo conjunto limitado e fechado.

Chama-se *ponto isolado* de um conjunto C a todo ponto de C que não é ponto de acumulação desse conjunto. Por exemplo, todos os pontos do

conjunto infinito

$$C = \{0, 1/2, 2/3, 3/4, \dots, n/(n+1), \dots\}$$

são pontos isolados; 1 é o único ponto de acumulação desse conjunto e não pertence a ele.

Todas essas noções são as mesmas do plano euclidiano. Elas se baseiam apenas na noção de *distância de dois pontos* z_1 e z_2 , dada por $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, que é o mesmo que a distância euclidiana $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, onde $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$. Aliás, mesmo do ponto de vista algébrico, o plano complexo e o plano euclidiano só diferem um do outro devido ao fato de termos definido a multiplicação de números (ou pontos) complexos, enquanto no plano euclidiano não temos tal operação.

Muitas vezes é conveniente considerar *vizinhanças do infinito*, assim denominados os conjuntos da forma $V_K = \{z: |z| > K\}$. Isto corresponde a incorporar ao plano complexo um novo elemento — o ponto no infinito, como costumamos dizer — para o qual usamos a conhecida notação ∞ . Deve ficar bem claro que essa adjunção do infinito ao plano complexo não tem caráter algébrico. São bem conhecidas as dificuldades que surgem quando procuramos envolver o infinito na estrutura algébrica por meio das operações de adição e multiplicação. A adjunção do infinito ao plano complexo resulta no *plano estendido*, que é formado por todos os pontos finitos, juntamente com o ponto infinito. Este ponto é único, em contraste com a reta, onde temos dois infinitos, $+\infty$ e $-\infty$. No plano estendido, qualquer semi-reta de origem z liga z ao ponto infinito.

Vejamos alguns exemplos de conjuntos de pontos no plano complexo. Faremos a descrição deles, deixando ao leitor a tarefa de fazer os respectivos gráficos. O conjunto dos pontos z tais que $|z - 3i| < 5$ é o disco de centro $z_0 = 3i$ e raio 5; $|z - 3| > 7$ é o complementar, ou exterior, do disco fechado $|z - (-3)| \leq 7$ de centro -3 e raio 7; o conjunto dos pontos z tais que $|z - 1/2 + i| \leq 2$ é o disco fechado de centro $z_0 = 1/2 - i$ e raio 2; $|2z + 4 - 3i| \geq 5$ é o mesmo que $|z + 2 - 3i/2| \geq 5/2$, que é o exterior do disco de centro $z_0 = -2 + 3i/2$ e raio $5/2$.

A equação $z = \alpha + re^{i\theta}$ descreve o disco de centro α e raio r , θ variando

no intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$ (Fig. 1.15).

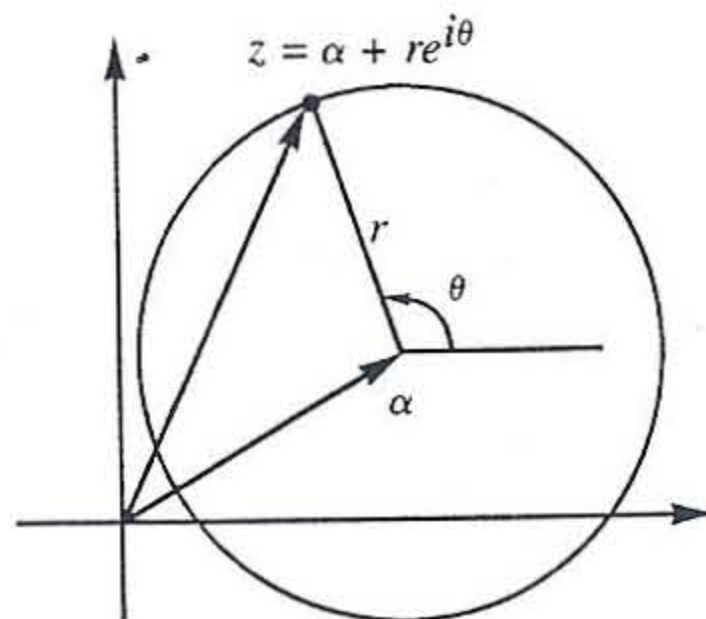


Fig. 1.15

A reta que passa pelos pontos α e β é dada pela equação paramétrica $z = \alpha + (\beta - \alpha)t$, o parâmetro t variando no conjunto dos números reais (Fig. 1.16).

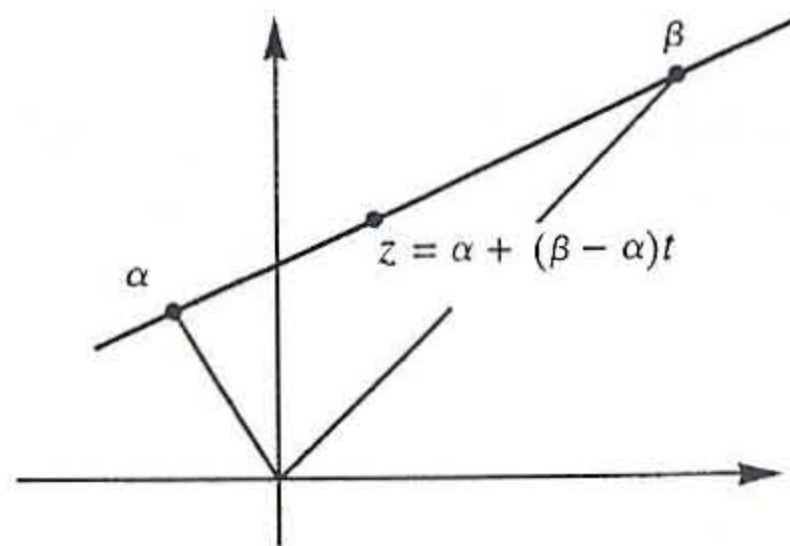


Fig. 1.16

Qual é o conjunto dos pontos z tais que $\operatorname{Re} z^2 < 0$? Pondo $z = re^{i\theta}$, temos: $z^2 = r^2 e^{2i\theta}$, portanto, a transformação que leva z em $w = z^2$ transforma uma região angular $0 < \arg z < \alpha$ na região $0 < \arg w < 2\alpha$, como ilustra a Fig. 1.17.

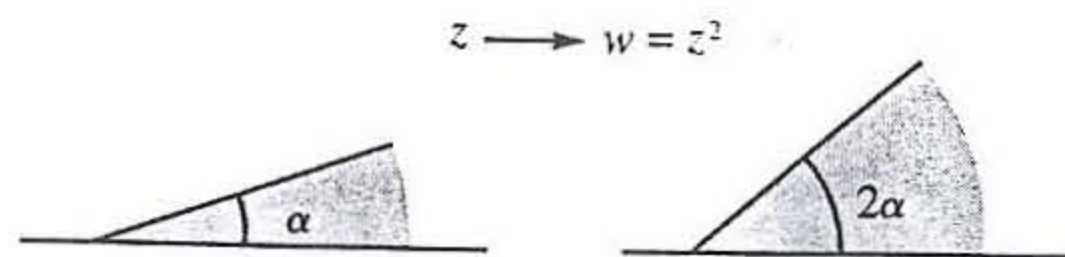


Fig. 1.17

Feita esta observação, vemos que o conjunto dos pontos $\operatorname{Re} z^2 < 0$ é a reunião dos dois conjuntos ilustrados na Fig. 1.18:

$$C_1 = \left\{ z: \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4} \right\} \quad \text{e} \quad C_2 = \left\{ z: -\frac{3\pi}{4} < \arg z < -\frac{\pi}{4} \right\}.$$

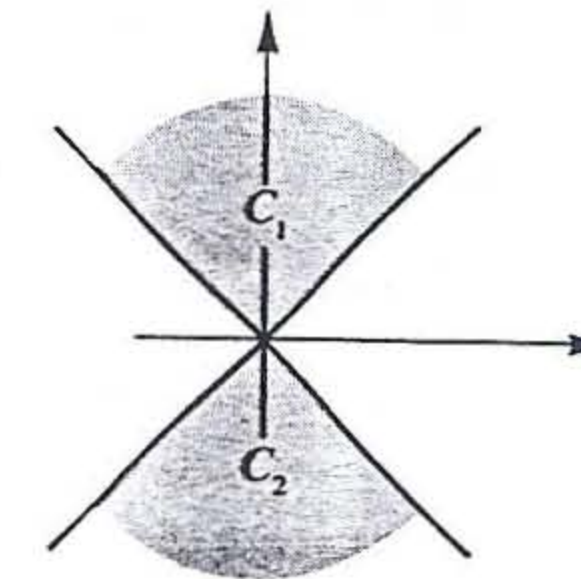


Fig. 1.18

De modo análogo, verifica-se que o conjunto dos pontos z tais que $\operatorname{Im} z^2 > 0$ é a união dos conjuntos

$$S_1 = \{z: 0 < \arg z < \pi/2\} \quad \text{e} \quad S_2 = \{z: \pi < \arg z < 3\pi/2\},$$

mostrados na Fig. 1.19.

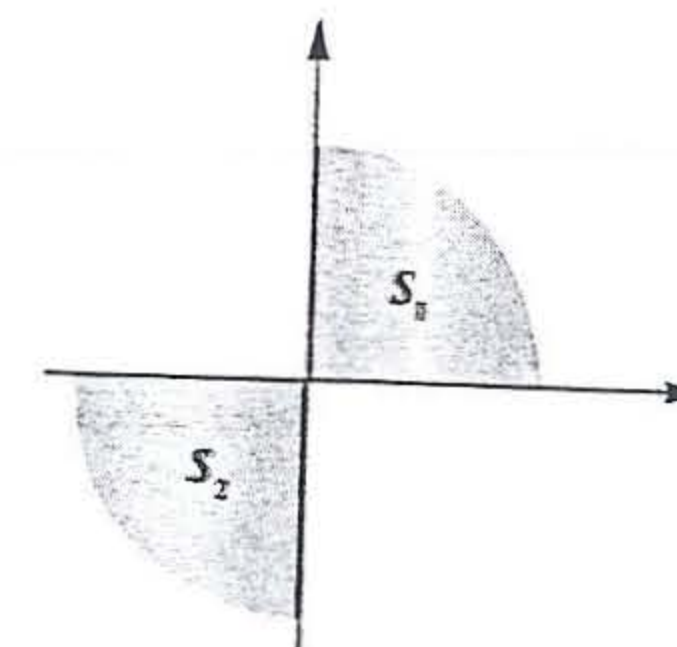


Fig. 1.19

EXERCÍCIOS

1. Mostre que o plano complexo é um conjunto aberto. (Portanto, seu complementar, o conjunto vazio ϕ , é fechado.)

2. Prove que o conjunto vazio é aberto. (Portanto, o seu complementar, que é o plano todo, é fechado.)
3. Prove que qualquer união de conjuntos abertos é um conjunto aberto.
4. Dê um contra-exemplo para mostrar que uma união de conjuntos fechados pode não ser um conjunto fechado.
5. Prove que a interseção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto.
6. Verifique que $y > 2x - 3$ é um semiplano aberto; e que $x \leq 3y/2 - 1$ é um semiplano fechado.

Represente graficamente os conjuntos dados nos Exercs. 7 a 20.

- | | | |
|--|-----------------------------------|--|
| 7. $\operatorname{Re} z < -3$ | 8. $\operatorname{Im} z \geq 1$. | 9. $ z - 2i > 2$. |
| 10. $ z + 1 \leq 1$. | 11. $ z - 1 + i < 3$. | 12. $z \neq 0$, $0 \leq \arg z < \pi/3$. |
| 13. $ z > 2$, $ \arg z < \pi$. | 14. $1 < z + 1 - 2i < 2$. | 15. $\operatorname{Re} \left(\frac{1}{z} \right) < \frac{1}{4}$. |
| 16. $ 3z - 2i \leq 5$. | 17. $\operatorname{Im} z^2 < 0$. | 18. $\operatorname{Re} z^2 > 0$. |
| 19. $z \neq 0$, $ \arg z^3 < 2\pi$. | 20. $\operatorname{Im} z^3 < 0$. | |

Mostre que cada um dos conjuntos dados nos Exercs. 21 a 26 é uma reta. Faça os respectivos gráficos.

- | | | |
|-------------------------------------|---|-----------------------------------|
| 21. $ z - 2 = z - 3i $. | 22. $ z + 5 = z - 1 - i $. | 23. $ z - 1 + i = 3 + i - z $. |
| 24. $ z + 3 - i = z - 4i $. | 25. $ z - 1 + i = 1 - i\sqrt{3} + z $. | |
| 26. $(z - i)(1 - i\sqrt{3}) = 2z$. | | |

Identifique cada um dos conjuntos de pontos dados nos Exercs. 27 a 30. Faça os respectivos gráficos.

- | | | |
|--|----------------------------------|-----------------------------|
| 27. $ z - i + z + 2 = 3$. | 28. $ z - 2 + i + z \leq 4$. | 29. $ z - 2 = 2 z + 2i $. |
| 30. $\operatorname{Re}(1 - z) = z $. | | |

RESPOSTAS E SUGESTÕES

2. Observe que a proposição

$$x \in \phi \Rightarrow x \text{ é ponto interior do conjunto } \phi$$

equivale a

$$x \text{ não é ponto interior do conjunto } \phi \Rightarrow x \notin \phi$$

4. Observe que a união dos discos fechados $|z| \leq 1 - 1/n$ é o disco aberto $|z| < 1$.
15. Observe que $\operatorname{Re}(1/z) = \operatorname{Re}(\bar{z}/|z|^2)$.
22. Mediatriz do segmento $[-5, 1 + i]$.
26. Mediatriz do segmento $[0, i]$.
27. Elipse de focos i e -2 , excentricidade $\sqrt{5}/3$.

Capítulo 2

FUNÇÕES ANALÍTICAS

FUNÇÕES DE VARIÁVEL COMPLEXA

Vamos considerar funções definidas em conjuntos complexos, assumindo valores complexos. Mais precisamente, seja D um conjunto de números complexos e seja f uma lei que faz corresponder, a cada elemento z do conjunto D , um único número complexo, que denotamos por $f(z)$. Nestas condições, diz-se que f é uma função com domínio D . O conjunto I dos valores $w = f(z)$, correspondentes a todos os valores de z em D , é chamado a *imagem* de D pela função f (Fig. 2.1); z é chamada *variável independente*, e w , a *variável dependente*.

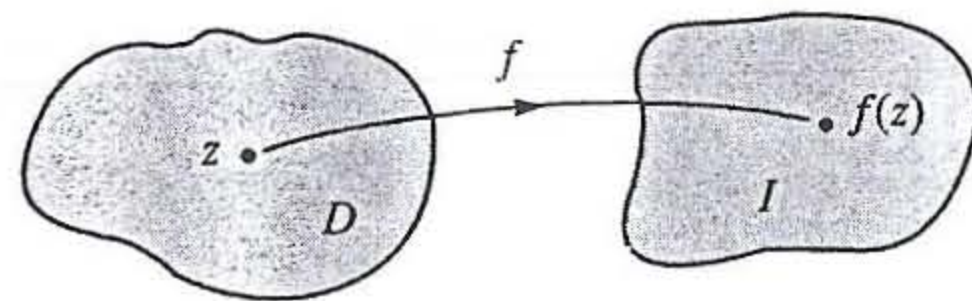


Fig. 2.1

O leitor deve notar que para caracterizar uma função não basta dar a lei de correspondência f ; é preciso especificar também o domínio de definição D . Entretanto, freqüentemente consideramos funções dadas em termos de relações analíticas bem definidas $w = f(z)$, sem especificar o domínio de definição. Nestes casos, fica então subentendido que o domínio da função é o conjunto de todos os valores z para os quais faz sentido a expressão

analítica $f(z)$. Por exemplo, quando falamos “seja a função

$$w = \frac{3z - 5i}{(z - i)(z + 7)},$$

estamos usando esta relação para especificar a lei que faz corresponder um valor w a cada valor z : ao mesmo tempo, fica subentendido que o domínio desta função é o plano complexo, excetuados os pontos $z = i$ e $z = -7$, já que nestes pontos o denominador se anula.

Diz-se que uma função f_1 com domínio D_1 é *restrição* de uma função f_2 com domínio D_2 se D_1 estiver contido em D_2 e $f_1(z) = f_2(z)$ para todo z em D_1 (Fig. 2.2). Nestas mesmas condições, diz-se que f_2 é uma *extensão* de f_1 . Por exemplo, a expressão

$$w = e^z, \quad z \text{ complexo,}$$

define uma função em todo o plano complexo, a qual é uma extensão da função

$$y = e^x, \quad x \text{ real.}$$

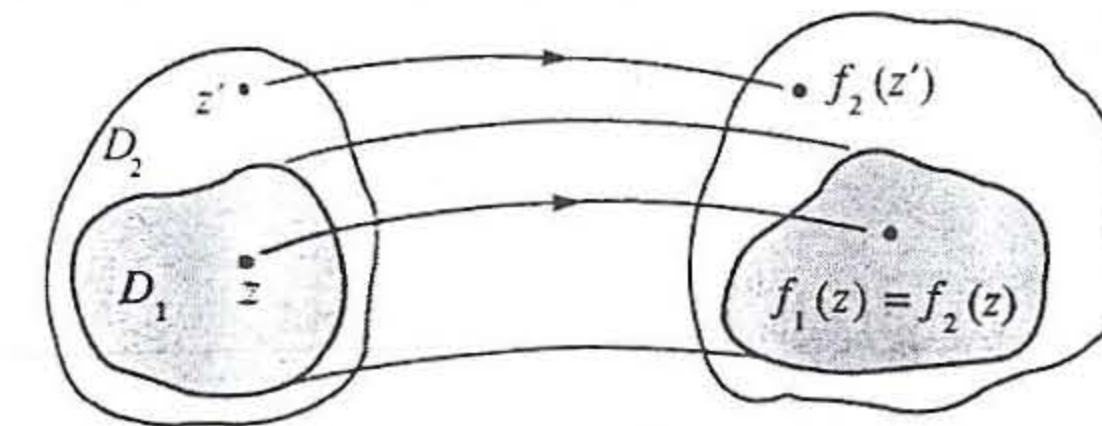


Fig. 2.2

Uma função da variável complexa z pode assumir valores puramente reais. Por exemplo,

$$f(x) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = x + iy,$$

é uma função real da variável complexa z .

A cada função $w = f(z)$ de uma variável complexa $z = x + iy$ estão associadas duas funções reais das variáveis reais x e y , dadas por

$$u = u(x, y) = \text{Re } f(z) \quad \text{e} \quad v = v(x, y) = \text{Im } f(z).$$

Por exemplo, sendo $f(z) = z^2 + 3z - 5$, temos:

$$u = x^2 - y^2 + 3x - 5 \quad \text{e} \quad v = 2xy + 3y.$$

Outro exemplo é dado por $f(z) = \exp(z^2 + 4z)$, em cujo caso,

$$u = e^{x^2 - y^2 + 4x} \cos(2xy + 4y) \quad \text{e} \quad v = e^{x^2 - y^2 + 4x} \sin(2xy + 4y).$$

EXERCÍCIOS

Determine as partes real e imaginária de cada uma das funções dadas nos Exercs. 1 a 6.

1. $w = z^2 - 5z + 3.$ 2. $w = \frac{3}{z - 5}.$ 3. $w = \frac{z + 2}{z - 2}.$

4. $w = \frac{z - 4i}{z + 3i}.$ 5. $w = \frac{z - 3i\bar{z}}{z - i}.$ 6. $w = e^z(z - i).$

Determine o domínio máximo de definição das funções dadas nos Exercs. 7 a 9.

7. $f(z) = \frac{z}{(z - i) \operatorname{sen} y}.$ 8. $f(z) = \frac{z}{x} - \frac{y}{z}.$ 9. $f(z) = \frac{z^2 + (z - 1)^3}{(e^z - 1) \cos y}.$

LIMITE E CONTINUIDADE

A definição de limite que daremos agora é formalmente a mesma dos cursos de Cálculo e Análise na reta. E, como veremos, sua importância é de natureza teórica, pois ela permite provar todos os resultados que são essenciais à construção da teoria do limite.

Seja f uma função com domínio D . Desejamos atribuir significado preciso à expressão “ f tem limite L com z tendendo a z_0 ”. Isto deverá significar que a distância $|f(z) - L|$ entre $f(z)$ e L pode ser feita arbitrariamente pequena, à custa de restringir z a uma vizinhança conveniente de z_0 . Mas a variável z apenas aproxima z_0 , sem nunca assumir este valor. É claro também que z deve pertencer ao domínio da função e z_0 deve ser ponto de acumulação desse domínio. Essas observações ajudam a bem compreender

a definição que damos a seguir. (Veja a Fig. 2.3.)

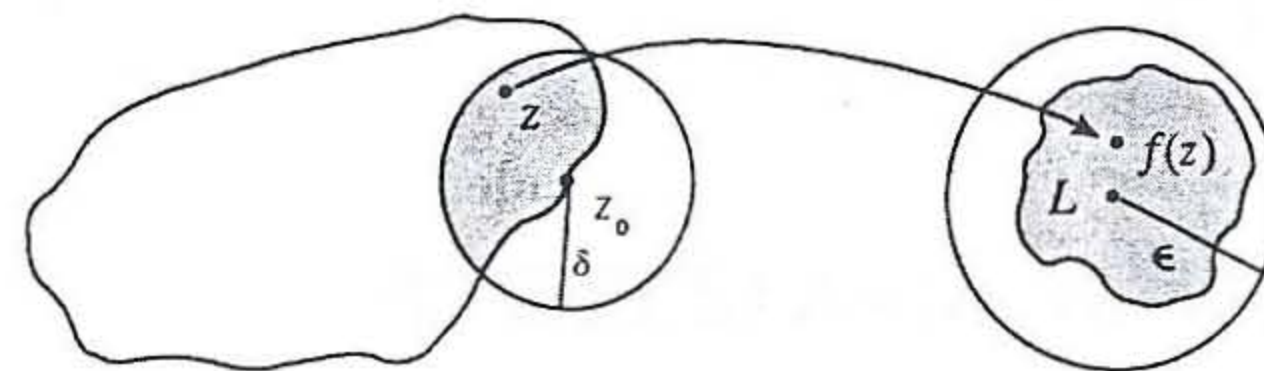


Fig. 2.3

2.1. Definição. Seja z_0 um ponto de acumulação do domínio D de uma função f . Diz-se que f tem limite L com z tendendo a z_0 se dado qualquer $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$z \in D, 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \epsilon;$$

ou ainda, de maneira equivalente:

$$z \in D \cap V'_\delta(z_0) \Rightarrow f(z) \in V_\epsilon(L).$$

Escreve-se:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L.$$

Sendo essa definição formalmente a mesma que damos para funções reais, ela se reduz a este caso quando todos os números envolvidos são reais. Por exemplo, a função $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ está definida para todo número real $x \neq 0$; e, como o leitor deve se lembrar do seu curso de Cálculo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Este é um exemplo típico de função que tem limite num ponto sem estar definida neste ponto; ele evidencia bem o fato de que o limite L nada tem a ver com o valor da função no ponto z_0 .

Quando o ponto z_0 pertence ao domínio de f e $L = f(z_0)$, dizemos que f é contínua no ponto z_0 e escrevemos:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Neste caso não há por que excluir o ponto $z = z_0$ na definição de limite.

Com essa definição de continuidade, a função que consideramos há pouco,

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

seria contínua no ponto $x = 0$ se ela fosse definida nesse ponto com valor $f(0) = 1$. É por isso que se costuma estender a função f aqui considerada, atribuindo-lhe o valor 1 na origem.

2.2. Exemplos. Usando a Definição 2.1, vamos mostrar que a função

$$f(z) = \frac{z + 3i}{2}$$

é contínua no ponto $z_0 = 2 - i$. Temos:

$$|f(z) - f(z_0)| = \left| \frac{z + 3i}{2} - (1 + i) \right| = \frac{|z - (2 - i)|}{2}.$$

Daqui segue-se que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = 2\varepsilon$ para termos

$$|z - (2 - i)| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

(Observe que esta implicação vale também no sentido inverso, mas nem sempre é assim, como veremos no Exemplo 2.3 adiante.)

Se, ao invés da função f anterior, considerarmos a função

$$g(z) = \begin{cases} 0 & \text{para } z = 2 - i. \\ \frac{z + 3i}{2} & \text{para } z \neq 2 - i. \end{cases}$$

o limite com $z \rightarrow 2 - i$ será o mesmo que no caso da função f , porém diferente do valor de g no ponto $2 - i$.

2.3. Exemplo. Ainda usando a Definição 2.1, vamos mostrar que

$$\lim_{z \rightarrow 2i} (z^2 + 3z) = -4 + 6i.$$

De fato, temos:

$$\begin{aligned} |(z^2 + 3z) - (-4 + 6i)| &= |(z^2 + 4) + 3(z - 2i)| \\ &= |(z - 2i)(z + 2i) + 3(z - 2i)| \\ &= |z - 2i||z + 3 + 2i| \leq |z - 2i|(|z| + |3| + |2i|) \\ &= |z - 2i|(|z| + 5). \end{aligned}$$

Como z ficará restrito a uma vizinhança de $2i$, podemos, desde agora, supor $|z| < 3$, portanto,

$$|(z^2 + 3z) - (-4 + 6i)| \leq 8|z - 2i|.$$

Esta última expressão será menor do que ε , desde que $|z - 2i| < \varepsilon/8$. Isto parece indicar que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \varepsilon/8$; mas não podemos nos esquecer de que z deve satisfazer a restrição $|z| < 3$. Observando a Fig. 2.4, vemos que esta condição ficará satisfeita se tomarmos $\delta < 1$. Para provar isto, usamos a desigualdade do triângulo, assim:

$$|z| = |(z - 2i) + 2i| \leq |z - 2i| + 2 \leq \delta + 2 < 1 + 2 = 3.$$

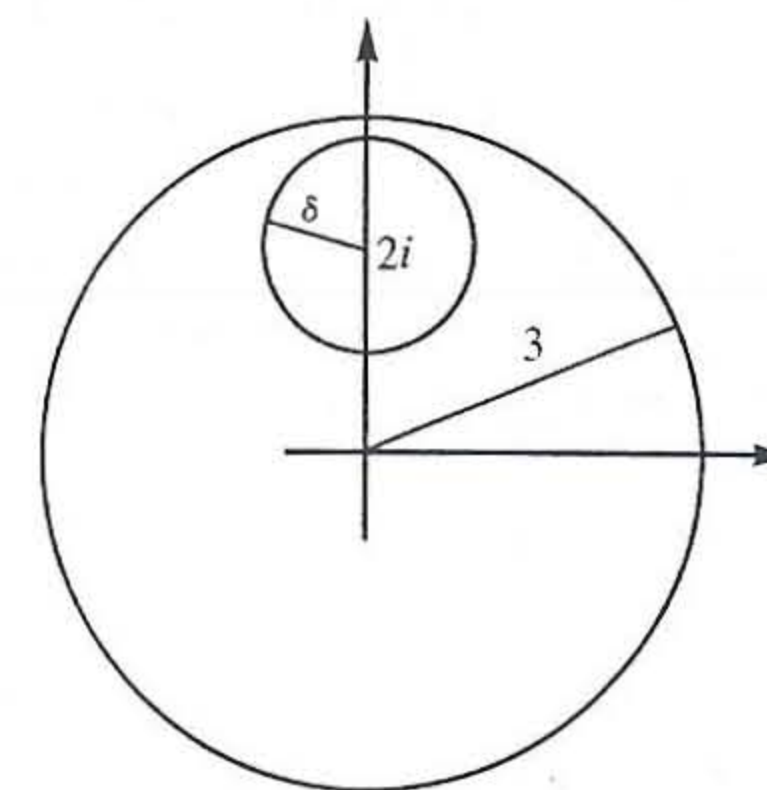


Fig. 2.4

Concluimos que δ deve ser o menor dos números 1 e $\varepsilon/8$, garantindo-nos o resultado desejado:

$$|z - 2i| < \delta \Rightarrow |(z^2 + 3z) - (-4 + 6i)| < \varepsilon.$$

(Observe que esta última implicação não vale no sentido inverso, da direita para a esquerda. E não tem de valer mesmo, pois, para chegarmos a ela utilizamos a desigualdade do triângulo e a estimativa $|z| < 3$. Por exemplo, tomando $\varepsilon = 8$, $\delta = 1$, e $z = 0.9i$, a última desigualdade fica satisfeita, mas não a primeira.)

Como no caso de funções de variável real, a Definição 2.1 pode ser facilmente adaptada ao caso em que z ou $f(z)$ tende a infinito, resultando nas definições que damos a seguir.

2.4. Definições. Diz-se que uma função $f(z)$ com domínio D tem limite finito L com $z \rightarrow \infty$ se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que $|f(z) - L| < \varepsilon$ para todo $z \in D$, $|z| > M$.

Diz-se que $f(z)$ tende a infinito com z tendendo a z_0 se, dado qualquer $K > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(z)| > K$ para todo $z \in D \cap V_\delta'(z_0)$.

Diz-se que $f(z)$ tende a infinito com z tendendo a infinito se, dado qualquer $K > 0$, existe $M > 0$ tal que $|f(z)| > K$ para todo $z \in D$, $|z| > M$.

2.5. Exemplo. A função

$$f(z) = \frac{5z}{2z - 8i} = \frac{5z}{2(z - 4i)}$$

tende a infinito com $z \rightarrow 4i$. Vemos que deve ser assim porque o denominador estará se aproximando de zero. Mas temos de nos certificar de que o numerador permanecerá afastado de zero, daí exigirmos que $|z| > r$, onde r é qualquer número positivo, porém menor do que 4, para que z possa se acomodar numa vizinhança δ de $4i$ (Fig. 2.5). Fixado esse r , teremos:

$$|f(z)| = \frac{5|z|}{2|z - 4i|} > \frac{5r}{2|z - 4i|}$$

Daqui segue-se que, dado qualquer $K > 0$, $|f(z)|$ será maior do que K se

$$\frac{5r}{2|z - 4i|} > K, \text{ ou seja. } 0 < |z - 4i| < \frac{5r}{2K}.$$

Esta condição deve ser satisfeita juntamente com a condição $|z| > r$. Tomando então $0 < |z - 4i| < \delta$, onde $\delta = \min\{5r/2K, 4 - r\}$, obtemos

$$|z| = |4i + (z - 4i)| \geq 4 - |z - 4i| > 4 - \delta > 4 - (4 - r) = r,$$

logo,

$$0 < |z - 4i| < \delta \Rightarrow |f(z)| > K.$$

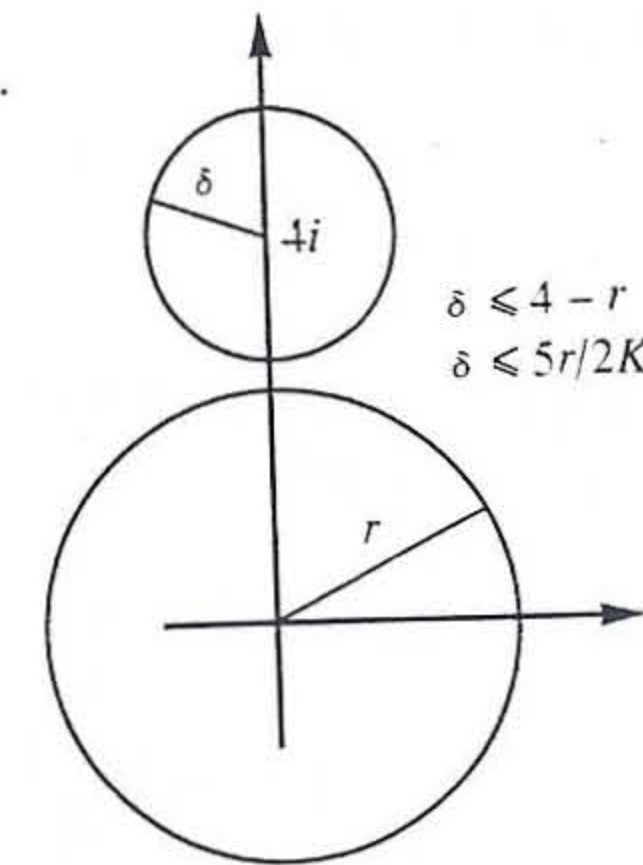


Fig. 2.5

2.6. Exemplo. Vamos provar que

$$f(z) = \frac{3iz + 5}{2z - i} \rightarrow 3i/2 \text{ com } z \rightarrow \infty.$$

De fato,

$$\left| f(z) - \frac{3i}{2} \right| = \left| \frac{3iz + 5}{2z - i} - \frac{3i}{2} \right| = \frac{7}{2|2z - i|} \leq \frac{7}{2(2|z| - 1)}.$$

Observe que esta última desigualdade só é correta no pressuposto de que $|z| > 1/2$, como admitimos a partir de agora. Observe também que

$$\left| f(z) - \frac{3i}{2} \right| \leq \frac{7}{2(2|z| - 1)} < \varepsilon \text{ se } |z| > \frac{1}{2} \left(\frac{7}{2\varepsilon} + 1 \right).$$

Assim, com

$$M = \max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left(\frac{7}{2\varepsilon} + 1 \right) \right\}$$

obtemos o resultado desejado:

$$|z| > M \Rightarrow \left| f(z) - \frac{3i}{2} \right| < \varepsilon.$$

Poderíamos também ter simplificado um pouco mais, tomando $|z| > 1$, donde $2|z| - 1 > |z|$; portanto,

$$\left| f(z) - \frac{3i}{2} \right| \leq \frac{7}{2(2|z| - 1)} < \frac{7}{2|z|},$$

que é $< \varepsilon \Leftrightarrow |z| > 7/2\varepsilon$. de forma que, pondo $M = \max\{1, 7/2\varepsilon\}$, teríamos, como antes,

$$|z| > M \Rightarrow \left| f(z) - \frac{3i}{2} \right| < \varepsilon.$$

2.7. Exemplo. Vamos provar agora que

$$f(z) = \frac{z^2 - i}{3z + 5} \rightarrow \infty \text{ com } z \rightarrow \infty.$$

Com a restrição $|z| > 5$, teremos:

$$|f(z)| = \frac{|z^2 - i|}{|3z + 5|} \geq \frac{|z|^2 - 1}{3|z| + 5} > \frac{|z|^2 - 1}{4|z|} > \frac{|z|^2 - |z|^2/2}{4|z|} = \frac{|z|}{8}.$$

Dado $K > 0$, basta então fazer $|z| > 8K$ e $|z| > 5$ para termos $|f(z)| > K$, isto é, sendo M o maior dos números 5 e $8K$, teremos:

$$|z| > M \Rightarrow |f(z)| > K.$$

Como ilustram esses exemplos, para demonstrar, diretamente da definição de limite, que $f(z) \rightarrow L$ com $z \rightarrow z_0$, temos de obter uma desigualdade do tipo $|f(z) - L| < K|z - z_0|$. Conseguimos isto por meio de simplificações, à custa de desigualdades triangulares do tipo $|a + b| \leq |a| + |b|$ em numeradores, e do tipo $|a + b| \geq |a| - |b|$ em denominadores. Evidentemente, neste último caso é preciso que $|a|$ seja maior do que $|b|$. Para obter uma desigualdade do tipo $|f(z)| > K$, devemos inverter o uso das desigualdades triangulares.

EXERCÍCIOS

Estabeleça, diretamente da definição, os limites indicados nos Exercs. 1 a 9.

1. $\lim_{z \rightarrow -3i} (z^2 - 5z) = -9 + 15i$.
2. $\lim_{z \rightarrow -2i} (2z + y^2) = 4$.
3. $\lim_{z \rightarrow i} \frac{4z + i}{z + 1} = \frac{5i}{1 + i}$.
4. $\lim_{z \rightarrow i} \frac{7}{z^2 + 1} = \infty$.
5. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2 - 1}{z - 3} = \infty$.
6. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{6z + 7}{2z - 3} = 3$.
7. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z + 1}{z^2 - 7} = 0$.
8. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^3 - 3z^2 + 1}{z^2 + 5z - 3} = \infty$.
9. $\lim_{z \rightarrow i} \frac{6z + 7}{2z - 3} = 3$.

10. Sendo a e b números complexos constantes, prove que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (az + b) = az_0 + b \text{ e } \lim_{z \rightarrow z_0} (az^2 + bz + c) = az_0^2 + bz_0 + c.$$

11. Prove que $\lim_{z \rightarrow z_0} az^n = az_0^n$, onde a é uma constante complexa e n um inteiro positivo.
12. Prove que um polinômio de grau n ,

$$P(z) = a_n z^n - a_{n-1} z^{n-1} - \dots + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

tende a ∞ com $z \rightarrow \infty$.

13. Prove que o quociente de dois polinômios,

$$f(z) = \frac{a_m z^m - a_{m-1} z^{m-1} - \dots + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0}, \quad a_m b_n \neq 0,$$

tende a zero, a a_m/b_n ou a ∞ , com $z \rightarrow \infty$, conforme seja $m < n$, $m = n$ ou $m > n$, respectivamente.

14. Prove que a função $w = \sqrt{z}$ é contínua em todo ponto z .
15. Prove que a função $w = \lim 1/z$ é contínua em todo ponto $z \neq 0$.
16. Prove que a função $w = \lim 1/(z - \alpha)$ é contínua em todo ponto $z \neq \alpha$.
17. Prove que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |L|$.

SUGESTÕES

2. Lembre-se de que $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ e $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$. Supondo, de início, $|z - z_0| < 1$, prove que $|x| < 1$ e $|y| < 3$. Então,

$$\begin{aligned} |(2x + y^2) - 4| &= |2x + (y - 2)(y + 2)| \\ &\leq 2|x| + |y - 2|(|y| + 2) \\ &\leq 5|x| + 5|y - 2| \leq 10|z - 2i|. \end{aligned}$$

8. Observe que, sendo, digamos, $|z| \geq 5$, então,

$$\left| \frac{z^3 - 3z^2 + 1}{z^2 + 5z - 3} \right| \geq \frac{|z|^3 - |3z^2 + 1|}{|z|^2 + 5|z| + 3} \geq \frac{|z|^3 - 3|z|^2 - 1}{|z|^2 + 5|z| + 3} \geq \frac{|z|^3 - 3|z|^3/5 - |z|^3/5}{|z|^2 + 5|z|^2 + |z|^2} = \dots$$

11. Lembre-se de que $z^n - z_0^n = (z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \dots + z_0^{n-1})$.

12. Observe:

$$|P(z)| \geq |z|^n \left[|a_n| - \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| \right].$$

Faça o último parêntese menor do que $|a_n|/2$.

14. Sendo $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \neq 0$ e $z = r e^{i\theta}$, as funções \sqrt{z} e $\sqrt{z_0}$ devem ser entendidas como

$$\sqrt{z_0} = r_0^{1/2} e^{i\theta_0/2} \quad \text{e} \quad \sqrt{z} = r^{1/2} e^{i\theta/2},$$

θ variando numa vizinhança de θ_0 ; por exemplo, $|\theta - \theta_0| < \pi/2$. Observe que

$$\sqrt{z} - \sqrt{z_0} = \frac{z - z_0}{\sqrt{z} + \sqrt{z_0}},$$

$$|\sqrt{z} + \sqrt{z_0}|^2 = (\sqrt{z} - \sqrt{z_0})(\overline{\sqrt{z}} - \overline{\sqrt{z_0}}) = r + r_0 + 2\sqrt{rr_0} \cos[(\theta - \theta_0)/2] > r_0,$$

desde que se tome $|z - z_0| < \delta = r_0$. Faça uma figura para entender o que se passa.

15. Observe que

$$\left| \frac{1}{z} - \frac{1}{z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{|z z_0|} < \frac{2|z - z_0|}{|z_0|^2},$$

desde que $|z| > |z_0|/2$. Prove que isto acontece tomando $|z - z_0| < \delta = |z_0|/2$.

PROPRIEDADES DO LIMITE

As propriedades do limite, relativas aos limites da soma, do produto, do quociente etc., já conhecidas no caso de funções de variáveis reais, permanecem válidas para funções de variável complexa, e são estabelecidas como no caso de variável real. É o que veremos agora.

2.8. Teorema. Se f e g têm limites finitos com $z \rightarrow z_0$ (digamos, $\lim f = F$ e $\lim g = G$), então

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z); \quad (2.1)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \lim_{z \rightarrow z_0} g(z); \quad (2.2)$$

$$\text{se } \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0, \text{ então } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)}. \quad (2.3)$$

Demonstração de (2.1). Observe que

$$\begin{aligned} |f(z) + g(z) - (F + G)| &= |(f(z) - F) + (g(z) - G)| \\ &\leq |f(z) - F| + |g(z) - G|, \end{aligned}$$

de sorte que, dado $\varepsilon > 0$, $|f(z) + g(z) - (F + G)|$ será $< \varepsilon$ se fizermos $|f(z) - F| < \varepsilon/2$ e $|g(z) - G| < \varepsilon/2$. Ora, sendo D_f e D_g os domínios de f e g , respectivamente, existem $\delta' > 0$ e $\delta'' > 0$ tais que

$$z \in D_f \cap V_{\delta'}(z_0) \Rightarrow |f(z) - F| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$z \in D_g \cap V_{\delta''}(z_0) \Rightarrow |g(z) - G| < \frac{\varepsilon}{2},$$

Então, valem essas desigualdades se tomarmos

$$z \in D_f \cap D_g \cap V_{\delta}(z_0),$$

onde $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$, pois $\delta \leq \delta'$ e $\delta \leq \delta''$. Assim,

$$z \in D_f \cap D_g \cap V_{\delta}(z_0) \Rightarrow |f(z) + g(z) - (F + G)| < \varepsilon,$$

o que completa a demonstração.

Deixamos as demonstrações das propriedades (2.2) e (2.3) para os exercícios. O leitor poderá demonstrá-las com a ajuda dos resultados do teorema seguinte.

2.9. Teorema. 1) Se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \neq 0$, então existe uma vizinhança $V_{\delta}(z_0)$ na qual $f(z)$ é limitada.

2) com a mesma hipótese, existe $\delta > 0$ tal que

$$z \in D_f \cap V_{\delta}(z_0) \Rightarrow |f(z)| > |L|/2.$$

Demonstração. Da hipótese segue-se que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$z \in D_f \cap V_{\delta}(z_0) \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon.$$

Então, com as mesmas restrições em z ,

$$|f(z)| = |L + [f(z) - L]| \leq |L| + |f(z) - L| < |L| + \varepsilon.$$

Isto prova que a função é limitada pela constante $|L| + \varepsilon$.

Para provar a segunda parte, tomemos $\varepsilon = |L|/2$. Teremos, com as mesmas restrições em z :

$$\begin{aligned} |f(z)| = |L + [f(z) - L]| &\geq |L| - |f(z) - L| \\ &> |L| - \varepsilon = |L| - |L|/2 = |L|/2, \end{aligned}$$

o que completa a demonstração.

Conseqüência imediata dos teoremas anteriores são as propriedades das funções contínuas enunciadas a seguir.

2.10. Teorema. *A soma e o produto de funções contínuas são funções contínuas.*

O quociente de duas funções f e g , contínuas num ponto z_0 , é uma função contínua em z_0 , desde que $g(z_0)$ não se anule.

Vale também a propriedade da função composta, enunciada a seguir e cuja demonstração deixamos para os exercícios.

2.11. Teorema. *Seja g uma função cujo domínio contenha um ponto z_0 e cuja imagem esteja contida no domínio de uma função f . Nestas condições, se g for contínua em z_0 e f contínua em $g(z_0)$, então a função composta $f(g(z))$ será contínua no ponto z_0 .*

Existe uma importante relação entre o limite de uma função complexa e os limites de suas partes real e imaginária, que consideramos a seguir.

2.12. Teorema. *Seja $f = u + iv$ uma função com domínio D , e seja $L = U + iV$. Então*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \quad (2.4)$$

se e somente se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} u(x, y) = U \quad \text{e} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} v(x, y) = V. \quad (2.5)$$

Demonstração. Suponhamos satisfeita a condição (2.4). Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$z \in D \cap V_\delta(z_0) \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon. \quad (2.6)$$

Como $u - U = \operatorname{Re}(f - L)$ e $v - V = \operatorname{Im}(f - L)$, temos:

$$|u - U| \leq |f - L| \quad \text{e} \quad |v - V| \leq |f - L|.$$

Daqui e de (2.6) segue-se que $z \in D \cap V_\delta(z_0)$ implica

$$|u(x, y) - U| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |v(x, y) - V| < \varepsilon,$$

o que estabelece a condição (2.5).

Reciprocamente, supondo satisfeita a condição (2.5), dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $z \in D \cap V_\delta(z_0)$ implica

$$|u(x, y) - U| < \varepsilon/2 \quad \text{e} \quad |v(x, y) - V| < \varepsilon/2. \quad (2.7)$$

Combinando estas desigualdades com a desigualdade do triângulo, obtemos:

$$|f - L| = |(u - U) + i(v - V)| \leq |u - U| + |v - V|$$

Daqui e de (2.7) segue-se que $z \in D \cap V_\delta(z_0)$ implica

$$|f(z) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

que é a condição (2.4). Isto completa a demonstração.

2.13. Corolário. *Uma função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é contínua num ponto $z_0 = x_0 + iy_0$ se e somente se suas partes real e imaginária forem contínuas nesse ponto.*

EXERCÍCIOS

1. Prove que se as funções $f(z)$ e $g(z)$ têm limites finitos com $z \rightarrow z_0$ (ou $z \rightarrow \infty$), então $\lim[f(z) - g(z)] = \lim f(z) - \lim g(z)$.
2. Prove que se $f(z)$ tem limite finito com $z \rightarrow z_0$ (ou $z \rightarrow \infty$), então $\lim cf(z) = c \lim f(z)$, qualquer que seja a constante c .
3. Prove, por indução, que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{j=1}^n c_j f_j(z) = \sum_{j=1}^n c_j \lim_{z \rightarrow z_0} f_j(z),$$

onde os coeficientes c_j são constantes quaisquer.

4. Prove a propriedade (2.2) do Teorema 2.8.
5. Prove a propriedade (2.3) do Teorema 2.8.
6. Prove que se $f(z) \rightarrow 0$ com $z \rightarrow z_0$ e $g(z)$ é limitada numa vizinhança de z_0 , então $f(z)g(z) \rightarrow 0$ com $z \rightarrow z_0$. Enuncie e prove proposição análoga no caso $z \rightarrow \infty$ em vez de $z \rightarrow z_0$.
7. Prove que se $f(z) \rightarrow \infty$ com $z \rightarrow z_0$ e $|g(z)| > c > 0$ numa vizinhança de z_0 , então $f(z)g(z) \rightarrow \infty$ com $z \rightarrow z_0$. Enuncie e prove proposição análoga no caso $z \rightarrow \infty$ em vez de $z \rightarrow z_0$.
8. Construa dois contra-exemplos, em ambos dos quais $f(z) \rightarrow \infty$ e $f(z)g(z) \rightarrow \infty$ com $z \rightarrow z_0$, porém num dos quais $g(z) \rightarrow 0$ e no outro $g(z)$ não tem limite com $z \rightarrow z_0$. Faça o mesmo com $z \rightarrow \infty$ em vez de $z \rightarrow z_0$.
9. Prove que um polinômio é uma função contínua em todos os pontos; e que uma função racional (quociente de dois polinômios) também é contínua, exceto nos zeros do denominador.

Calcule os limites indicados nos Exercs. 10 a 14.

10. $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^3 - 27}{z - 3}$
11. $\lim_{z \rightarrow -2i} \frac{z^3 - 8i}{z - 2i}$
12. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h}$
13. $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1+z)^{1/4} - 1}{z}$
14. $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1+z)^{1/3} - (1-z)^{1/3}}{z}$

15. Prove o Teorema 2.11.
16. Prove o Teorema 2.8, valendo-se de propriedades análogas para funções reais de duas variáveis reais e do Teorema 2.12.

SUGESTÕES E SOLUÇÕES

4. Observe que

$$\begin{aligned} |f(z)g(z) - FG| &= |f(z)(g(z) - G) + G(f(z) - F)| \\ &\leq |f(z)||g(z) - G| + |G||f(z) - F|. \end{aligned}$$

Seja D o domínio comum de f e g , ou $D = D_f \cap D_g$. Existem números positivos M, δ_1, δ_2 e δ_3 tais que

$$z \in D \cap V_{\delta_1}'(z_0) \Rightarrow |f(z)| < M;$$

$$z \in D \cap V_{\delta_2}'(z_0) \Rightarrow |f(z) - F| < \varepsilon/2|G|;$$

$$z \in D \cap V_{\delta_3}'(z_0) \Rightarrow |g(z) - G| < \varepsilon/2M.$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ para obter:

$$z \in D \cap V_{\delta}'(z_0) \Rightarrow |f(z)g(z) - (FG)| < \varepsilon.$$

5. Considere primeiro o caso $f(z) \equiv 1$. Observe que

$$\left| \frac{1}{g(z)} - \frac{1}{G} \right| = \frac{|g(z) - G|}{|G||g(z)|}$$

e que numa vizinhança $V_{\delta_1}(z_0)$, $|g(z)| > |G|/2$.

12. Use $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ com $a = \sqrt{1+h}$, $b = 1$.
13. Use $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$ com $a = (1+z)^{1/4}$, $b = 1$.

16. Escreva $f = u + iv$, $g = U + iV$, $F = u_0 - iv_0$ e $G = U_0 + iV_0$. Então,

$$f + g - (F + G) = u + U - (u_0 + U_0) + i[v + V - (v_0 + V_0)], \quad fg - FG = \text{etc.}$$

FUNÇÃO ANALÍTICA

A definição de derivada de uma função de variável complexa é formalmente a mesma que no caso de função de variável real. Seja f uma função cujo domínio é uma região R (conjunto aberto e conexo) e seja z um ponto de R . Diz-se que f é derivável no ponto z se existe o limite

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

ou, o que é equivalente, se existe

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}.$$

Quando esse limite existe, ele define uma nova função de z , a derivada ou função derivada da função f , denotada por f' . Assim,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Observe que, para a existência da derivada, o limite acima não pode depender do modo como Δz tende a zero ou w tende a z . Em particular, w pode tender a z ao longo de diferentes raios, todos com origem no ponto z (Fig. 2.6) e o limite deve ser o mesmo.

Como exemplo, vamos mostrar que a função $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ só é derivável em $z = 0$. Com efeito, pondo $\Delta z = re^{i\theta}$ (Fig. 2.7), temos:

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{(z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z} \\ &= \frac{z\overline{\Delta z} + \bar{z}\Delta z + \Delta z\overline{\Delta z}}{\Delta z} = ze^{-2i\theta} + \bar{z} + re^{-i\theta}. \end{aligned}$$

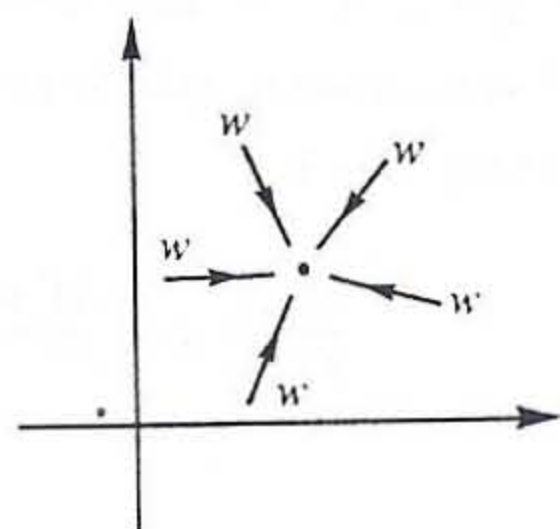


Fig. 2.6

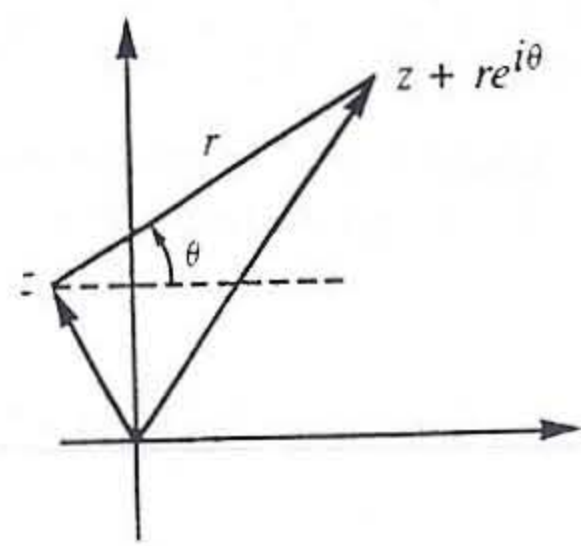


Fig. 2.7

Passando ao limite com $r \rightarrow 0$ e denotando este limite com $f'_\theta(z)$, obtemos:

$$f'_\theta(z) = ze^{-2i\theta} + \bar{z}.$$

Esta é a expressão da *derivada direcional* de f no ponto z . Ela depende do ângulo θ para todo $z \neq 0$, de forma que f não possui derivada ordinária nesses pontos. A derivada de f só existe para $z = 0$: $f'(0) = 0$.

2.14. Definição. Diz-se que uma função f é analítica numa região R se ela é derivável em cada ponto de R ; f é analítica num ponto z_0 se f é

analítica numa região contendo z_0 , por exemplo, numa vizinhança $V_\delta(z_0)$.

As expressões *função holomorfa* e *função regular* são usadas como sinônimas de "função analítica".

De acordo com essa definição, uma função que só possua derivadas em certos pontos isolados não é analítica; assim, a função $f(z) = |z|^2$ considerada há pouco não é analítica, mesmo em $z = 0$, onde ela é derivável.

O conceito de analiticidade requer a existência da derivada em todos os pontos de um conjunto aberto. Sem dúvida, essa condição impõe fortes restrições à função f e tem como consequência uma série de resultados surpreendentes, como veremos gradualmente no decorrer do nosso estudo.

Regras de derivação

Como veremos progressivamente em nosso estudo, todas as funções com que o leitor se familiarizou em seu curso de Cálculo são analíticas, quando convenientemente estendidas ao plano complexo. De verificação imediata é o fato de que uma função constante é analítica e sua derivada é zero. A função $f(z) = z^n$, onde n é um inteiro positivo, é analítica e sua derivada é $f'(z) = nz^{n-1}$; isto se demonstra exatamente como no caso real: por exemplo, usando a fórmula do binômio de Newton, segundo a qual

$$f(z + \Delta z) = (z + \Delta z)^n = z^n - nz^{n-1}\Delta z + \frac{n(n-1)}{2}z^{n-2}(\Delta z)^2 + \dots + (\Delta z)^n.$$

Daqui segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} \\ &= nz^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}z^{n-2}\Delta z + \dots + (\Delta z)^{n-1}. \end{aligned}$$

Fazendo $\Delta z \rightarrow 0$, obtemos o resultado desejado.

Do mesmo modo, a soma e o produto de um número finito de funções analíticas são funções analíticas e as derivadas se calculam de acordo com as regras conhecidas; o quociente de funções analíticas é função analítica nos pontos onde o denominador não se anula e a derivada é dada pela conhecida regra de derivação de um quociente. Vale também a regra de derivação da

função composta ou derivação em cadeia: se g é derivável no ponto z e f é derivável no ponto $g(z)$, então $f(g(z))$ é derivável no ponto z e

$$\frac{d}{dz}f(g(z)) = f'(g(z))g'(z).$$

Todos esses teoremas e outros mais se demonstram como no caso de variáveis reais. A título de ilustração, vamos demonstrar que se uma função f é derivável num ponto z_0 , então f é contínua nesse ponto.

Como f é derivável no ponto z_0 , a expressão

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) = g$$

tende a zero com $z \rightarrow z_0$. Em conseqüência, o último termo da expressão

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)g$$

tende a zero com $z \rightarrow z_0$. Como o penúltimo termo também tende a zero, passando ao limite obtemos o resultado desejado: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Chama-se *função inteira* a toda função que é analítica em todo o plano. Os polinômios são os exemplos mais simples de funções analíticas. Eles são funções inteiras. A seguir vêm as funções racionais, definidas como o quociente de dois polinômios. Estas são analíticas em todos os pontos que não anulam o denominador. Por exemplo, a função

$$f(z) = \frac{(z+2)(3z-1)^2}{z(z-3)(z+i)^2}$$

é analítica em todo o plano, excetuados os zeros do denominador, isto é, $z = 0, 3, -i$.

EXERCÍCIOS

1. Prove que a soma de um número finito de funções analíticas é analítica e a derivada da soma é a soma das derivadas das parcelas.
2. Prove que o produto de duas funções analíticas f e g é função analítica, com derivada $(fg)' = f'g + fg'$. Prove, por indução, a regra de derivação de Leibniz:

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + n f^{(n-1)}g' + \frac{n(n-1)}{2} f^{(n-2)}g'' + \dots + fg^{(n)} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f^{(n-j)} g^{(j)}$$

3. Prove que o quociente de duas funções analíticas f e g num ponto z , onde $g(z) \neq 0$, é função analítica e $(f/g)' = (gf' - fg')/g^2$.
4. Estabeleça a regra de derivação da função composta, ou regra da cadeia: se g é derivável no ponto z e f é derivável no ponto $g(z)$, então $f(g(z))$ é derivável no ponto z e $\frac{d}{dz}f(g(z)) = f'(g(z))g'(z)$.

Calcule as derivadas das funções dadas nos Exercs. 5 a 7.

$$5. f(z) = 1 - z^2 + 4iz^5; \quad 6. f(z) = (z^2 - i)^3(iz + 1)^2; \quad 7. f(z) = \frac{z - 3i}{z + 3i}$$

8. Prove, por indução, que $(z^n)' = nz^{n-1}$, para todo inteiro positivo n .
9. Prove que $(z^n)' = nz^{n-1}$ vale também para os inteiros negativos n .
10. Sendo $z \neq 0$, prove que $(1/z)' = -1/z^2$.
11. Prove, por indução, que

$$\frac{d^n}{dz^n} \frac{1}{z} = \frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}}$$

SUGESTÕES

10. É preciso provar que a expressão

$$\frac{1}{h} \left(\frac{1}{z+h} - \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{z^2} = \frac{h}{z^2(z+h)}$$

tende a zero com $h \rightarrow 0$. Dado $\varepsilon > 0$, é preciso encontrar $\delta > 0$ etc. Observe que $|z+h| \geq |z| - |h| > |z|/2$, desde que se tome $|h| < |z|/2$.

AS EQUAÇÕES DE CAUCHY-RIEMANN

Seja $f = u + iv$ uma função derivável num ponto $z = x + iy$. Então, o quociente

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

tem limite $f'(z)$ com $\Delta z \rightarrow 0$, independentemente do modo como Δz tende a zero. Em particular, podemos fazer Δz tender a zero por valores reais $\Delta z = k$ e, separadamente, por valores imaginários $\Delta z = it$ (Fig. 2.8). Obtemos, respectivamente,

$$f'(z) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x+k, y) - u(x, y) + i[v(x+k, y) - v(x, y)]}{k}$$

e

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y+t) - u(x, y) - i[v(x, y+t) - v(x, y)]}{it}$$

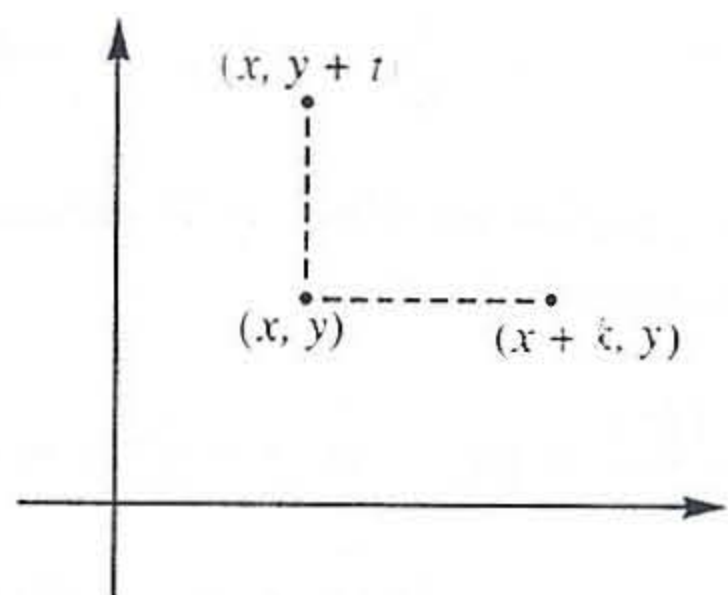


Fig. 2.8

De acordo com o Teorema 2.9 (p. 45), a existência desses limites implica a existência, separadamente, dos limites das partes reais e das partes imaginárias das expressões sob limites, isto é,

$$f'(z) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x+k, y) - u(x, y)}{k} - i \lim_{k \rightarrow 0} \frac{v(x+k, y) - v(x, y)}{k}$$

e

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x, y+t) - v(x, y)}{t} - i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y+t) - u(x, y)}{t}$$

Em conseqüência, as funções u e v possuem derivadas parciais no ponto (x, y) , e valem nesse ponto as seguintes relações:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}; \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

Igualando as partes reais e as partes imaginárias, obtemos daqui as chamadas *equações de Cauchy-Riemann*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.8)$$

A análise acima mostra que as equações de Cauchy-Riemann são uma condição necessária para a existência da derivada de uma função f . Mas

elas não são suficientes para garantir a existência dessa derivada. Como exemplo disto, consideremos a função

$$f(z) = \sqrt{|xy|}$$

onde, como sempre, $z = x + iy$. Temos aqui $t = 0$, portanto, $v_x = v_y = 0$. Por outro lado, $u = \sqrt{|xy|}$, donde $u(k, 0) = u(0, 0) = 0$, logo,

$$u_x(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(k, 0) - u(0, 0)}{k} = 0.$$

Analogamente, $u_y(0, 0) = 0$. Vemos então que as equações de Cauchy-Riemann estão satisfeitas no ponto $z = 0$. Não obstante isto, f não é derivável em $z = 0$. De fato, pondo $\Delta z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, obtemos:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \frac{\sqrt{|\cos\theta \sin\theta|}}{e^{i\theta}} = [(\sin 2\theta)/2]^{1/2} e^{-i\theta}.$$

Esta é a expressão da derivada de f na direção $(\cos\theta, \sin\theta)$. Como se vê, ela depende de θ ; logo, $f'(0)$ não existe.

Condição necessária e suficiente

Como acabamos de ver, as equações de Cauchy-Riemann são uma condição necessária, porém não suficiente, para que uma função f tenha derivada. Entretanto, se a elas juntarmos a condição de que as derivadas de u e v sejam contínuas numa região R , obtemos uma caracterização muito importante das funções analíticas em termos dessas equações. É o que vamos considerar no teorema seguinte.

2.15. Teorema. *Sejam $u(x, y)$ e $v(x, y)$ funções reais com derivadas parciais contínuas numa região R . Então, uma condição necessária e suficiente para que a função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ seja analítica em R é que as equações de Cauchy-Riemann estejam aí satisfeitas.*

Demonstração. A necessidade da condição foi demonstrada acima, de forma que só nos resta provar que a condição é suficiente. Para isto vamos considerar um ponto $z = x + iy \in R$ e um número $\delta > 0$ tal que a vizinhança

$V_\delta = \{(x+k+i(y+t)): k^2+t^2 < \delta^2\}$ esteja toda contida em R , como ilustra a Fig. 2.9; em particular, os segmentos zz_1 e z_1z_2 , onde $z_1 = (x+k, y)$ e $z_2 = (x+k, y+t)$, também estão contidos em R . Isto nos permite aplicar o conhecido teorema da média, segundo o qual,

$$u(x-k, y) - u(x, y) = ku_x(x + \theta_1 k, y)$$

$$u(x+k, y+t) - u(x+k, y) = tu_y(x+k, y + \theta_2 t)$$

onde θ_1 e θ_2 são números convenientes do intervalo $(0, 1)$. Somando essas duas igualdades membro a membro, obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(x+k, y+t) - u(x, y) \\ &= ku_x(x + \theta_1 k, y) + tu_y(x+k, y + \theta_2 t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

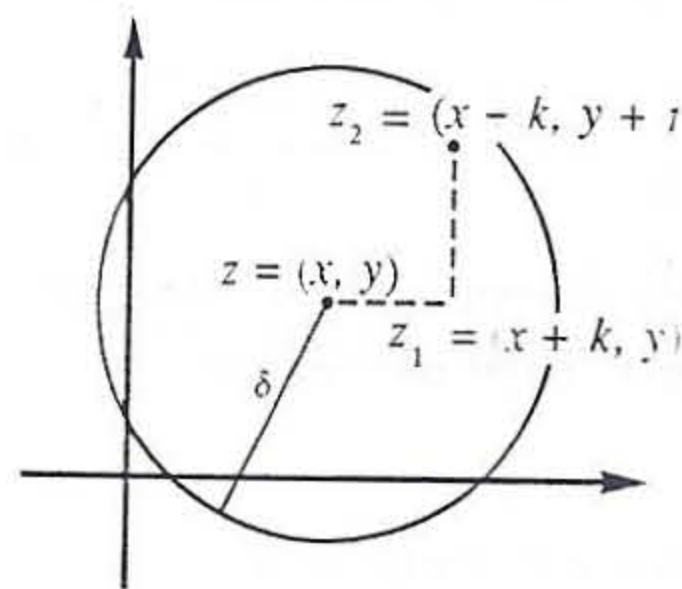


Fig. 2.9

Como as funções u_x e u_y são contínuas, podemos escrever:

$$u_x(x + \theta_1 k, y) = u_x(x, y) + \delta_1$$

e

$$u_y(x+k, y + \theta_2 t) = u_y(x, y) + \delta_2$$

onde δ_1 e δ_2 tendem a zero com $k^2 + t^2 \rightarrow 0$. Substituindo (2.10) em (2.9), obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(x+k, y+t) - u(x, y) \\ &= ku_x + tu_y + k\delta_1 + t\delta_2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

De modo inteiramente análogo, deduzimos:

$$\Delta v = v(x+k, y+t) - v(x, y) = kv_x + tv_y + k\delta_3 + t\delta_4. \quad (2.11)$$

onde δ_3 e δ_4 tendem a zero com $k^2 + t^2 \rightarrow 0$.

Introduzindo a notação $\Delta z = h = k + it$ e usando (2.10) e (2.11), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{\Delta u + i\Delta v}{h} = \frac{(ku_x + itv_y) + i(kv_x - itv_y)}{h} \\ &+ \frac{k}{h}(\delta_1 + i\delta_3) + \frac{t}{h}(\delta_2 + i\delta_4). \end{aligned}$$

Usamos agora as equações de Cauchy-Riemann para substituir v_y e u_y por u_x e v_x , respectivamente. Assim,

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = (u_x + iv_x) + \frac{k}{h}(\delta_1 + i\delta_3) + \frac{t}{h}(\delta_2 + i\delta_4). \quad (2.12)$$

Finalmente, observamos que $|k/h| \leq 1$ e $|t/h| \leq 1$, enquanto $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ e δ_4 tendem a zero com $\Delta z = h \rightarrow 0$, de forma que, passando ao limite em (2.12) com $h \rightarrow 0$, concluímos que a derivada $f'(z)$ existe e é dada por $u_x + iv_x$. Isto completa a demonstração.

Deixamos para os exercícios a tarefa de demonstrar o corolário seguinte. (Exerc. 1 adiante.)

2.16. Corolário. *Uma função com derivada zero em toda uma região é constante; e é também constante uma função que só assume valores reais em toda uma região; ou ainda, uma função cujo módulo seja constante numa região.*

Cauchy-Riemann em coordenadas polares

Veremos agora que as equações de Cauchy-Riemann, quando escritas em coordenadas polares, assumem a seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \quad (2.13)$$

que é uma forma muito útil em várias aplicações.

Um modo de justificar essa forma das equações de Cauchy-Riemann baseia-se no fato seguinte: em cada ponto $P = (x, y)$ de coordenadas polares

(r, θ) introduzimos um sistema cartesiano PXY , de eixos PX e PY como indica a Fig. 2.10. Neste novo sistema, as equações de Cauchy-Riemann assim se escrevem:

$$\frac{\partial u}{\partial X} = \frac{\partial v}{\partial Y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial Y} = -\frac{\partial v}{\partial X}.$$

Como se vê, $\partial X = \partial r$ e $\partial Y = r\partial\theta$. Substituindo acima, vem:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}.$$

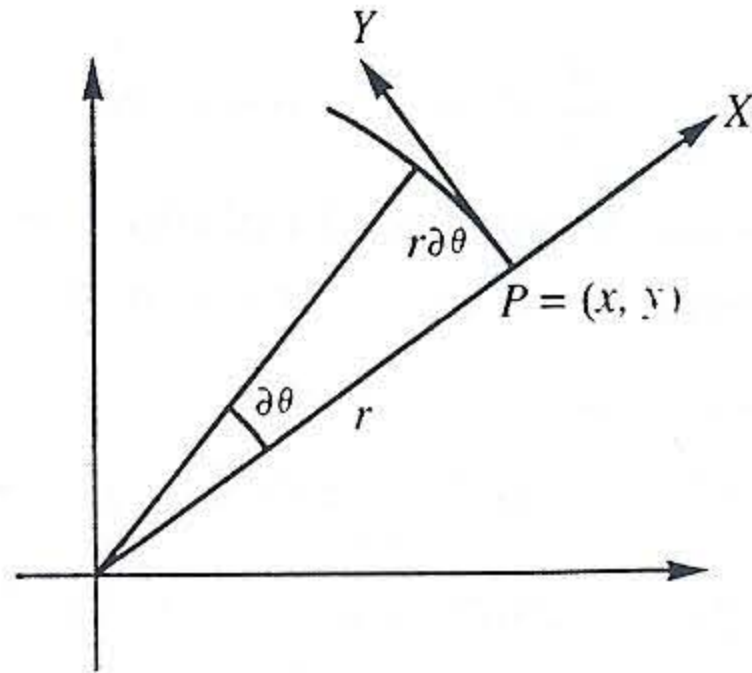


Fig. 2.10

Para a demonstração analítica das equações (2.13), utilizamos as fórmulas de transformação,

$$x = r \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \sin \theta, \quad (2.14)$$

que definem implicitamente r e θ como funções de x e y . Derivando-as com relação a x , obtemos:

$$1 = \frac{\partial r}{\partial x} \cos \theta - r \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial r}{\partial x} \sin \theta + r \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

Daqui segue-se que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta \quad \text{e} \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}.$$

De modo análogo, derivando (2.14) em relação a y , e resolvendo em relação a $\partial r / \partial y$ e $\partial \theta / \partial y$, encontramos:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta \quad \text{e} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r},$$

de sorte que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Substituindo em (2.8) obtemos:

$$\cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \sin \theta \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

e

$$\sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\cos \theta \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

Multiplicando a primeira destas equações por $\cos \theta$ e a segunda por $\sin \theta$ e somando-as, obtemos a primeira equação em (2.13). Analogamente multiplicando a primeira equação acima por $\sin \theta$ e a segunda por $-\cos \theta$, e somando-as, obtemos a segunda equação em (2.13).

Interpretação geométrica

As equações de Cauchy-Riemann têm um significado geométrico interessante, expresso no teorema seguinte.

2.17. Teorema. Se $f = u - iv$ é analítica numa região R , então as curvas das famílias

$$u(x, y) = \text{const.} \quad \text{e} \quad v(x, y) = \text{const.}$$

se cruzam em ângulo reto em todo ponto $z_0 = x_0 - iy_0$ onde $f'(z_0) \neq 0$.

Demonstração. De fato, como o vetor $\text{grad } u = (u_x, u_y)$ é normal à curva $u(x, y) = u(x_0, y_0)$ no ponto (x_0, y_0) , o vetor $(u_y, -u_x)$ é tangente, pois esses dois vetores são ortogonais (Fig. 2.11):

$$(u_x, u_y) \cdot (u_y, -u_x) = u_x u_y - u_y u_x = 0.$$

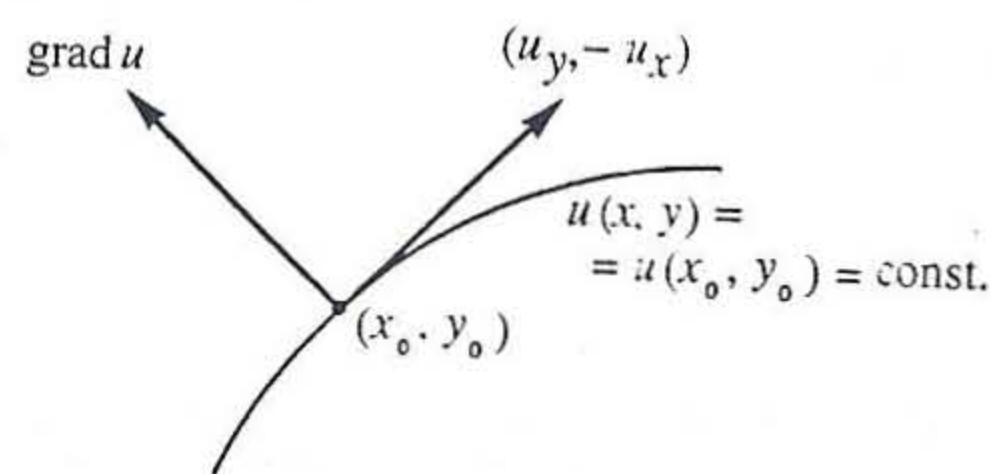


Fig. 2.11

De modo análogo, $(v_y, -v_x)$ é tangente à curva $v(x, y) = \text{const.}$, como ilustra a Fig. 2.12. Fazendo o produto escalar desses dois vetores e usando as equações de Cauchy-Riemann, obtemos:

$$(u_y, -u_x) \cdot (v_y, -v_x) = u_y v_y + u_x v_x = u_y u_x - u_x u_y = 0,$$

que estabelece o resultado desejado.

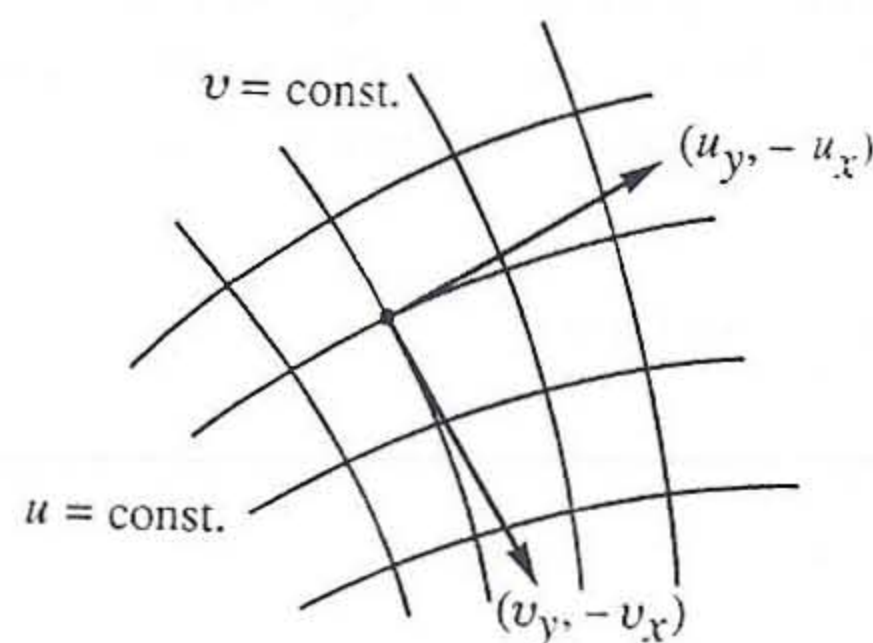


Fig. 2.12

Observe que o resultado anterior se refere a famílias de curvas do plano z que são levadas pela função $w = f(z)$ nas famílias de retas do plano w paralelas ao eixo dos v e ao eixo dos u respectivamente (faça uma figura). Um resultado análogo é verdadeiro para famílias de curvas do plano w que são imagens das famílias de retas coordenadas do plano z , isto é, as famílias de retas paralelas ao eixo dos x e ao eixo dos y respectivamente. (Veja o Exerc. 13 adiante.)

A função exponencial

A função $w = e^z$ é analítica em todo o plano. Para vermos isso, lembramos que, sendo $z = x + iy$, a exponencial se escreve

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y,$$

o que permite verificar a validade das equações de Cauchy-Riemann para todo z . Verifica-se também que as derivadas parciais das partes real e imaginária de e^z são contínuas em todo o plano. Portanto, e^z é analítica, isto é, tem derivada para todo z . Essa derivada é simplesmente $\partial e^z / \partial z$, que resulta ser a própria função e^z , como segue facilmente da expressão acima. Assim,

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z \quad \text{para todo } z.$$

Vamos estudar a transformação do plano $z = x + iy$ no plano $w = u + iv$ pela função exponencial $w = e^z$. Para isso, é conveniente escrever w em forma polar:

$$w = e^x e^{iy} = \rho e^{i\varphi}, \quad \text{isto é, } \rho = e^x, \quad \varphi = y.$$

Mantendo y constante e variando x , w permanece num raio pela origem. Quando x varia de zero a $+\infty$, ρ varia de 1 a $+\infty$ ao longo desse raio; e quando x varia de zero a $-\infty$, ρ varia de 1 a zero (Fig. 2.13).

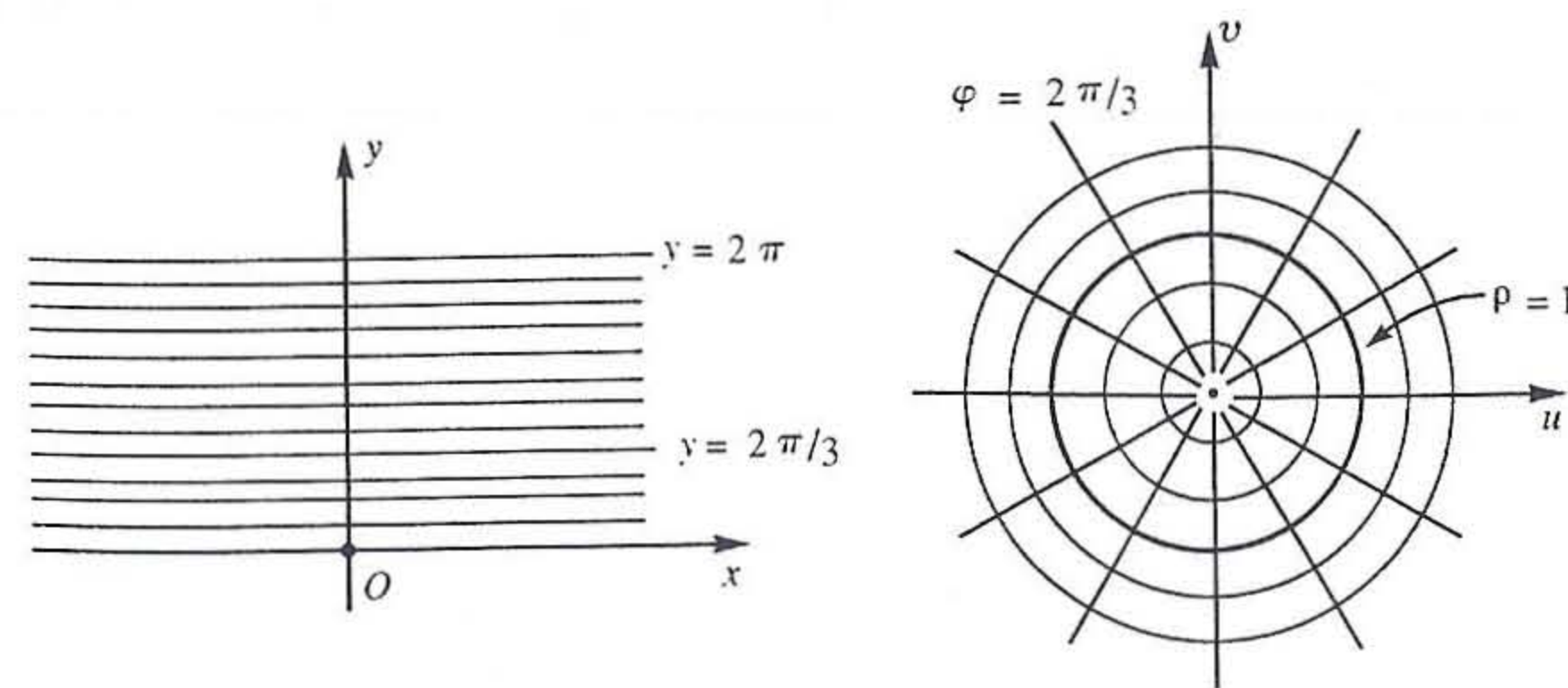


Fig. 2.13

Suponhamos agora que x permaneça constante e y varie no intervalo

$[0, 2\pi)$. Então, ρ permanecerá fixo e o ponto w descreverá um círculo de raio ρ , centrado na origem. Para $x = 0$ esse círculo tem raio unitário; para $x > 0$, ele é exterior ao círculo unitário, e para $x < 0$, ele é interior.

Essas observações comprovam, no caso da função exponencial, o que dissemos ao final da subseção anterior (veja o Exerc. 13 adiante): as imagens das famílias de retas coordenadas $x = \text{const.}$ e $y = \text{const.}$ são ortogonais. Vemos também que toda a faixa do plano complexo z , dada por $0 \leq y < 2\pi$, é levada, de maneira biunívoca (Exerc. 14 adiante) sobre o plano complexo w , excluída a origem deste plano. Como e^z é periódica de período $2\pi i$, qualquer outra faixa $2k\pi \leq y < 2(k+1)\pi$ é transformada exatamente como a faixa $0 \leq y < 2\pi$, no plano w com a origem excluída.

EXERCÍCIOS

1. Prove o Corolário 2.16.
2. Mostre que as equações de Cauchy-Riemann são equivalentes a cada uma das formas seguintes:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Use as equações de Cauchy-Riemann para verificar, no caso de cada uma das funções dadas nos Exercs. 3 a 10, qual é analítica e em que domínio. Em caso positivo, calcule a derivada $f'(z)$. (Observe que esta derivada, quando existe, é dada por $\partial f/\partial x$.)

3. $w = z^3$.
4. $w = e^z$.
5. $w = \bar{z}$.
6. $w = 1/z$.
7. $w = (e^y + e^{-y}) \sin x + (e^y - e^{-y}) \cos x$.
8. $w = e^y (\cos x + i \sin x)$.
9. $w = e^{-y} (\cos x + i \sin x)$.
10. $w = \sqrt{z} = \sqrt{r} [\cos(\theta/2) + i \sin(\theta/2)]$, $0 < \theta < 2\pi$.
11. Dada a função $w = z^2 = u + iv$, faça o gráfico das curvas das famílias $u(x, y) = c_1$ e $v(x, y) = c_2$, para diferentes valores das constantes c_1 e c_2 , e observe que essas curvas se cruzam em ângulo reto.
12. Faça o mesmo para $w = 1/z$.
13. Dada uma função $w = f(z)$, analítica numa região R , considere as seguintes famílias F_1 e F_2 de curvas do plano w , parametrizadas por x e por y , respectivamente:

$$F_1: u = u(x, y_0), v = v(x, y_0) \quad \text{e} \quad F_2: u = u(x_0, y), v = v(x_0, y).$$

Prove que em cada ponto $f(z_0)$, onde $f'(z_0) \neq 0$, essas curvas se cruzam ortogonalmente. Faça um gráfico.

14. Mostre que a função e^z é injetiva em qualquer faixa horizontal do plano, dada por $\alpha \leq y < \alpha + 2\pi$.
15. Vimos que a exponencial é uma função $w = f(z) = u - iv$, analítica em todo o plano e tal que $f'(z) = f(z)$ e $f(0) = 1$. Prove que existe uma e uma só função satisfazendo estas condições, de forma que a função exponencial pode ser por elas definida. (Sugestão: $u_x = u$ e $v_x = v$ são equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem em x , cujas soluções são $u = ge^x$ e $v = he^x$, onde g e h são constantes em relação a x , portanto, podem depender de y . Use as equações de Cauchy-Riemann e obtenha $g'' + g = 0$ e $h'' + h = 0$. Daqui e de $f(0) = 1$, segue-se que $g(y) = \cos y$ e $h(y) = \sin y$.)

AS FUNÇÕES TRIGONÔMÉTRICAS E HIPERBÓLICAS

Vamos introduzir agora as funções trigonométricas e hiperbólicas. Começamos observando que das relações

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad \text{e} \quad e^{-iy} = \cos y - i \sin y$$

decorrem as seguintes fórmulas de Euler:

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \quad \text{e} \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}.$$

Elas são usadas para estender as funções trigonométricas a todo o plano complexo. Assim, definimos:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}.$$

As conhecidas fórmulas de derivação.

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z \quad \text{etc.},$$

seguem das definições acima e de $(e^z)' = e^z$.

As identidades trigonométricas familiares permanecem todas válidas no campo complexo. Assim,

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z,$$

$$\operatorname{sen}^2 z + \operatorname{cos}^2 z = 1,$$

$$\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \operatorname{cos} z_2 + \operatorname{cos} z_1 \operatorname{sen} z_2,$$

$$\operatorname{cos}(z_1 + z_2) = \operatorname{cos} z_1 \operatorname{cos} z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2,$$

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) \quad \text{e} \quad \operatorname{cos} z = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right).$$

As duas primeiras dessas identidades são conseqüências imediatas das definições de seno e co-seno, e as demais seguem dessas definições e das propriedades da função exponencial (Exercs. 4 a 7 adiante).

As funções hiperbólicas, seno e co-seno, são definidas, como no caso de variáveis reais, pelas seguintes expressões:

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{cosh} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Como se vê, seus valores são reais para valores reais de z . Elas surgem naturalmente quando se procura separar as partes real e imaginária das funções $\operatorname{sen} z$ e $\operatorname{cos} z$ (Exercs. 9 e 10 adiante). É fácil ver que $(\operatorname{senh} z)' = \operatorname{cosh} z$ e $(\operatorname{cosh} z)' = \operatorname{senh} z$.

EXERCÍCIOS

1. Mostre que os zeros de $\operatorname{sen} z$ e $\operatorname{cos} z$ são dados, respectivamente, pelas expressões $z = n\pi$ e $z = (n + 1/2)\pi$, n inteiro. Determine os domínios máximos de definição das funções $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{cot} z$, $\operatorname{sec} z$ e $\operatorname{csc} z$.
2. Mostre que $\operatorname{sen} z$ e $\operatorname{cos} z$ são funções periódicas de período 2π , como no caso real.
3. Prove que $\operatorname{cosh} z$ e $\operatorname{senh} z$ são funções periódicas de período $2\pi i$.

Estabeleça as identidades dadas nos Exercs. 4 a 16.

4. $\operatorname{sen}^2 z + \operatorname{cos}^2 z = 1$.
5. $\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \operatorname{cos} z_2 + \operatorname{cos} z_1 \operatorname{sen} z_2$. *Sugestão:* comece pelo 2º membro.
6. $\operatorname{cos}(z_1 + z_2) = \operatorname{cos} z_1 \operatorname{cos} z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$.
7. $\operatorname{sen} z = \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$ e $\operatorname{cos} z = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$.

8. $\operatorname{sen} iz = i \operatorname{senh} z$ e $\operatorname{cos} iz = \operatorname{cosh} z$.
9. $\operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \operatorname{cosh} y + i \operatorname{cos} x \operatorname{senh} y$.
10. $\operatorname{cos}(x + iy) = \operatorname{cos} x \operatorname{cosh} y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$.
11. $\operatorname{cosh}^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$.
12. $|\operatorname{senh}(x + iy)|^2 = \operatorname{senh}^2 x + \operatorname{sen}^2 y$ e $|\operatorname{cosh}(x - iy)|^2 = \operatorname{senh}^2 x + \operatorname{cos}^2 y$.
13. $|\operatorname{cosh}(x + iy)|^2 - |\operatorname{senh}(x + iy)|^2 = \operatorname{cos} 2y$.
14. $\operatorname{senh}(z_1 + z_2) = \operatorname{senh} z_1 \operatorname{cosh} z_2 + \operatorname{cosh} z_1 \operatorname{senh} z_2$.
15. $\operatorname{cosh}(z_1 + z_2) = \operatorname{cosh} z_1 \operatorname{cosh} z_2 + \operatorname{senh} z_1 \operatorname{senh} z_2$.
16. $\operatorname{senh}(z + i\pi) = -\operatorname{senh} z$; $\operatorname{cosh}(z + i\pi) = -\operatorname{cosh} z$; $\operatorname{tgh}(z + i\pi) = \operatorname{tgh} z$.
17. Prove que $|\operatorname{senh} x| \leq |\operatorname{cosh}(x + iy)| \leq \operatorname{cosh} x$.

O LOGARITMO

O *logaritmo* de um número complexo $z = re^{i\theta} \neq 0$, é definido assim:

$$\log z = \log r + i\theta,$$

onde $\log r$ denota o logaritmo real do número $r > 0$. O logaritmo está definido para todo número complexo $z \neq 0$, e se reduz ao logaritmo real quando $\theta = 0$. Usa-se também a notação $\ln z$.

Na realidade, a fórmula acima permite atribuir ao logaritmo vários valores distintos, dependendo do argumento usado para o número z . Por causa disso costuma-se dizer que o logaritmo é uma *função multivalente*.

2.18. Observação. É claro que o valor de uma função tem de ser determinado univocamente, de forma que a expressão "função multivalente", a rigor, é imprópria, mas é usada por ser conveniente: sabemos do que estamos falando. Em contraposição, para enfatizar, ou evitar qualquer dúvida, às vezes usa-se também a expressão "função univalente". Em breve encontraremos outros exemplos de "funções multivalentes" e veremos como torná-las univalentes.

Voltando ao logaritmo, para fazê-lo univalente, lembramos que o argumento de um número complexo $z \neq 0$ só é determinado a menos de múltiplos inteiros de 2π . Seja, pois, θ_0 o valor particular do argumento que esteja no intervalo $[0, 2\pi)$, isto é, $0 \leq \theta_0 < 2\pi$. Então, o argumento genérico é dado por

$$\theta = \theta_0 + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Assim, temos de restringir o argumento de z a um intervalo do tipo

$$2k\pi \leq \theta < 2(k+1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

para que o logaritmo fique bem definido como “função univalente”. Cada valor de k conduz ao que chamamos uma *determinação* ou *ramo* do logaritmo. Denotando com $\log_k z$ tal ramo, teremos:

$$\log_k z = \log r + i\theta, \quad 2k\pi \leq \theta < 2(k+1)\pi.$$

Costuma-se dizer também que o logaritmo fica “especificado” com um determinado valor de k . O ponto $z = 0$ é chamado *ponto de ramificação* de $\log z$, justamente porque, quando um ponto z descreve um círculo centrado na origem e volta ao ponto inicial, a função $\log z$ retorna aumentada de $2\pi i$, isto é, passa de um de seus ramos ao ramo seguinte.

Com o valor $k = 0$ obtemos o que chamamos *valor principal*, *ramo principal*, ou *determinação principal* do logaritmo. Mas convém observar que nada há de especial na escolha do intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$ para especificar o valor principal. Podemos tomar $0 < \theta \leq 2\pi$, $-\pi \leq \theta < \pi$, ou qualquer outro intervalo de comprimento 2π , como $\alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi$ (ou $\alpha \leq \theta < \alpha + 2\pi$) (Fig. 2.14). Em qualquer desses casos, a restrição do argumento a um intervalo de comprimento 2π introduz descontinuidades na função $\log z$ ao longo do raio pela origem e de argumento α . Esse raio é freqüentemente designado um *corte* do plano complexo. Ao considerarmos as restrições $\alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi$, $\alpha \leq \theta < \alpha + 2\pi$, ou $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$, dizemos que o plano foi *cortado* ao longo do raio $z = re^{i\alpha}$.

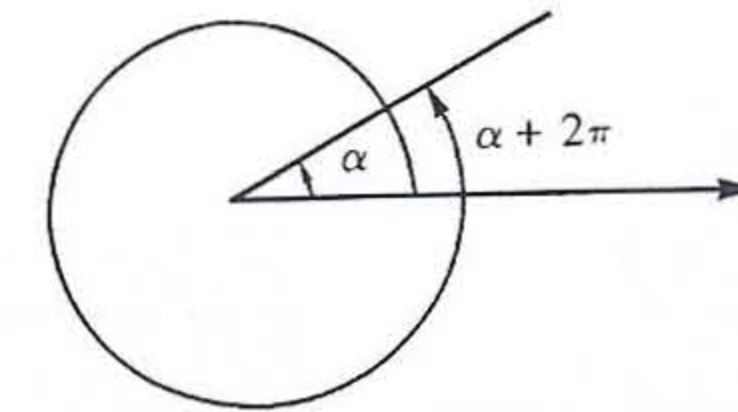


Fig. 2.14

Usando as equações de Cauchy-Riemann na forma polar, é fácil verificar que qualquer ramo do logaritmo é uma função analítica em seu domínio (do qual se exclui o raio que produz o corte, para que o domínio seja um conjunto aberto). Vamos calcular sua derivada:

$$\frac{d \log z}{dz} = \frac{\partial}{\partial x} (\log r + i\theta) = \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (\log r + i\theta).$$

Substituindo os valores $\partial r / \partial x = \cos \theta$ e $\partial \theta / \partial x = -\sin \theta / r$ (já obtidos na p. 58), efetuando os cálculos e simplificando, obtemos:

$$\frac{d \log z}{dz} = \frac{1}{z}.$$

O logaritmo como transformação e sua inversa

É fácil ver que qualquer ramo do logaritmo é uma função univalente e injetiva, definida em todo o plano z , exceto $z = 0$, e tendo como imagem toda uma faixa horizontal do plano w ; e a totalidade dos ramos.

$$z = re^{i\theta}, \quad w = u + iv = \log z = \log r + i\theta,$$

cobre todo o plano w . Os raios $\theta = \text{const.}$ do plano z vão nas retas horizontais $v = \text{const.}$ do plano w ; e os círculos $r = \text{const.}$ são levados nas retas verticais $u = \text{const.}$ (Fig. 2.15). (Compare esta figura com a Fig. 2.13, p. 61.) O círculo $r = 1$ tem por imagem o eixo imaginário $u = 0$; os círculos com $r < 1$ vão nas verticais à esquerda desse eixo, e os círculos com $r > 1$ vão nas verticais à direita do mesmo eixo. Note que a ortogonalidade das

curvas $u(x, y) = \text{const.}$ e $v(x, y) = \text{const.}$ era de se esperar, de acordo com a interpretação geométrica das equações de Cauchy-Riemann (p. 59).

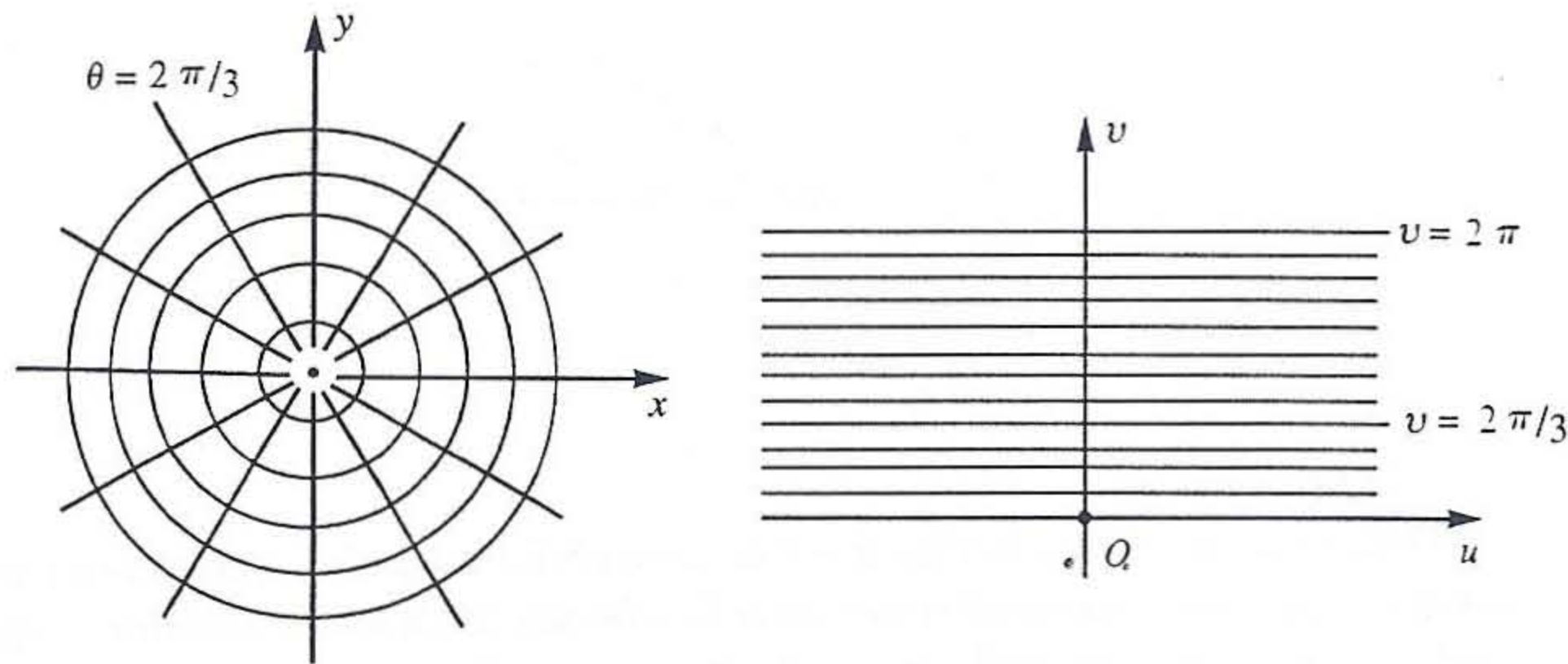


Fig. 2.15

Observe que o ramo principal leva o plano complexo $z \neq 0$ na faixa $0 \leq v < 2\pi$ do plano w ; e, em geral, o ramo k -ésimo leva o plano $z \neq 0$ na faixa $2k\pi \leq v < 2(k+1)\pi$ do plano w . Assim, qualquer ramo do logaritmo é uma função univalente e injetiva, definida em todo o plano, exceto $z = 0$, e tendo como imagem uma faixa horizontal do plano w .

Mostremos, finalmente, que a função exponencial e qualquer ramo do logaritmo são funções inversas uma da outra, desde que o domínio da exponencial seja a faixa horizontal de largura 2π que é imagem do logaritmo. (Veja o que dissemos na p. 62 e a Fig. 2.13.) Para isso, consideremos o ramo

$$w = \log_k z = \log r + i(\theta + 2k\pi), \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Pondo $z = re^{i\theta}$, teremos:

$$e^{\log_k z} = e^w = e^{\log r + i(\theta + 2k\pi)} = re^{i\theta} = z.$$

e

$$\begin{aligned} \log_k e^w &= \log_k \exp[\log r + i(\theta + 2k\pi)] \\ &= \log_k(re^{i\theta}) = \log_k z = \log r + i(\theta + 2k\pi) = w. \end{aligned}$$

Isso prova o resultado desejado.

Propriedades do logaritmo

A fórmula

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2 \tag{2.15}$$

permanece válida, desde que corretamente interpretada. Com efeito, sendo $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, temos:

$$\begin{aligned} \log z_1 + \log z_2 &= [\log r_1 + i(\theta_1 + 2k_1\pi) + \log r_2 + i(\theta_2 + 2k_2\pi)] \\ &= \log(r_1 r_2) + i[(\theta_1 + \theta_2) + 2(k_1 + k_2)\pi]. \end{aligned} \tag{2.16}$$

onde k_1 e k_2 são inteiros arbitrários. Esta última expressão é a forma geral de $\log(z_1 z_2)$, se k_1 e k_2 forem independentes um do outro. Neste caso, a Eq. 2.15 é válida com o seguinte significado: o conjunto dos valores possíveis de $\log(z_1 z_2)$ coincide com o conjunto dos valores possíveis de $\log z_1 + \log z_2$.

Se k_1 e k_2 não forem independentes, como é o caso em que $z_1 = z_2 = z = re^{i\theta}$ e a (2.15) se reduz a

$$\log z^2 = 2 \log z, \tag{2.17}$$

então o segundo membro de (2.17) se reduz a

$$\log r^2 + i[(2\theta) + 2(2k)\pi]$$

onde k é arbitrário. Neste caso, qualquer valor do segundo membro de (2.17) é um valor do primeiro membro, mas não reciprocamente, como é fácil ver.

Observações análogas se aplicam nos casos

$$\log(z_1 \dots z_n) = \log z_1 + \dots + \log z_n \quad \text{e} \quad \log z^n = n \log z,$$

cujas demonstrações ficam a cargo do leitor nos exercícios. Esta última relação, por exemplo, significa que todo valor de $n \log z$ é um valor possível de $\log z^n$, mas não reciprocamente.

Definição de z^α

Dados os números complexos z e α , sendo $z \neq 0$, definimos z^α pela equação

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}. \quad (2.18)$$

Isto significa que $\alpha \log$ é um dos logaritmos de z^α , de sorte que

$$\log z^\alpha = \alpha \log z + 2k\pi i. \quad (2.19)$$

que, para $z > 0$, α real e $k = 0$, é uma fórmula familiar do logaritmo real. A definição (2.18) é então uma extensão natural da noção de potência real de números positivos.

Como o logaritmo é uma função multivalente, z^α é, em geral, multivalente, com o mesmo ponto de ramificação $z = 0$ que $\log z$. Para evidenciar este fato, seja $z = re^{i\theta} = re^{i(\theta_0 - 2k\pi)}$, com $0 \leq \theta_0 < 2\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Substituindo $\log z = (\log r + i\theta_0) + 2k\pi i$ em (2.18), teremos:

$$z^\alpha = e^{\alpha(\log r + i\theta_0)} e^{2\pi(k\alpha)i} = P(z^\alpha) e^{2\pi(k\alpha)i}, \quad (2.20)$$

onde $P(z^\alpha)$ denota o assim chamado *valor principal* da função z^α , obtido com o valor principal de $\log z$ em (2.18). A Eq. 2.20 nos mostra que os possíveis valores z^α são obtidos multiplicando-se o valor principal $P(z^\alpha)$ pelo fator $e^{2\pi(k\alpha)i}$.

Procuremos determinar diferentes valores de k , digamos, k e k' , que resultem no mesmo valor desse fator:

$$e^{2\pi(k\alpha)i} = e^{2\pi(k'\alpha)i}.$$

Isto é equivalente a $e^{2\pi(k-k')\alpha i} = 1$, ou seja, $(k-k')\alpha$ deve ser inteiro: ou ainda, α deve ser racional. Vemos então que, sendo α um número (real ou complexo) não-racional, a função z^α admite infinitos ramos.

Suponhamos agora que α seja racional, digamos $\alpha = p/q$, com p e q primos entre si e $q > 0$. Então o fator $e^{2\pi(kp/q)i}$ assume apenas q valores distintos, dados por $k = 0, 1, \dots, q-1$; e, em consequência, a função

$$z^{p/q} = P(z^{p/q}) e^{2\pi(kp/q)i}$$

também assume apenas q valores distintos para um mesmo $z \neq 0$.

Quando fixamos um ramo do logaritmo em (2.18), z^α torna-se uma função univalente e analítica. Calculamos sua derivada pela regra da cadeia, assim:

$$\begin{aligned} z^\alpha)' &= (e^{\alpha \log z})' = e^{\alpha \log z} (\alpha \log z)' = \frac{\alpha e^{\alpha \log z}}{z} \\ &= \frac{\alpha e^{\alpha \log z}}{e^{\log z}} = \alpha e^{(\alpha-1) \log z} = \alpha z^{\alpha-1} \end{aligned}$$

Em particular,

$$(\sqrt{z})' = \frac{1}{2} z^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{z}}.$$

2.19. Observação. Quando $\alpha = 1/n$, com n inteiro positivo, a fórmula (2.18) nos dá as raízes n -ésimas do número $z = re^{i\theta}$, como era de se esperar. Com efeito, fazendo $\alpha = 1/n$ em (2.18), obtemos:

$$z^{1/n} = e^{(1/n)[\log r + i(\theta + 2q\pi)]} = r^{1/n} e^{i(\theta + 2q\pi)/n}, \quad (2.21)$$

onde q varia no conjunto dos inteiros. Mas isto não é necessário: basta q variar de zero a $n-1$ para obtermos todas as determinações possíveis de $z^{1/n}$, como em (1.4), p. 16, as quais são precisamente as raízes n -ésimas de z .

2.20. Observação. Nesse mesmo caso $\alpha = 1/n$, com n inteiro positivo, a fórmula (2.19) dispensa o termo $2k\pi i$, e deve ser escrita assim:

$$\log z^{1/n} = \frac{1}{n} \log z.$$

Com efeito, de (2.21) obtemos:

$$\log z^{1/n} = \frac{1}{n} \log r + i \left[\frac{\theta}{n} + \left(\frac{q}{n} + k \right) 2\pi \right],$$

onde q varia de zero a $n-1$ e k varia no conjunto dos inteiros. Mas então o número $nk - q = k'$ também estará variando no conjunto dos inteiros. Assim,

$$\log z^{1/n} = \frac{1}{n} [\log r + i(\theta + 2\pi k')] = \frac{1}{n} \log z.$$

As funções trigonométricas inversas

As funções inversas das funções trigonométricas exprimem-se facilmente em termos do logaritmo. Consideremos, por exemplo, a função

$$w = \arccos z,$$

definida por $z = \cos w$, ou seja

$$z = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}.$$

Multiplicando por e^{iw} , reduzimos esta equação à forma

$$(e^{iw})^2 - 2z(e^{iw}) + 1 = 0,$$

donde

$$e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1},$$

e, finalmente,

$$w = \arccos z = -i \log(z + i\sqrt{1 - z^2}).$$

Temos aqui uma função multivalente, cujos ramos particulares são obtidos considerando ramos particulares de $\sqrt{z^2 - 1}$ e do logaritmo que aí aparece.

A derivada da função $\arccos z$ pode ser calculada facilmente a partir da expressão acima, com a ajuda da regra da cadeia. Temos:

$$(\arccos z)' = -i \frac{(z + i\sqrt{1 - z^2})'}{z + i\sqrt{1 - z^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

As demais funções inversas, trigonométricas e hiperbólicas, são obtidas de maneira análoga.

Observamos que as notações $\cos^{-1} z$, $\sin^{-1} z$ etc. são freqüentemente usadas em lugar de $\arccos z$, $\arcsin z$ etc. Elas não devem ser confundidas com $(\cos z)^{-1}$, $(\sin z)^{-1}$ etc.

EXERCÍCIOS

1. Demonstre que $\log \frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2$, no sentido de igualdade de conjuntos de valores, como em (2.15).
2. Defina os ramos do logaritmo a partir de um corte ao longo do semi-eixo real negativo, $-\pi \leq \theta < \pi$, e identifique as imagens do plano z pelos vários ramos obtidos.
3. Mostre que $\log(-1) = (2k + 1)\pi i$ e $\log i = \frac{4k + 1}{2}\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
4. Mostre que, sendo $x \neq 0$,

$$\log(x + iy) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + (\theta_0 + 2k\pi)i,$$

onde θ_0 é uma das determinações de $\arctg(y/x)$. Se $x = 0$, então $y \neq 0$ e θ_0 pode ser tomado igual a $\pm\pi/2$, conforme seja $y > 0$ ou $y < 0$, respectivamente.

Determine todas as raízes das equações dadas nos Exercs. 5 a 10.

5. $e^z = -1$;
6. $e^{2z} = -e$.
7. $e^z = -\sqrt{3} + 3i$.
8. $e^z + 6e^{-z} = 5$.
9. $e^{3z-4} = -1$.
10. $\log z = \pi i/2$.
11. Mostre que, uma vez fixado o argumento da constante $c \neq 0$, a função $w = c^z$ é analítica, com derivada $(c^z)' = c^z \log c$.
12. Estabeleça as seguintes propriedades das potências:

$$z^a z^b = z^{a+b}, \quad z^{-a} = \frac{1}{z^a}, \quad (z^a)^b = z^{ab},$$

onde $z \neq 0$ e a e b são números complexos quaisquer.

13. Demonstre que $|z^r| = |z|^r$, onde $z \neq 0$ e r é um número real qualquer.
14. Mostre que todas as determinações de i^i são reais e dadas por

$$i^i = \exp \frac{-(4k + 1)\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

15. Calcule todas as determinações das seguintes potências:

$$(1 + i)^i; \quad (1 - i)^i; \quad (\sqrt{3} + i)^i; \quad (1 - i\sqrt{3})^i.$$

16. Mostre que $\arcsen z = -i \log(iz + \sqrt{1 - z^2})$, e que $(\arcsen z)' = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$.

17. Mostre que $\operatorname{arctg} z = \frac{i}{2} \log \frac{i + z}{i - z}$, e que $(\operatorname{arctg} z)' = \frac{1}{1 + z^2}$.

18. Determine todas as raízes da equação $\cos z = 3$.

19. Determine todas as raízes da equação $\sen z = 3$.

RESPOSTAS E SUGESTÕES

1. $z = z_1 / z_2 \Leftrightarrow z_1 = z z_2$.
8. Equação do 2º grau para e^z .
18. $z = 2k\pi - i \log(3 \pm 2\sqrt{2})$, onde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Capítulo 3

TEORIA DA INTEGRAL

ARCOS E CONTORNOS

Definimos *arco contínuo* ou simplesmente *arco* como um conjunto C de pontos, dado parametricamente assim:

$$C = \{z(t) = x(t) + iy(t) : a \leq t \leq b\}. \quad (3.1)$$

onde $z(t)$ é uma função contínua de t — ou, o que é equivalente, $x(t)$ e $y(t)$ são funções contínuas de t , t variando no intervalo $[a, b]$.

A representação paramétrica $z = z(t)$ ordena os pontos de C de acordo com os valores crescentes de t , de forma que C é um conjunto ordenado ou orientado (Fig. 3.1a). O mesmo conjunto com orientação oposta é o arco que designamos por $-C$ (Fig. 3.1b), e que possui representação paramétrica

$$z_1(t) = z(-t), \quad -b \leq t \leq -a.$$

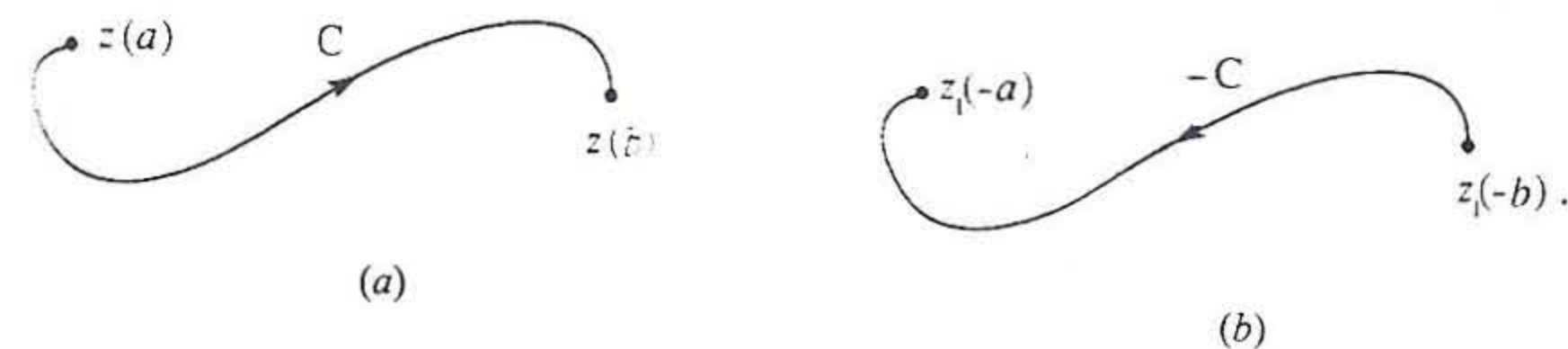


Fig. 3.1

Chama-se *arco de Jordan* ou *arco simples* aquele em que cada ponto

$z(t)$ corresponde a um único valor de t . Intuitivamente, isto significa que, à medida que t varia de a até b , o ponto $z(t)$ percorre a curva C , passando uma só vez por cada um de seus pontos. Quando o arco não é simples, ele contém ao menos um *ponto múltiplo*, assim designado todo ponto proveniente de dois ou mais valores distintos do parâmetro t : $z(t_1) = z(t_2)$, com $t_1 \neq t_2$. Chama-se *curva fechada* a todo arco cujas extremidades $z(a)$ e $z(b)$ coincidam; e *curva fechada simples* ou *curva de Jordan* a toda curva fechada cujos pontos, à exceção das extremidades, sejam todos simples (Fig. 3.2).

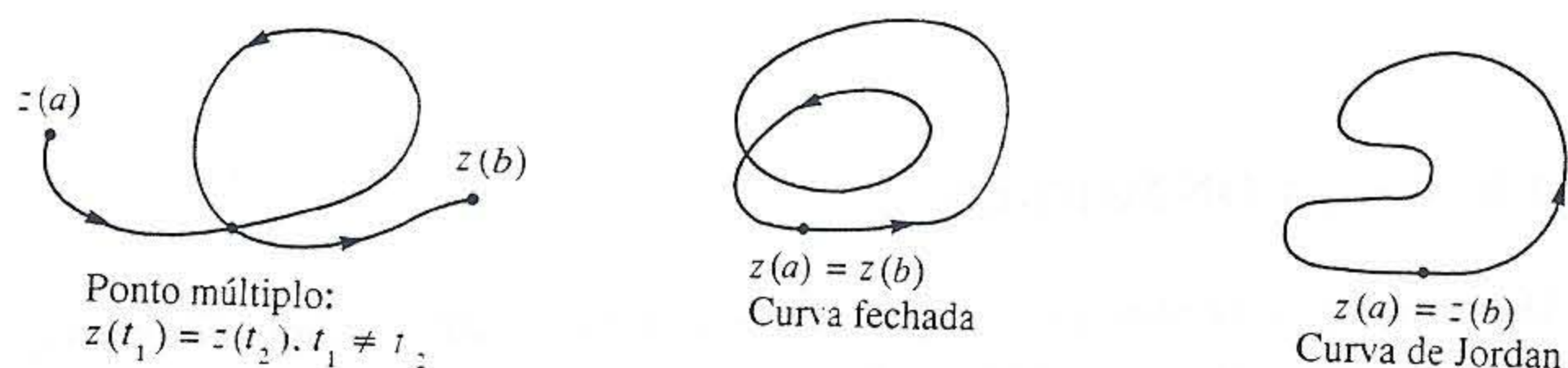


Fig. 3.2

Às vezes teremos necessidade de considerar um arco ou curva como conjunto fechado do plano, no sentido da definição (topológica) que demos à p. 27. Isto não deve ser confundido com o conceito “arco fechado” que acabamos de introduzir.

Vejam alguns exemplos: a equação $z = 1 - it$, para $0 \leq t \leq 2$, representa um arco simples, que é o segmento $[1, 1 - 2i]$, orientado de 1 para $1 - 2i$. (Faça uma figura.)

A equação $z = t^2 + it$, $-\infty < t < \infty$, representa a parábola

$$x = t^2, \quad y = t,$$

ou seja, $x = y^2$, orientada como indica a Fig. 3.3.

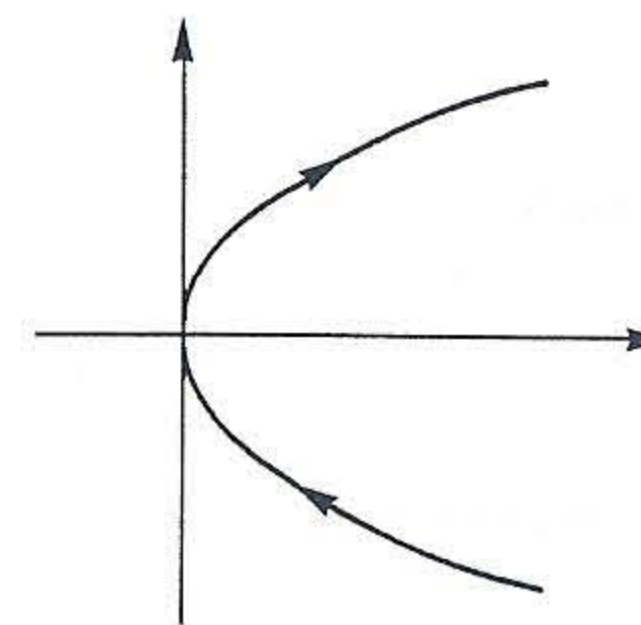


Fig. 3.3

Teorema de Jordan e conectividade simples

De acordo com o chamado teorema de Jordan, toda curva fechada simples C divide o plano em duas regiões, tendo C como fronteira comum, uma das quais, chamada o *interior de C*, é limitada. O teorema afirma também que o interior de C possui uma propriedade adicional, chamada *conectividade simples*. Intuitivamente, diz-se que uma região R é *simplesmente conexa* se qualquer curva fechada simples contida em R pode ser deformada continuamente até reduzir-se a um ponto, sem sair de R . A Fig. 3.4 ilustra duas regiões conexas A e B , das quais A é simplesmente conexa, mas não B ; esta possui um “buraco” que destrói a conectividade simples. Chamaremos de *multiplamente conexa* toda região conexa que não for simplesmente conexa.

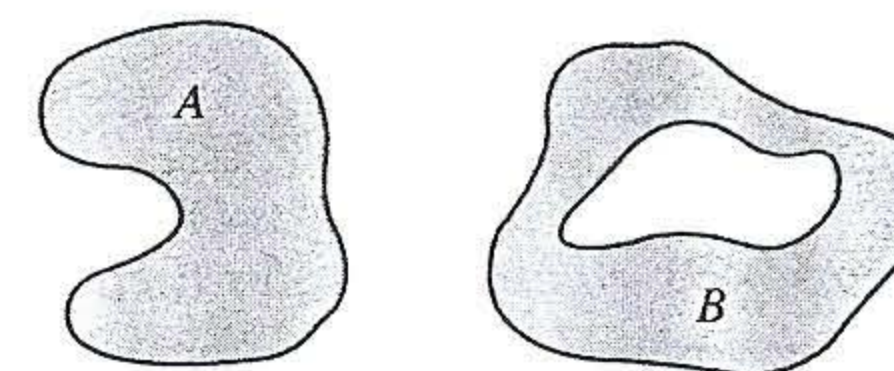


Fig. 3.4

O teorema de Jordan é de fácil compreensão, mas seu tratamento rigoroso é delicado e está fora de nossos objetivos.

Arco regular e contornos

O conceito de arco contínuo é muito geral e inclui objetos complicados, que em nada se parecem com figuras geométricas simples, como um arco de círculo, uma parábola, uma senóide etc. Em nossas considerações, não necessitamos senão da idéia de *arco regular*, assim entendido o arco cuja representação (3.1) é tal que a derivada $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ existe, é contínua e não se anula. Tal arco possui tangente em cada ponto, cujo ângulo com o eixo Ox é dado por $\arg z'(t)$, o qual varia continuamente com t . Mesmo um arco regular pode exibir comportamento surpreendente: consideremos, como exemplo, o arco regular dado por

$$z(0) = 0, \quad z(t) = t + it^3 \operatorname{sen} \frac{1}{t}, \quad 0 < t \leq 1.$$

Este arco secciona o eixo Ox numa infinidade de pontos tendo a origem como ponto de acumulação (Fig. 3.5).

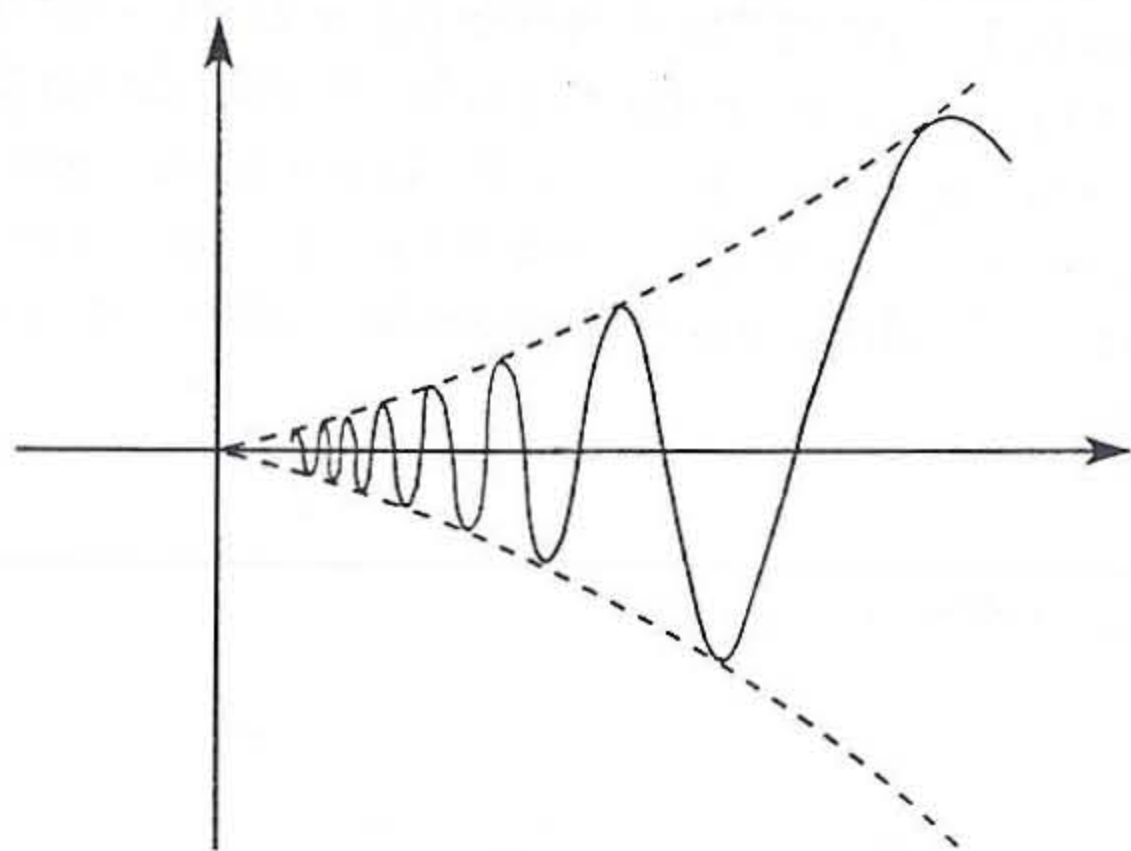


Fig. 3.5

Chamaremos *contorno* ou *caminho* a todo arco contínuo formado por um número finito de arcos regulares. Mais precisamente, um contorno C tem representação paramétrica dada por uma função $z = z(t)$, contínua num intervalo $[a, b]$, união finita de subintervalos $[a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, n$, tais que $a_1 = a$, $b_1 = a_2$, $b_2 = a_3, \dots, b_{n-1} = a_n$, $b_n = b$ (Fig. 3.6a); e em cada um dos intervalos abertos (a_j, b_j) a derivada $z'(t)$ é contínua, diferente de zero e tem limites laterais finitos e diferentes de zero com t tendendo aos

extremos de cada intervalo por valores interiores a ele, limites esses que coincidem com $z'(a_j^-)$ e $z'(b_j^-)$, respectivamente. Isto significa que $z'(t)$ é função seccionalmente contínua no intervalo $[a, b]$ (Fig. 3.6b).

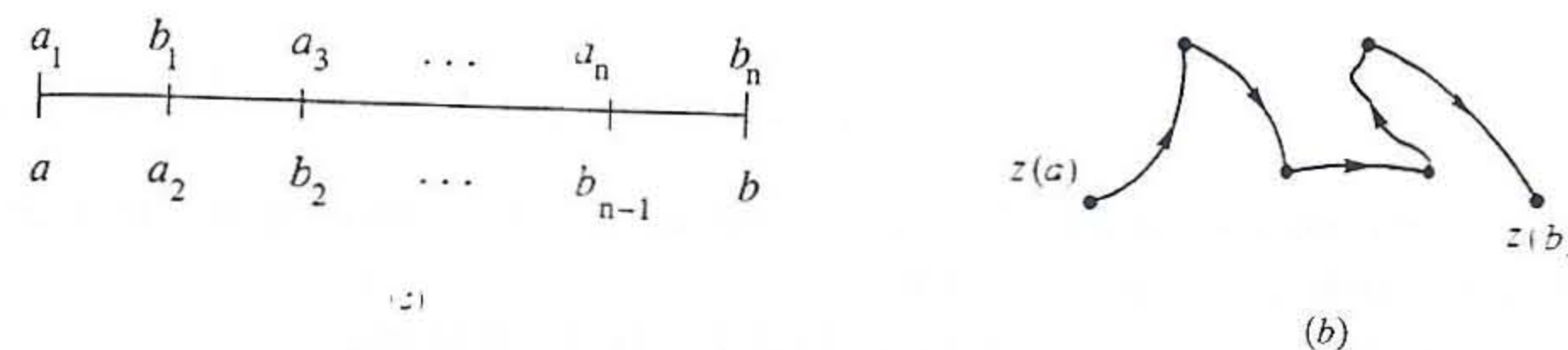


Fig. 3.6

EXERCÍCIOS

Identifique as curvas ou arcos de equações dadas nos exercícios seguintes.

- $z = 3t + it^2, \quad -\infty < t < \infty.$
- $z = 3t^2 + 5it, \quad -\infty < t < \infty.$
- $z = r(\cos t + i \operatorname{sen} t), \quad -\frac{\pi}{4} \leq t \leq \pi, \quad r > 0.$
- $z = \frac{1}{t} + it, \quad 1 \leq t < \infty.$
- $z = t + \frac{2i}{t}, \quad -\infty < t < 0.$
- $z = t + i\sqrt{1-t^2}, \quad -1 \leq t \leq 1.$
- $z = t - i\sqrt{1-t^2}, \quad -1 \leq t \leq 1.$
- $z = t + i\sqrt{1+t^2}, \quad -\infty < t \leq 0.$
- $z = \sqrt{1+t^2} - t, \quad 0 \leq t < \infty.$

INTEGRAL DE CONTORNO

Seja $F(t) = U(t) + iV(t)$ uma função contínua da variável real t num intervalo $[a, b]$. Sua integral é definida em termos das integrais das funções reais U e V , mediante a expressão

$$\int_a^b F(t) dt = \int_a^b U(t) dt + i \int_a^b V(t) dt. \quad (3.2)$$

Desta definição seguem imediatamente as seguintes propriedades:

$$\operatorname{Re} \int_a^b F(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} F(t) dt; \quad \operatorname{Im} \int_a^b F(t) dt = \int_a^b \operatorname{Im} F(t) dt. \quad (3.3)$$

As propriedades de linearidade,

$$\int_a^b [F(t) + G(t)] dt = \int_a^b F(t) dt + \int_a^b G(t) dt \quad (3.4)$$

e

$$\int_a^b cF(t) dt = c \int_a^b F(t) dt. \quad (3.5)$$

onde c é uma constante (complexa, em geral), são também de fácil verificação e ficam a cargo do leitor.

A integral (3.2) goza também da seguinte propriedade:

$$\left| \int_a^b F(t) dt \right| \leq \int_a^b |F(t)| dt. \quad (3.6)$$

onde, evidentemente, $a < b$. Esta propriedade é imediata se a integral que aparece no primeiro membro for nula. Caso contrário, seja

$$\int_a^b F(t) dt = re^{i\theta} \quad (r > 0)$$

sua representação polar. Daqui e de (3.5), obtemos:

$$r = e^{-i\theta} \int_a^b F(t) dt = \int_a^b e^{-i\theta} F(t) dt;$$

ou ainda, usando (3.3),

$$r = \operatorname{Re} \int_a^b e^{-i\theta} F(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} [e^{-i\theta} F(t)] dt.$$

Portanto, tendo em conta que $|e^{-i\theta}| = 1$,

$$\left| \int_a^b F(t) dt \right| = r = \int_a^b \operatorname{Re} [e^{-i\theta} F(t)] dt \leq \int_a^b |\operatorname{Re} [e^{-i\theta} F(t)]| dt$$

$$\leq \int_a^b |e^{-i\theta} F(t)| dt = \int_a^b |F(t)| dt,$$

donde a desigualdade (3.6).

Integral curvilínea ou de contorno

Estamos agora em condições de definir a *integral curvilínea* ou *integral de contorno*

$$\int_C f(z) dz,$$

onde C é um contorno qualquer e $f = u + iv$ é uma função contínua em C . Usando a representação do contorno C , $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, definimos

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt, \quad (3.7)$$

onde o segundo membro é uma integral do tipo (3.2), com

$$U(t) = u[x(t), y(t)]x'(t) - v[x(t), y(t)]y'(t),$$

$$V(t) = u[x(t), y(t)]y'(t) + v[x(t), y(t)]x'(t).$$

O integrando em (3.7), $f(z(t))z'(t) = U(t) + iV(t)$, pode não ser uma função contínua em todo o intervalo $[a, b]$, devido ao fator $z'(t)$. Mas, como vimos na seção anterior, esse intervalo é constituído de um número finito de subintervalos $I_j = [a_j, b_j]$, em cada um dos quais $z'(t)$ é contínua; e a integral em (3.7) deve ser interpretada como a soma das integrais nesses subintervalos I_j .

Invariância da integral

A integral (3.7) é invariante com uma mudança de parâmetro dada por uma função crescente $t = t(\tau)$, que transforme um intervalo $\alpha \leq \tau \leq \beta$ no intervalo $a \leq t \leq b$ e cuja derivada $t'(\tau)$ seja seccionalmente contínua. De fato, pondo $z_1(\tau) = z(t(\tau))$, e usando a regra de mudança de variável de integração nas integrais reais, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(z_1(\tau)) z_1'(\tau) d\tau &= \int_\alpha^\beta f(z(t(\tau))) z'(t(\tau)) t'(\tau) d\tau \\ &= \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt. \end{aligned} \quad (3.8)$$

É devido a essa invariância que se torna desnecessário explicitar a representação paramétrica do contorno C : a notação do primeiro membro de (3.7) tem significado único e preciso.

Convém observar também que as integrais curvilíneas tratadas na teoria das funções reais das variáveis reais x e y podem ser definidas de modo análogo a (3.7). Assim, temos:

$$\int_C P(x, y)dx = \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t)dt,$$

$$\int_C Q(x, y)dy = \int_a^b Q(x(t), y(t))y'(t)dt,$$

e, em geral,

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt,$$

Vemos então que a integral definida em (3.7) pode ser escrita em termos de integrais curvilíneas, assim:

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i \int_C vdx + udy.$$

Propriedades da integral

A linearidade da integral, expressa por

$$\int_C [f_1(z) + f_2(z)]dz = \int_C f_1(z)dz + \int_C f_2(z)dz, \quad (3.9)$$

e

$$\int_C cf(z)dz = c \int_C f(z)dz, \quad (3.10)$$

onde c é uma constante (complexa, em geral), é de fácil verificação e fica a cargo do leitor.

É fácil verificar também que se um contorno C é formado por um contorno C_1 seguido de um contorno C_2 — escrevemos $C = C_1 \cup C_2$ —, então a integral sobre C é a soma das integrais sobre C_1 e C_2 . Esta propriedade se generaliza facilmente para um número finito de contornos:

$$\int_{C_1 \cup \dots \cup C_r} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \dots + \int_{C_r} f(z)dz. \quad (3.11)$$

Daqui segue-se que a integral ao longo de um contorno fechado é invariante por translação do parâmetro. De fato, uma tal translação apenas muda o ponto inicial (e final) de uma posição z_1 para uma posição z_2 , como se vê na Fig. 3.7; designando por C_1 o trecho de C que vai de z_1 a z_2 e por C_2 o trecho restante, teremos:

$$\int_{C_1 \cup C_2} f(z)dz = \int_C f(z)dz = \int_{C_2 \cup C_1} f(z)dz,$$

que prova a invariância da integral.

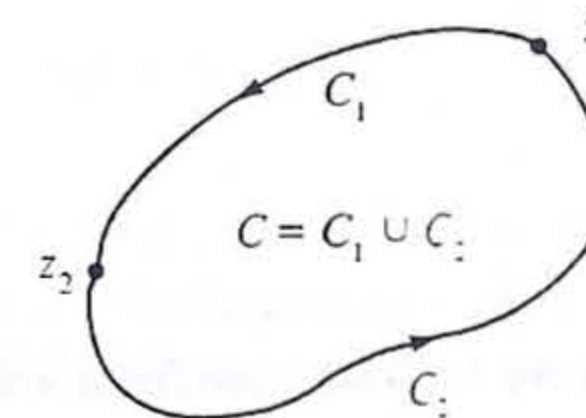


Fig. 3.7

A propriedade

$$\int_{-C} f(z)dz = - \int_C f(z)dz$$

é demonstrada assim: começamos observando que

$$-C = \{z = z_1(t) = z(-t) : -b \leq t \leq -a\},$$

donde obtemos:

$$z_1'(t) = -z'(-t);$$

portanto,

$$\int_{-C} f(z)dz = \int_{-b}^{-a} f(z_1(t))z_1'(t)dt = - \int_{-b}^{-a} f(z(-t))z'(-t)dt.$$

Finalmente, pondo $\tau = -t$, teremos:

$$\int_{-C} f(z)dz = \int_b^a f(z(\tau))z'(\tau)d\tau = - \int_a^b f(z(\tau))z'(\tau)d\tau = - \int_C f(z)dz,$$

que é o resultado desejado.

Outra propriedade de importância fundamental é a desigualdade

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz|, \quad (3.12)$$

onde a integral do segundo membro significa $\int_a^b |f(z(t))| |z'(t)| dt$. (Note que $a < b$.) Essa propriedade segue de (3.6), pois

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(z(t)) z'(t)| dt \\ &= \int_a^b |f(z(t))| |z'(t)| dt = \int_a^b |f(z)| |dz|. \end{aligned}$$

Uma importante propriedade das funções contínuas, cuja demonstração depende de um argumento de compacidade, e que é feita em cursos de Análise, afirma que se f é uma função contínua sobre um arco C , então existe uma constante M tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in C$. Daqui e de (3.12) obtemos a seguinte desigualdade, de grande importância nas aplicações:

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq M \int |dz| = ML,$$

onde L é o comprimento do contorno C , isto é,

$$L = \int_C |dz| = \int_a^b |z'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

3.1. Exemplo. Vamos calcular a integral de $f(z) = \bar{z}$ ao longo dos três contornos indicados na Fig. 3.8: OC , OAC e OBC , onde $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$, $B = (0, m)$, $C = (1, m)$, e m é um número real qualquer, digamos, $m > 0$. O contorno OC é dado por $z(t) = t + imt$, $0 \leq t \leq 1$, de forma que

$$\int_{OC} \bar{z} dz = \int_0^1 (t - imt)(1 + im) dt = \frac{1 + m^2}{2}.$$

O contorno OAC pode ser representado por $z(t) = t$, com $0 \leq t \leq 1$ e $z(t) = 1 + im(t - 1)$, com $1 \leq t \leq 2$; ou, ainda, podemos considerar OAC

como constituído de dois contornos: OA , dado por $z(t) = t$, seguido de AC , dado por $z(t) = 1 + imt$, em ambos t variando de zero a 1. Num caso ou no outro a integral tem o mesmo valor, dado por

$$\int_{OAC} \bar{z} dz = \int_0^1 t dt + \int_0^1 (1 - imt) im dt = \frac{1 + m^2 + 2im}{2}.$$

De maneira análoga, temos:

$$\int_{OBC} \bar{z} dz = \int_0^1 (-imt) im dt + \int_0^1 (t - im) dt = \frac{1 + m^2 - 2im}{2}.$$

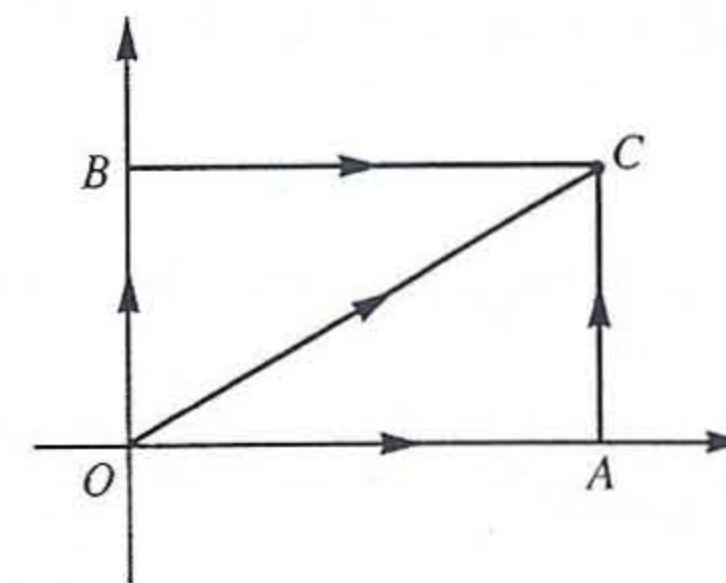


Fig. 3.8

Nesse exemplo obtemos um valor diferente para cada um dos três casos considerados; a integral depende não somente das extremidades do contorno, mas também do contorno que se considere em cada caso.

3.2. Exemplo. Em contraste com esse fenômeno, vamos mostrar agora que a integral curvilínea da função $f(z) = z$ só depende das extremidades do contorno e não do contorno particular que se considere. Para isso, seja C um contorno qualquer, ligando o ponto z_1 ao ponto z_2 , de forma que em qualquer representação paramétrica de C ($z = z(t)$, $a \leq t \leq b$) valem as relações $z(a) = z_1$ e $z(b) = z_2$ (Fig. 3.9). Temos, então.

$$\begin{aligned} \int_C z dz &= \int_a^b z(t) z'(t) dt = \int_a^b [xx' - yy' + i(xy' + yx')] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} (x^2 - y^2 + 2ixy) dt = \frac{x(t)^2 - y(t)^2 + 2ix(t)y(t)}{2} \Big|_a^b \\ &= \frac{z(b)^2 - z(a)^2}{2} = \frac{z_2^2 - z_1^2}{2}, \end{aligned}$$

e esta expressão mostra que a integral considerada só depende mesmo dos pontos extremos z_1 e z_2 e não do contorno C que liga esses pontos. Em particular, sendo C um contorno fechado, teremos $z_1 = z_2$; portanto,

$$\int_C z dz = 0.$$

Esta propriedade é verdadeira não somente para a função $f(z) = z$, mas para toda função analítica; conhecido como "teorema de Cauchy", esse resultado é, como veremos, a chave de toda a teoria das funções analíticas.



Fig. 3.9

3.3. Observação. A notação $\oint_C f(z) dz$ é usada com frequência para denotar a integral de $f(z)$ ao longo de um contorno fechado C .

EXERCÍCIOS

Nos Exercs. 1 a 10, calcule a integral de f ao longo do contorno C , onde f e C são especificados em cada caso.

1. $f(z) = |z|$, $C = \{z = re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$.
2. $f(z) = |z|$, $C = \{z = re^{i\theta} : -\pi/2 \leq \theta \leq \pi\}$.
3. $f(z) = z^2$, $C = \{z = re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$.
4. $f(z) = z^2$, $C = \{z = re^{i\theta} : -\pi \leq \theta \leq \pi\}$.
5. $f(z) = \sqrt{z}$, $C = \{z = re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.
6. $f(z) = \sqrt{z}$, $C = \{z = re^{i\theta} : -\pi \leq \theta \leq \pi\}$.
7. $f(z) = 2x - y + ix^2$, ao longo do segmento retilíneo de zero a $1 + i$.
8. $f(z) = |z|$, ao longo do segmento retilíneo de zero a $-2 + 3i$.
9. $f(z) = x^2 - y^2 + i(x - y^2)$, ao longo do segmento retilíneo de zero a $3 + 2i$.

10. $f(z) = y - x^2$, ao longo do segmento da origem ao ponto $(2, 0)$, seguido do segmento de $(2, 0)$ a $(2, 1)$; depois ao longo de $(0, 0)$ a $(0, 1)$, seguido do segmento de $(0, 1)$ a $(2, 1)$ (Fig. 3.10). Verifique que os resultados são diferentes.

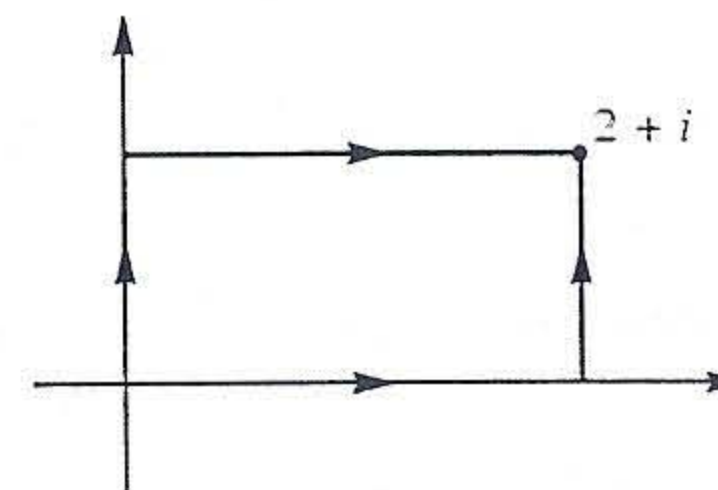


Fig. 3.10

11. Prove as propriedades (3.4) e (3.5).
12. Prove as propriedades (3.9) e (3.10).
13. Prove a propriedade (3.11).
14. Seja C um contorno qualquer, ligando os pontos z_1 a z_2 . Mostre que

$$\int_C 1 \cdot dz = z_2 - z_1;$$

portanto, esta integral só depende dos pontos inicial e final, e não do caminho de integração que liga esses dois pontos. Em particular,

$$\oint_C 1 \cdot dz = 0,$$

qualquer que seja o contorno fechado C .

15. Utilizando a definição (3.2), mostre que

$$\int_a^b e^{it} dt = i(e^{ib} - e^{ia}) \quad \text{e} \quad \int_a^b e^{ikt} dt = \frac{i}{k}(e^{ikb} - e^{ika}),$$

onde k é um número real não-nulo.

16. Seja C um arco de círculo parametrizado por $z = z(\theta) = re^{i\theta}$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$. Prove que

$$\int_C f(z) dz = ir \int_\alpha^\beta f(z(\theta)) e^{i\theta} d\theta.$$

17. Sejam F e f funções analíticas numa região simplesmente conexa contendo um contorno C , e tais que $f = F'$. Use as equações de Cauchy-Riemann e as definições (3.2) e (3.7) para provar que

$$\int_C f(z) dz = F(z_2) - F(z_1),$$

onde z_1 e z_2 são os pontos inicial e final do contorno C , por onde se vê que a integral só depende dos pontos inicial e final, e não de C .

18. Use o resultado anterior para provar que, se n for inteiro e C um contorno fechado envolvendo a origem uma vez no sentido anti-horário, então

$$\oint_C z^n dz = 0 \text{ se } n \neq -1 \text{ e } \oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

19. Efetuando a integração, estabeleça os mesmos resultados do exercício anterior no caso particular em que C é o círculo $z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

20. Mostre que $\oint_C \log z dz = 2\pi i$, onde C é um contorno fechado envolvendo a origem uma vez no sentido positivo.

21. Sem efetuar a integração, mostre que $|\int_C \frac{dz}{z}| \leq 1$, onde C é o segmento retilíneo que une 1 a $1+i$.

22. Mostre que $\int_C \frac{dz}{z^2+1} \leq \frac{3\pi}{16}$, onde C é o arco de círculo situado no primeiro quadrante, centrado na origem e de raio 3 .

23. Mostre que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} (\log z)^c dz = 0,$$

onde C_ε é o contorno $z = \varepsilon e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e c é um número real qualquer.

24. Seja C_r o contorno $z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e f uma função contínua na origem. Prove que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \oint_{C_r} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0).$$

RESPOSTAS E SUGESTÕES

- | | | | |
|----------------------|----------------------|-----------------|--------------------------|
| 1. $-2r^2$. | 2. $(i-1)r^2$. | 3. $-2r^3/3$. | 4. Zero. |
| 5. $-4r\sqrt{r}/3$. | 6. $4r\sqrt{r}/3i$. | 7. $(1+5i)/6$. | 8. $\sqrt{13}(3i-2)/2$. |

17. Pondo $F = U + iV$, observe que

$$\begin{aligned} F'(z)z'(t) &= (U_x + iV_x)(x' + iy') = U_x x' - V_x y' + i(V_x x' + U_x y') \\ &= U_x x' + U_y y' + i(V_x x' + V_y y') = \frac{d}{dt}(U + iV). \end{aligned}$$

21. Use (3.12).

22. $|z^2+1| \geq |z^2| - 1 = 8$ para $z \in C$.

23. $|\log \varepsilon + i\theta| \leq 2|\log \varepsilon|$, para ε suficientemente pequeno.

24. Escreva $f(z) = f(0) + [f(z) - f(0)]$ e observe que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|z| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(0)| < \varepsilon$.

TEOREMA DE CAUCHY

Como vimos na seção anterior, a integral de uma função entre dois pontos z_0 e z pode ou não depender do contorno usado na integração. Se o integrando é uma função analítica, a integral não depende do contorno, mas apenas dos pontos inicial e final. Este é o teorema de Cauchy, que estudaremos nesta seção. Para isso começaremos com uma recordação do teorema de Green ou teorema da divergência no plano.

Doravante, freqüentemente estaremos considerando funções definidas em regiões simplesmente conexas. Isto não quer dizer que os domínios originais de nossas funções tenham de ser assim; basta notar que as funções podem sempre ser restritas a subdomínios que sejam regiões simplesmente conexas, e é nelas que estaremos fazendo nossas considerações.

Teorema de Green

Quando tratarmos de integrais sobre contornos fechados, teremos de distinguir entre as duas orientações possíveis do contorno, uma das quais é escolhida como a orientação positiva. Não vamos nos ocupar de como a noção de orientação positiva pode ser introduzida rigorosamente, sem apelo à intuição geométrica. O importante aqui é acentuar que isto pode ser feito, e que, em consequência, dado um contorno fechado simples C , de representação paramétrica $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, a idéia de que C está orientado positivamente corresponde exatamente ao fato intuitivo de que, para z_0 interior a C , o argumento de $z(t) - z_0$ cresce de 2π com t variando de $t = a$ a $t = b$. Em linguagem sugestiva, um observador localizado em $z(t)$ percorrerá o contorno C de maneira a deixar o interior de C sempre à sua esquerda (Fig. 3.11).

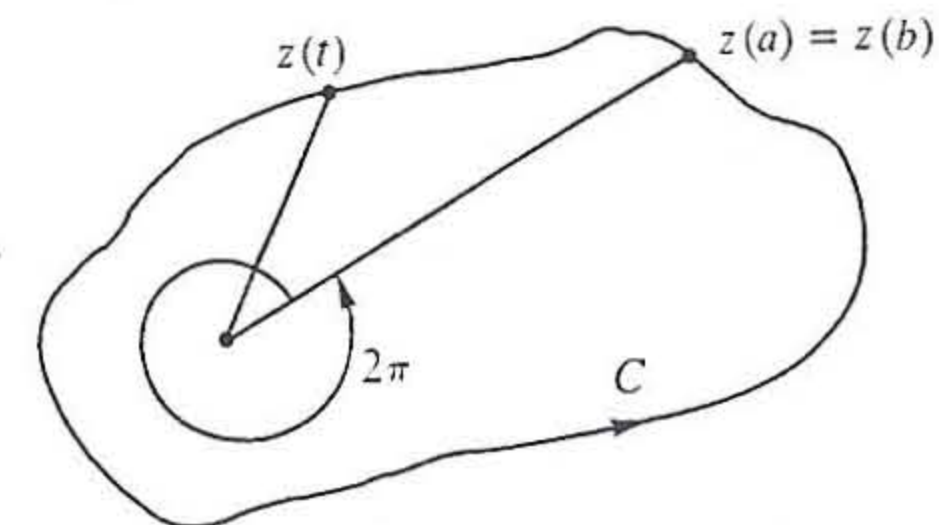


Fig. 3.11

3.4. Teorema de Green. *Sejam $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ funções definidas numa região simplesmente conexa R , com derivadas primeiras contínuas. Então, para qualquer contorno fechado simples C em R ,*

$$\iint_{R'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C P dx + Q dy,$$

onde R' é a região interior a C .

O leitor encontrará a demonstração desse teorema em livros de cálculo de várias variáveis (veja, por exemplo, a Seção 6.5 de [A3]). Note que a integração do segundo membro significa integração no sentido positivo de percurso sobre C .

Denotando com $\mathbf{t} = (t_x, t_y)$ o vetor tangente a C num ponto (x, y) , com $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ o vetor unitário normal exterior e com ds o elemento de arco, então, como explicamos na Seção 6.5 de [A3], $(dx, dy) = \mathbf{t} ds$ e $(dy, -dx) = \mathbf{n} ds$ (Fig. 3.12). Pondo então $\mathbf{F} = (Q, -P)$, a fórmula anterior assume a seguinte forma:

$$\iint_{R'} \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds,$$

que é uma forma familiar do teorema da divergência.

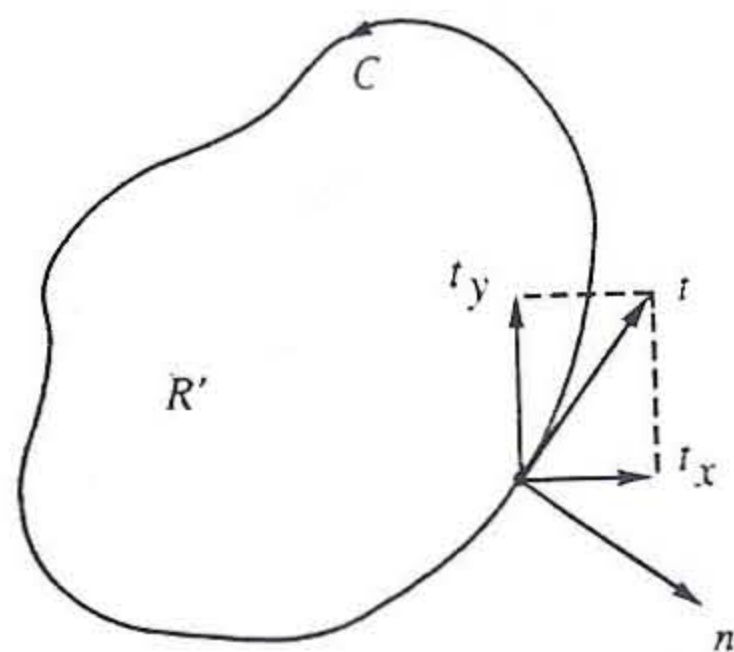


Fig. 3.12

Teorema de Cauchy

Vamos considerar agora o teorema de Cauchy, que apresentamos sob as seguintes formulações equivalentes:

3.5. Teorema. *Seja f uma função analítica numa região simplesmente conexa R . Então,*

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

para todo contorno fechado C contido em R .

3.6. Teorema. *Seja f uma função analítica numa região simplesmente conexa R . Então, a integral de f ao longo de um contorno ligando z_0 a z só depende destes pontos, e não do contorno de integração.*

Vamos verificar a equivalência desses dois teoremas. Suponhamos que o Teorema 3.5 seja verdadeiro e sejam C_1 e C_2 dois contornos arbitrários em R , ligando z_0 a z (Fig. 3.13). Então, $C_1 \cup (-C_2)$ é um contorno fechado em R ; logo,

$$0 = \iint_{C_1 \cup (-C_2)} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz,$$

ou seja,

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$

Isto prova o Teorema 3.6.

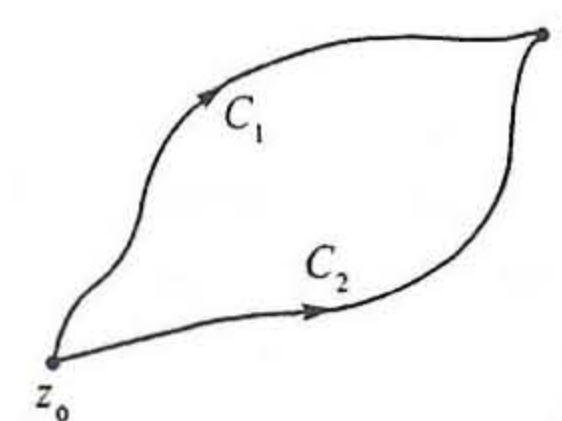


Fig. 3.13

Suponhamos agora que o Teorema 3.6 seja verdadeiro e seja C um contorno fechado em R . Tomando dois pontos z_0 e z_1 em C , obtemos os con-

tornos C_1 de z_0 a z_1 e C_2 de z_1 a z_0 (Fig. 3.14). Pelo Teorema 3.6,

$$\int_{C_1} f(z)dz = - \int_{C_2} f(z)dz,$$

donde

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = 0.$$

Isto prova o Teorema 3.5.

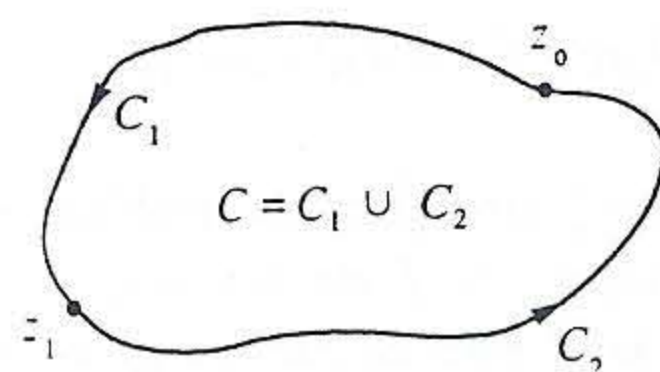


Fig. 3.14

O teorema de Cauchy, na primeira formulação, pode ser demonstrado facilmente com a ajuda do teorema de Green, supondo que a derivada f' seja contínua em R . De fato, com a notação $z = x + iy$, $f = u + iv$, temos:

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)dz &= \oint_C udx - vdy + i \oint_C vdx + udy = \\ &= - \iint_{R'} (v_x + u_y) dx dy + i \iint_{R''} (u_x - v_y) dx dy. \end{aligned}$$

Mas $v_x + u_y = u_x - v_y = 0$, pelas equações de Cauchy-Riemann, donde o Teorema 3.5.

3.7. Observações. Foi o matemático francês Édouard Goursat (1858-1936) quem descobriu que o teorema anterior pode ser demonstrado sem a hipótese de que f' seja contínua. Neste caso, a demonstração requer um tratamento bem mais extenso e não será abordada aqui. (Veja [A1] ou [L].) Por causa dessa demonstração de Goursat, o teorema é também conhecido como "teorema de Cauchy-Goursat".

Como veremos adiante, uma função analítica tem derivadas de todas as ordens; portanto, todas essas derivadas são contínuas, em particular a

primeira delas. Assim, a demonstração de Goursat tem interesse apenas teórico.

Integrais de contorno e primitivas

Como já tivemos oportunidade de assinalar, o teorema de Cauchy-Goursat é o teorema fundamental da teoria das funções analíticas. Os resultados mais relevantes que obteremos daqui por diante são conseqüências diretas ou indiretas desse teorema. Como primeiro passo nessa direção, vamos estudar agora a forma geral da primitiva de uma função analítica.

Dizemos que uma função F é uma *primitiva* de f se $F' = f$.

3.8. Teorema. *Seja f uma função analítica numa região simplesmente conexa R . Então, a forma geral da primitiva de f é dada por*

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta + C, \quad (3.13)$$

onde z_0 é um ponto qualquer de R , porém fixo. C é uma constante arbitrária e a integração é feita ao longo de qualquer contorno de R , ligando z_0 a z .

Demonstração. Observamos, de início, que a integral em (3.13) está bem definida, pois, de fato, ela não depende do caminho de integração.

Vamos provar que F é analítica em R e que $F' = f$. Temos (Fig. 3.15):

$$F(z+h) - F(z) = \left(\int_{z_0}^{z+h} - \int_{z_0}^z \right) f(\zeta)d\zeta = \int_z^{z+h} f(\zeta)d\zeta.$$

Pondo $f(\zeta) = f(z) + \eta(z, \zeta)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h} \int_z^{z+h} [f(z) + \eta(z, \zeta)]d\zeta \\ &= f(z) + \frac{1}{h} \int_z^{z+h} \eta(z, \zeta)d\zeta. \end{aligned}$$

Como f é contínua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\eta(z, \zeta)| = |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{para} \quad |\zeta - z| < \delta.$$

Fazendo então $|h| < \delta$ e integrando ao longo do segmento $[z, z+h]$, teremos:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \frac{1}{|h|} \left| \int_z^{z+h} \eta(z, \zeta) d\zeta \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \int_z^{z+h} |\eta(z, \zeta)| |d\zeta| < \frac{\varepsilon}{|h|} \int_z^{z+h} |d\zeta| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Isto prova que $F' = f$; logo, F é uma primitiva de f .

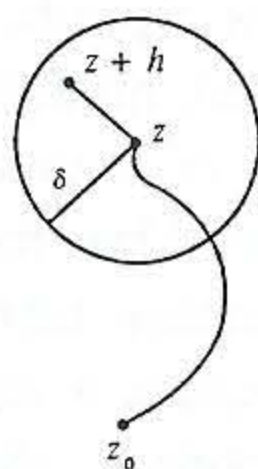


Fig. 3.15

Falta mostrar que toda primitiva é da forma (3.13). Para isto, se G é uma primitiva qualquer, teremos:

$$\frac{d}{dz} \left(G(z) - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \right) = G'(z) - \frac{d}{dz} \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = f(z) - f(z) = 0.$$

Então, a função $G(z) - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$, tendo derivada nula, é constante (cf. Corolário 2.16, p. 57), donde segue-se que (3.13) é a forma geral das primitivas de f .

3.9. Observações. Deste teorema segue imediatamente que a integral de f ao longo de um caminho ligando z_0 a z_1 é dada por

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0),$$

onde F é uma primitiva qualquer de f . Essa diferença, $F(z_1) - F(z_0)$, é a variação de F ao longo do caminho C e também costuma ser denotada com o símbolo $[F(z)]_C$. Assim,

$$\int_C f(z) dz = F(z_1) - F(z_0) = [F(z)]_C.$$

Em se tratando de um contorno fechado que seja um círculo de centro z_0 e raio r , a integral sobre C costuma ser denotada com os símbolos

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z) dz \quad \text{e} \quad \oint_{|z-z_0|=r} f(z) dz,$$

ficando subentendido que o contorno tem orientação positiva.

Vemos então que o cálculo de uma integral curvilínea de uma função analítica é equivalente ao cálculo de uma primitiva da função. Este resultado e o teorema seguinte são de importância fundamental no cálculo das integrais de contorno.

3.10. Teorema. *Sejam C_0, C_1, \dots, C_n contornos fechados simples, tais que C_1, \dots, C_n jazem no interior de C_0 e são dois a dois exteriores um ao outro (Fig. 3.16). Suponhamos que a região compreendida entre C_0 e C_1, \dots, C_n , juntamente com esses contornos, esteja contida numa região de analiticidade de uma função f . Então,*

$$\int_{C_0} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz,$$

desde que os contornos tenham todos a mesma orientação.

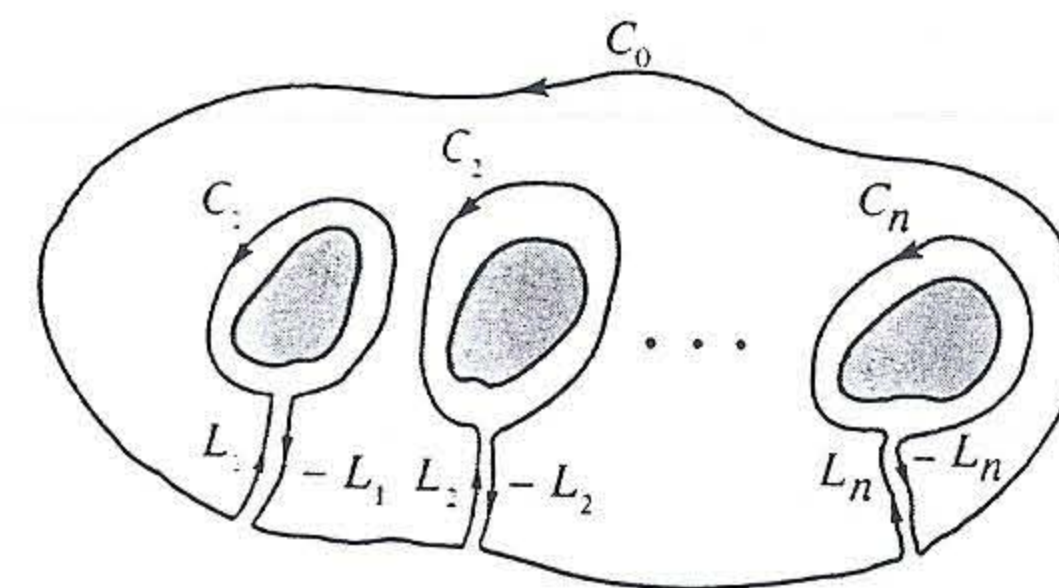


Fig. 3.16

Justificação. Um tratamento completo deste teorema requer o uso de conceitos topológicos que não estão à nossa disposição. Em casos simples, como ilustra a Fig. 3.16, justifica-se o teorema introduzindo certos cortes L_1 e $-L_1, L_2$ e $-L_2, \dots, L_n$ e $-L_n$, ligando C_0 a C_1, C_2, \dots, C_n ,

respectivamente, todos contidos em R . O contorno que assim obtemos, $C_0 \cup L_1 \cup (-C_1) \cup (-L_1) \cup \dots \cup L_n \cup (-C_n) \cup (-L_n)$, envolve uma região simplesmente conexa, de forma que a integral de f ao longo dele deve ser nula. Observando que as integrais ao longo de L_1 e $-L_1$, L_2 e $-L_2, \dots, L_n$ e $-L_n$ cancelam aos pares, obtemos:

$$\left(\int_{C_0} - \int_{C_1} - \int_{C_2} - \dots - \int_{C_n} \right) f(z) dz = 0,$$

donde

$$\int_{C_0} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz.$$

Em particular, quando $n = 1$, temos:

$$\int_{C_0} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz.$$

Neste caso, dizemos que estamos *deformando o caminho de integração* C_0 no caminho C_1 .

3.11. Exemplo. A função $f(z) = z^n$, onde n é um inteiro não-negativo, é analítica em todo o plano e $F(z) = z^{n+1}/(n+1)$ é uma de suas primitivas. Então,

$$\int_{z_0}^{z_1} z^n dz = \frac{1}{n+1} (z_1^{n+1} - z_0^{n+1}),$$

quaisquer que sejam os números complexos z_0 e z_1 e qualquer que seja o contorno de integração que liga z_0 a z_1 .

3.12. Exemplo. A função $f(z) = (z-a)^{-1}$ é analítica em todo o plano, exceto no ponto $z = a$, e tem por primitiva a função $F(z) = \log(z-a)$. Portanto,

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{z-a} = \log(z_1 - a) - \log(z_0 - a),$$

desde que a integração seja feita ao longo de qualquer contorno C ligando z_0 a z_1 e todo contido numa região simplesmente conexa que exclua o ponto $z = a$. Em particular, é fácil ver que se o contorno voltar ao ponto inicial

sem circundar o ponto $z = a$, então $z_0 - a$ e $z_1 - a$ coincidem em módulo e argumento e o valor da integral acima é zero (Fig. 3.17).

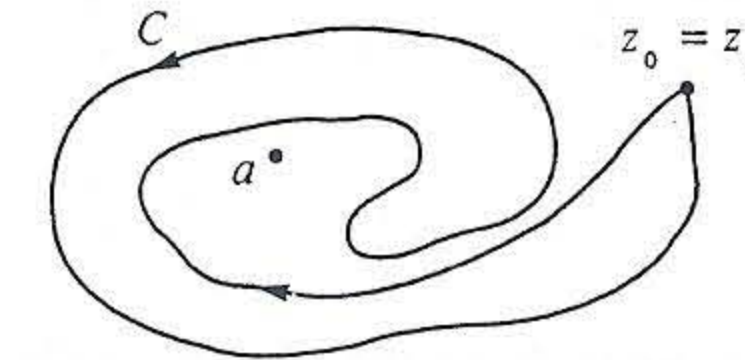


Fig. 3.17

Suponhamos que C envolva o ponto $z = a$ uma vez no sentido positivo, como mostra a Fig. 3.18. Então, qualquer região simplesmente conexa que contenha C conterá o ponto $z = a$, onde f não é analítica e não podemos concluir que a integral se anula. Mas, mesmo neste caso, a fórmula anterior se aplica, desde que propriamente interpretada. Um modo de justificá-la consiste em considerar primeiro a integração ao longo de um contorno parcial C' , unindo z_0 a um ponto z' , ilustrado na Fig. 3.18. Tal contorno está todo contido numa região simplesmente conexa R que não contém o ponto $z = a$, de forma que

$$\int_{C'} \frac{dz}{z-a} = \log(z' - a) - \log(z_0 - a).$$

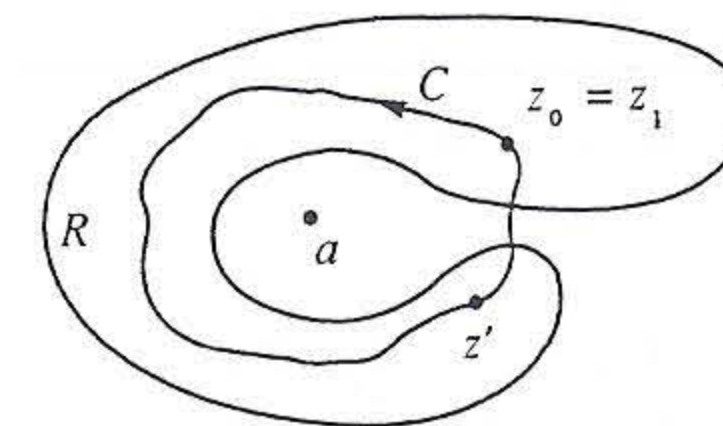


Fig. 3.18

Passando ao limite com $(z' - a) \rightarrow (z_1 - a) = (z_0 - a)e^{2\pi i}$, obtemos $2\pi i$ para o valor da integral. Este raciocínio é equivalente a considerar z_1 como se fosse distinto de z_0 (Fig. 3.19), devido a que $\arg(z_1 - a) = \arg(z_0 - a) + 2\pi$. Assim,

$$\log(z_1 - a) = \log(z_0 - a) + 2\pi i;$$

portanto,

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{z - a} = 2\pi i = \oint_C \frac{dz}{z - a}$$

onde C é qualquer contorno fechado envolvendo o ponto a uma vez no sentido positivo.

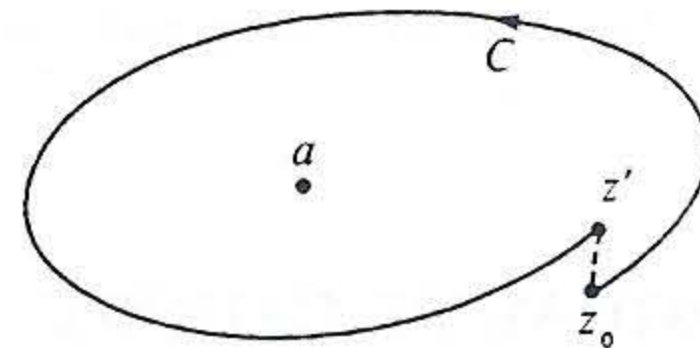


Fig. 3.19

3.13. Exemplo. Vamos calcular a integral da função $\log z$ ao longo de um contorno C_1 contido nos 4º, 1º e 2º quadrantes, com ponto inicial $z = -i$ e ponto final $z = -1$, como ilustra a Fig. 3.20. Lembramos que $(z \log z - z)' = \log z$, e que, qualquer que seja o ramo escolhido para o logaritmo, $\arg(-1) = \arg(-i) + 3\pi/2$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \log z dz &= [z \log z - z]_{C_1} \\ &= (-1)i \arg(-1) - (-1) - [(-i) i \arg(-i) - (-i)] \\ &= -i \left[\arg(-i) + \frac{3\pi}{2} \right] + 1 - \arg(-i) - i \\ &= 1 - i \left(1 + \frac{3\pi}{2} \right) - (1 + i) \arg(-i). \end{aligned}$$

Esta expressão nos mostra que o resultado depende de $\arg(-i)$, ou seja, depende do ramo escolhido para o logaritmo. Costuma-se fazer essa escolha dizendo, simplesmente, como deve ser $\log z$ para certo valor de z . Por exemplo, basta dizer que $\log z$ é real quando z for positivo (ou que $\log 1 = 0$) para fixar o argumento de $-i$ em $-\pi/2$; ou, se dissermos que $\log 1 = 2\pi i$,

então $\arg(-i) = 3\pi/2$; e assim por diante.

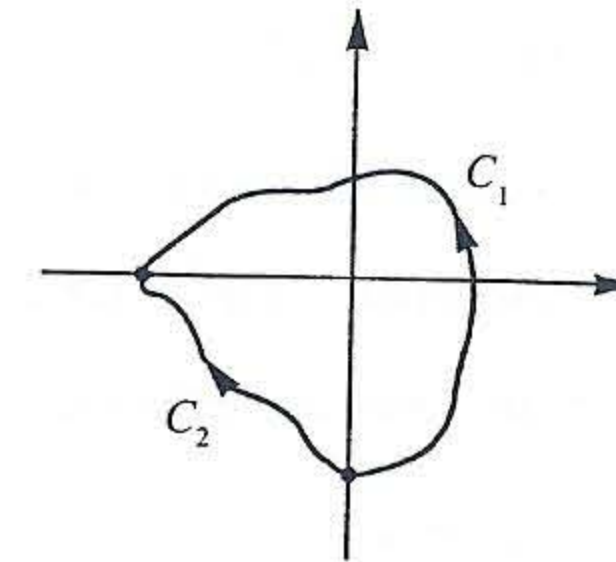


Fig. 3.20

Deixamos ao leitor a tarefa de calcular a integral da mesma função ao longo de um contorno C_2 ilustrado na Fig. 3.20.

3.14. Exemplo. Ainda com referência à Fig. 3.20, vamos calcular a integral de \sqrt{z} ao longo do contorno C_2 . Obtemos:

$$\int_{C_2} \sqrt{z} dz = \frac{2}{3} [z\sqrt{z}]_{C_2} = \frac{2}{3} (-\sqrt{-1} + i\sqrt{-i}).$$

Para efetuar o cálculo desta última expressão é preciso especificar um ramo da raiz quadrada. Se tomarmos $\sqrt{-1} = i$, teremos $\sqrt{-i} = (-1 + i)/\sqrt{2}$, ao passo que se tomarmos $\sqrt{-1} = -i$, teremos $\sqrt{-i} = (1 - i)/\sqrt{2}$. O resultado da integração será

$$-\frac{\sqrt{2}}{3} [1 + i(1 + \sqrt{2})] \quad \text{e} \quad +\frac{\sqrt{2}}{3} [1 + i(1 + \sqrt{2})],$$

respectivamente.

EXERCÍCIOS

Nos Exercs. 1 a 11, mostre que são nulas as integrais das funções dadas sobre os contornos C dados. Observe que a orientação de C é irrelevante.

1. $f(z) = \frac{z+1}{z-3}$ e C é o círculo $|z| = 2$.
2. $f(z) = \frac{3z^2}{z+2i}$ e C é o círculo $|z| = 3/2$.
3. $f(z) = \frac{3ze^z}{z^2+3}$ e C é o círculo $|z| = 5/4$.

4. $f(z) = \frac{\log(z-2i)}{z+2}$ e C é o quadrado de vértices $\pm 1 \pm i$.
5. $f(z) = \frac{\log(z+1)}{z^2-9}$ e C é o círculo $x^2 + y^2 - 2x = 0$.
6. $f(z) = \frac{\log(z+i)}{z^2-9}$ e C é o círculo $x^2 + y^2 + 2x = 0$.
7. $f(z) = \frac{\log(z-1+i)}{z^2+9}$ e C é o quadrado de vértices ± 1 e $\pm i$.
8. $f(z) = 1/z^2$ e C é qualquer contorno envolvendo a origem.
9. $f(z) = \frac{ze^z}{\log(2z+3)}$ e C é o quadrado de vértices ± 1 e $\pm i$.
10. $f(z) = \frac{\cos z}{\sin^2 z}$ e C é o círculo $|z| = 1$.
11. $f(z) = \frac{\sin z}{\cos^3 z}$ e C é o círculo $|z| = 1$.

Nos Exercs. 12 a 15, calcule as integrais das funções dadas sobre os contornos C dados.

12. $f(z) = 1/z$ e C vai de $-i$ a $+i$, passando pelo semiplano $\operatorname{Re} z > 0$.
13. $f(z) = 1/z$ e C vai de $-i$ a $+i$, passando pelo semiplano $\operatorname{Re} z < 0$.
14. $f(z) = \log z$ e C é qualquer arco que vai de -1 a i e que, à exceção dos extremos, está situado no segundo quadrante. Especifique o logaritmo tomando $\log(-1) = -i\pi$.
15. $f(z) = \sqrt{z+1}$ e C é qualquer arco que vai de $-1-4i$ a $-1+9i$, passando à direita do ponto -1 . Especifique a raiz quadrada tomando $f(0) = -1$.
16. Combinando os resultados dos Exercs. 12 e 13, calcule a integral de $f(z) = 1/z$ sobre qualquer contorno fechado simples C envolvendo a origem positivamente.
17. Seja f uma função analítica numa região simplesmente conexa R contendo o ponto z_0 . Prove que

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

onde C é qualquer contorno fechado que envolva a origem uma vez no sentido positivo.

18. Mostre que $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1} = 0$.
19. Mostre que $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1} = 0$.
20. Mostre que $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-z+iz-i} = 0$.

SUGESTÕES

4. Para especificar o logaritmo, é necessário introduzir algum corte: por exemplo, $-3\pi/2 < \arg(z-2i) < \pi/2$. Verifique que qualquer outro ramo conduz ao mesmo resultado.
5. Veja: $\log(z+1) = \log[z - (-1)]$. Especifique um ramo adequado do logaritmo e verifique que o resultado independe dessa escolha.
9. $\log(2z+3) = \log 2 + \log(z+3/2)$.
17. Utilize o Teorema 3.10 e adapte o resultado do Exerc. 24 da p. 88.
18. Como $\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right)$, a integral decompõe-se em duas. Outro modo: utilize o Teorema 3.10 e interprete o integrando como $\frac{f(z)}{z-1}$ e como $\frac{f(z)}{z+1}$; o que é $f(z)$ em cada caso?

FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY

3.15. Teorema. *Seja f uma função analítica numa região simplesmente conexa R . Então,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta,$$

onde $z \in R$ e C é qualquer contorno fechado simples de R , que envolve z uma vez no sentido positivo e cujo interior está todo contido em R .

Demonstração. O resultado aqui enunciado, conhecido como “fórmula integral de Cauchy”, é corolário imediato do Exerc. 17 atrás. Para vermos isso, basta trocar a variável z que lá aparece por ζ e trocar z_0 por z .

No entanto, dada a importância dessa fórmula, vamos demonstrá-la detalhadamente. Seja $\delta > 0$ tal que o disco $|\zeta - z| \leq \delta$ não contenha pontos de C , como ilustra a Fig. 3.21. Designando por C_δ o contorno desse disco, o Teorema 3.10 permite escrever:

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \oint_{C_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta.$$

Vamos escrever esta última integral como soma de duas outras, de acordo com a decomposição

$$f(\zeta) = f(z) + [f(\zeta) - f(z)];$$

assim obtemos:

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \oint_{C_\delta} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \oint_{C_\delta} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

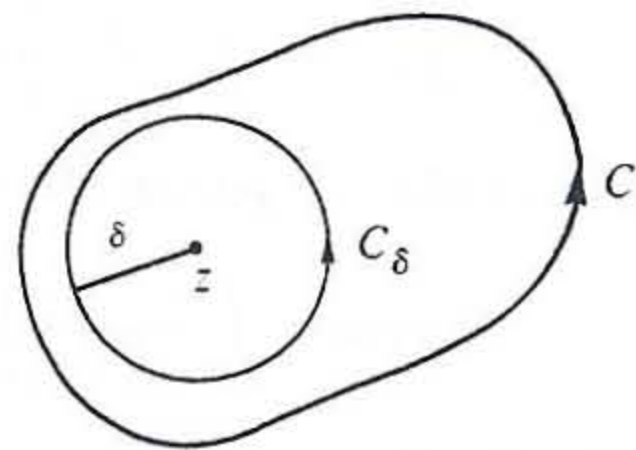


Fig. 3.21

A primeira integral do segundo membro é $2\pi i$, como já vimos; portanto,

$$2\pi i f(z) = \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \oint_{C_\delta} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (3.14)$$

Esta última integral também é zero. De fato, como f é contínua, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar δ tão pequeno que

$$|\zeta - z| \leq \delta \Rightarrow |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon.$$

Nestas condições,

$$\left| \oint_{C_\delta} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \oint_{C_\delta} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \oint_{C_\delta} |d\zeta| = 2\pi\varepsilon.$$

Portanto, a integral sobre C_δ em (3.14) tem limite zero com $\delta \rightarrow 0$, limite este que é o próprio valor da integral. Isto completa a demonstração do teorema.

A fórmula integral de Cauchy é instrumento básico no estudo das funções analíticas. Ela revela, de imediato, alguns resultados surpreendentes e de importância fundamental. Por exemplo, uma simples inspeção dessa fórmula nos mostra que basta o conhecimento de f nos pontos ζ do contorno C para que possamos calcular f em qualquer ponto z do interior de C . Isto já nos diz que a condição de analiticidade é muito restritiva: os valores

da função f estão todos interligados e não podem ser alterados, seja numa região, ao longo de arcos ou mesmo em conjuntos mais restritos de pontos, sem que isto viole a condição de analiticidade. Veremos, no Capítulo 6, que a interdependência dos valores de uma função analítica é ainda mais forte do que, à primeira vista, nos mostra a fórmula de Cauchy.

Derivadas de todas as ordens

Como importante consequência da fórmula de Cauchy, vamos provar agora que uma função analítica possui derivadas de todas as ordens.

3.16. Teorema. *Uma função analítica numa região R possui derivadas de todas as ordens, as quais, por sua vez, são também analíticas em R e podem ser obtidas da fórmula de Cauchy por derivação sob o sinal de integração.*

Demonstração. Sejam z um ponto qualquer de R e C um contorno fechado simples todo contido em R , cujo interior seja simplesmente conexo, contenha o ponto z e esteja todo contido em R . Vale então a fórmula de Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Admitindo, por um momento, a derivação sob o sinal de integração, e derivando sucessivamente, obtemos:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \quad f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta;$$

e, em geral,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta,$$

onde n é um inteiro positivo qualquer.

Essas fórmulas, depois de demonstradas, não só estabelecerão o resultado desejado como nos darão ainda expressões para as derivadas de f em termos de seus valores sobre C .

Para demonstrar a fórmula da primeira derivada f' , devemos mostrar que

$$F = \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

tende a zero com $h \rightarrow 0$. Para isso usamos a fórmula de Cauchy da função f :

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2\pi i h} \oint_C f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z - h} - \frac{1}{\zeta - z} - \frac{h}{(\zeta - z)^2} \right) d\zeta \\ &= \frac{h}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2(\zeta - z - h)} d\zeta \end{aligned}$$

Como $z \notin C$ e C é um conjunto (topologicamente) fechado, um resultado elementar de topologia métrica (demonstrado como Lema 6.1 na p. 179) garante que existe uma vizinhança de z , de raio d , que não contém pontos de C , como ilustra a Fig. 3.22. Em outras palavras, $|\zeta - z| \geq d$ para todo $\zeta \in C$; e tomando $|h| < d/2$, teremos também: $|\zeta - z - h| \geq |\zeta - z| - |h| > d/2$. Daqui e da expressão anterior de F , obtemos:

$$|F| \leq \frac{|h|}{2\pi} \oint_C \frac{|f(\zeta)|}{d^2 \cdot d/2} d\zeta.$$

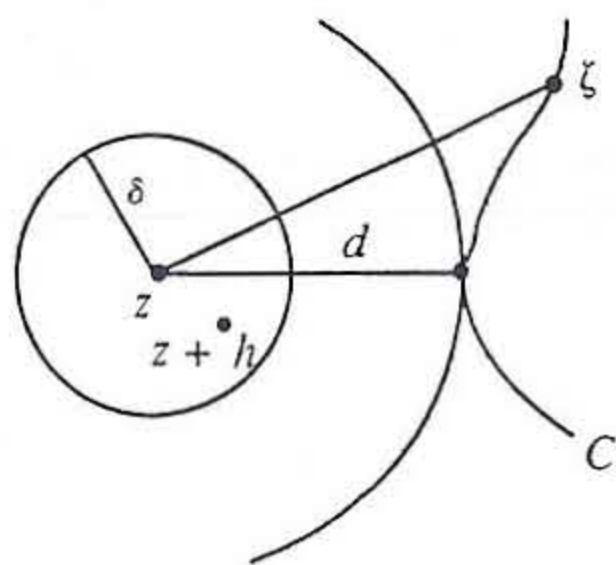


Fig. 3.22

Finalmente, sejam L o comprimento de C e $M = \max_{\zeta \in C} |f(\zeta)|$ (este máximo existe por ser f função contínua sobre o conjunto limitado e fechado C). Então, $|F| \leq |h|ML/\pi d^2$. Isto prova que $F \rightarrow 0$ com $h \rightarrow 0$ e conclui a demonstração do teorema no que diz respeito à derivada f' .

Resta provar a segunda parte do teorema, referente às derivadas $f^{(n)}$, com $n > 1$. Faremos isto provando um resultado mais geral, objeto do teorema seguinte, que contém, como corolário, o teorema anterior.

3.17. Teorema. *Sejam C um caminho qualquer, fechado ou não, $g(z)$ uma função definida e contínua para $z \in C$, e n um inteiro positivo. Então, a função*

$$f(z) = \int_C \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta$$

é regular em todo ponto $z \notin C$, e possui derivada dada por

$$f'(z) = n \int_C \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Demonstração. Sendo F como antes, a fórmula que define a função f nos dá:

$$F = \int_C G g d\zeta, \tag{3.15}$$

onde

$$G = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(\zeta - z - h)^n} - \frac{1}{(\zeta - z)^n} \right] - \frac{n}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

Vamos mostrar que podemos fazer esse G arbitrariamente pequeno, desde que $|h|$ seja feito suficientemente pequeno. Por conveniência, pomos $a = \zeta - z - h$ e $b = \zeta - z$. Então,

$$G = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{a^n} - \frac{1}{b^n} \right) - \frac{n}{b^{n+1}} = \frac{b^n - a^n}{(b-a)a^n b^n} - \frac{n}{b^{n+1}}.$$

A demonstração no caso $n = 1$ é idêntica à que fizemos anteriormente para a função f' . Portanto, a partir de agora suporemos $n \geq 2$. Então,

$$\begin{aligned} G &= \frac{a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + ab^{n-1} + b^n - na^n}{a^n b^{n-1}} \\ &= \frac{a^{n-1}(b-a) + a^{n-2}(b^2 - a^2) + \dots + a(b^{n-1} - a^{n-1}) + (b^n - a^n)}{a^n b^{n+1}}. \end{aligned}$$

Como na demonstração anterior, existe uma vizinhança de z , de raio d , que não contém pontos de C (Fig. 3.22). E tomando $|h| < d/2$, teremos $|\zeta - z| \geq d$ e $|\zeta - z - h| > d/2$. Daqui e da expressão anterior de G , obtemos:

$$|G| \leq \frac{2^n}{d^{2n+1}} \left[|a^{n-1}(b-a)| + |a^{n-2}(b^2 - a^2)| + \dots + |(b^n - a^n)| \right].$$

O importante a observar agora é que a expressão entre colchetes que aí aparece contém como fator comum $|b - a| = |h|$; o outro fator é limitado por uma constante K que não depende de $\zeta \in C$ e de h . Assim, $|G| \leq 2^{n+1}|h|K/d^{2(n+1)}$. Agora é só levar esta estimativa em (3.15) e terminar a demonstração como no caso já tratado anteriormente.

3.18. Observação. O Teorema 3.16 nos mostra que a condição de analiticidade é bastante restritiva, pois nos diz que uma função analítica numa região R tem derivadas de todas as ordens nessa região, as quais, portanto, são também analíticas. No fundo, isto é mais uma consequência do Teorema 3.5 (p. 91), via a fórmula integral de Cauchy, dada no Teorema 3.15.

3.19. Teorema de Morera. *Seja f uma função contínua numa região R , tal que*

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

para todo contorno fechado $C \subset R$. Então f é analítica em R .

Demonstração. Seja z_0 um ponto qualquer de R , porém fixo. A expressão

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta$$

independe do caminho de integração. Como na demonstração do Teorema 3.8, F é uma função analítica em R e sua derivada é a função $F' = f$. Pelo Teorema 3.16, F' também é analítica em R , isto é, f é analítica em R , o que completa a demonstração.

É interessante observar que esta demonstração baseia-se inteiramente no teorema de Cauchy. Em outras palavras, a recíproca do teorema de Cauchy é consequência dele mesmo!

3.20. Teorema de Liouville. *Uma função inteira (isto é, analítica em todo o plano) e limitada é necessariamente constante.*

Demonstração. Seja f a referida função, e M uma constante tal que

$|f(z)| \leq M$ para todo z . De acordo com a fórmula integral da derivada,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta,$$

onde z é um ponto qualquer e C um contorno arbitrário envolvendo z uma vez no sentido positivo. Em particular, tomando para C o círculo $|\zeta - z| = r$, obtemos:

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|\zeta - z| = r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} d\zeta \leq \frac{M}{2\pi r^2} \oint_{|\zeta - z| = r} |d\zeta| = \frac{M}{r}.$$

Como r é arbitrário, fazendo $r \rightarrow \infty$, obtemos $f'(z) = 0$: isto sendo verdade para todo z , concluímos que f é constante, como queríamos demonstrar.

3.21. Teorema fundamental da Álgebra. O teorema de Liouville permite fazer uma demonstração simples do teorema fundamental da Álgebra, que diz: *todo polinômio de grau $n \geq 1$ possui ao menos uma raiz*. De fato, seja

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

onde $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$. Suponhamos, por absurdo, que P não se anule, de forma que

$$f(z) = \frac{1}{P(z)} = \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}$$

é uma função inteira. Como $f(z) \rightarrow 0$ com $z \rightarrow \infty$ e f é contínua, portanto, limitada em qualquer parte finita do plano, concluímos que f é limitada em todo o plano. Pelo teorema de Liouville segue-se, então, que f é constante, o que acarreta que $P(z)$ também é constante. Logo, f é identicamente nula (pois é igual a seu limite no infinito). Isto é absurdo, visto que $P(z)$ é finito para todo z , donde a veracidade do teorema.

EXERCÍCIOS

Use a fórmula integral de Cauchy para calcular as integrais descritas nos Exercs. 1 a 13, onde os contornos são todos percorridos no sentido anti-horário.

1. $\oint_{|z-1|=2} \frac{zdz}{z-2}$
2. $\oint_{|z+1|=2} \frac{zdz}{z+2}$
3. $\oint_{|z-2i|=2} \frac{\text{sen } z}{z-i} dz$
4. $\oint_{|z|=2} \frac{z \cos z}{z-i} dz$
5. $\oint_{|z-1|=2} \frac{e^{iz} dz}{z+i}$
6. $\oint_{|z|=1} \frac{izdz}{1-2z} dz$
7. $\oint_{|z-1|=2} \frac{e^{iz} dz}{\pi-2z}$
8. $\oint_{|z-1|=2} \frac{e^z dz}{z^2-4}$
9. $\oint_{|z|=1} \frac{\sqrt{z+5}}{1+2z} dz$
10. $\oint_C \frac{dz}{z^2+1} dz$, onde C é o quadrado de vértices zero, $2i$, e $\pm 1+i$.
11. $\oint_C \frac{dz}{z^2+1} dz$, onde C é o quadrado de vértices zero, $-2i$, e $\pm 1-i$.
12. $\oint_C \frac{ze^z}{z^2-2z-3} dz$, onde C é o losango de vértices ± 2 , e $\pm i$.
13. $\oint_{|z|=2} \frac{\log(z+5)}{z^2-2iz+3} dz$, onde o logaritmo é fixado por $\log 5 > 0$.
14. Use a fórmula da derivada para calcular $\oint_{|z|=3} \frac{\cos(z^2+3z-1)}{(2z+3)^2} dz$.
15. Calcule $\oint_{|z|=1} \frac{z^2+z+i}{(4z-i)^3} dz$.
16. Calcule $\oint_{|z|=1} \frac{\log(z^2+2)}{(3z-2)^2} dz$. Observe que esta integral independe do ramo particular do logaritmo.

Calcule as integrais dos Exercs. 17 a 20, fixando o ramo da função $\sqrt{z^2+4}$ pela condição $\sqrt{4} = -2$ e tomando para C o quadrado de vértices $\pm 1 \pm i$.

17. $\oint_C \frac{\sqrt{z^2+4}}{4z^2+4z-3} dz$
18. $\oint_C \frac{\sqrt{z^2+4}}{4z^2-4iz-1} dz$
19. $\oint_C \frac{\sqrt{z^2+4}}{z^2-2(1+i)z+4i} dz$
20. $\oint_C \frac{z}{(2z^2+1)\sqrt{z^2+4}} dz$

21. Seja f uma função analítica numa região simplesmente conexa R , e seja C um contorno fechado simples contido em R . Prove que, para z interior a C ,

$$\oint_C \frac{f'(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta.$$

Prove, mais geralmente, que

$$\oint_C \frac{f^{(n)}(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = n! \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta.$$

RESPOSTAS E SUGESTÕES

1. $4\pi i$
2. $-4\pi i$
3. $\pi(1-e^2)/e$
4. $\pi(e^2+1)/e$
5. $2\pi i e$
6. $\pi/2$
7. π
8. $i\pi e^2/2$
9. $3\pi i/\sqrt{2}$
10. π
11. $-\pi$
12. $\pi i/2e$
17. Observe que $\sqrt{z^2+4} = \sqrt{z-2i}\sqrt{z+2i}$, de sorte que essa função será negativa em todo o eixo real se pusermos

$$\frac{\pi}{2} < \arg(z-2i) < \frac{\pi}{2} + 2\pi \quad \text{e} \quad -\frac{\pi}{2} < \arg(z+2i) < \frac{3\pi}{2}.$$

Isto corresponde a fazer dois cortes ao longo do eixo imaginário, um de $+2i$ a $+i\infty$ e o outro de $-2i$ a $-i\infty$. (Faça uma figura para entender bem o que se passa.) Escreva o integrando na forma

$$\frac{\sqrt{z^2+4}/2(2z+3)}{z-1/2}$$

e aplique a fórmula de Cauchy.

FUNÇÕES HARMÔNICAS

Diz-se que uma função $u(x, y)$ é harmônica numa região R se nesta região ela possui derivadas de segunda ordem e satisfaz a seguinte equação, conhecida como "equação de Laplace":

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ uma função analítica numa região R . Pelo Teorema 3.16, f possui derivadas de todas as ordens em R . Como $d/dz = \partial/\partial x = \partial/\partial(iy)$, as derivadas sucessivas de f podem ser calculadas derivando repetidamente em relação a x ou em relação a iy . Vemos assim que as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ possuem derivadas contínuas de todas as ordens em R . Podemos então derivar as equações de Cauchy-Riemann,

$$u_x = v_y \quad \text{e} \quad u_y = -v_x,$$

um número arbitrário de vezes. Em particular, derivando a primeira delas em relação a x e a segunda em relação a y , e somando os resultados membro a membro, obtemos:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (3.16)$$

Com o mesmo procedimento, porém derivando a primeira em relação a y e a segunda em relação a x , vem:

$$v_{xx} + v_{yy} = 0. \quad (3.17)$$

Podemos ver também, por derivações sucessivas de (3.16) e (3.17), que quaisquer derivadas parciais de u e v — digamos $\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m \partial y^n}$ e $\frac{\partial^{p+q}v}{\partial x^p \partial y^q}$ — são também harmônicas em R .

A questão que se põe naturalmente é a de saber se qualquer função harmônica pode ser considerada parte real ou parte imaginária de uma função analítica. A resposta a esta questão é afirmativa, como veremos a partir de agora. Existe então uma ligação íntima entre a teoria das funções analíticas e a teoria das funções harmônicas.

A título de ilustração, seja

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad (3.18)$$

que é harmônica em todo o plano, como se verifica prontamente. Vamos determinar a função v correspondente, usando as equações de Cauchy-Riemann. Temos:

$$v_x = -u_y = 2y;$$

integrando em relação a x , obtemos:

$$v = 2xy + g,$$

onde g é uma função arbitrária de y — a “constante da integração” em relação a x . Derivando esta última equação em relação a y e usando $v_y = u_x = 2x$, obtemos $g'(y) = 0$; logo, g é uma constante arbitrária e $v = 2xy + g$. Daqui e de (3.18) segue-se que

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = x^2 + 2ixy - y^2 + \text{const.} = (x - iy)^2 - \text{const.},$$

ou seja,

$$f(z) = z^2 + \text{const.}$$

Função harmônica determina função analítica

Vamos considerar o problema na sua generalidade. Seja $u(x, y)$ uma função harmônica numa região R , que supomos, por enquanto, ser simplesmente conexa. Vamos determinar $v(x, y)$ de forma que $f = u + iv$ seja analítica em R . A função v assim determinada é chamada a função *harmônica conjugada* da função u . Como no exemplo acima, v é determinada pelas equações de Cauchy-Riemann. Devemos ter:

$$dv = v_x dx + v_y dy = -u_y dx + u_x dy.$$

Isto nos leva a procurar a função v na forma

$$v(x, y) = v_0 + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (-u_y dx + u_x dy), \quad (3.19)$$

onde $v_0 = v(x_0, y_0)$ e (x_0, y_0) é um ponto de R fixado arbitrariamente.

Se a integral acima for independente do caminho de integração, a função v que ela define possui derivadas contínuas em R , satisfazendo, juntamente com u , as equações de Cauchy-Riemann; logo, $f = u + iv$ é analítica em R . O problema se reduz, então, a provar que a expressão $-u_y dx + u_x dy$ é uma diferencial exata; mas isto equivale a verificar que a integral desta expressão ao longo de qualquer contorno fechado C em R é nula. Designando por R' o interior de C e tendo em conta o Teorema 3.4 (teorema de Green, p. 90), obtemos:

$$\oint_C (-u_y dx + u_x dy) = \iint_{R'} (u_{xx} + u_{yy}) dx dy = 0,$$

onde usamos o fato de que u é harmônica. Isto conclui a demonstração da existência da função v , a qual é determinada pela função u , a menos de uma constante aditiva arbitrária v_0 , como mostra a expressão (3.19).

Regiões multiplamente conexas

No caso de uma região multiplamente conexa, a função conjugada v pode ser multivalente. Exemplo típico desta situação é dado por $u = \log \sqrt{x^2 + y^2}$. Por simples derivações, verifica-se prontamente que essa função é harmônica em todo o plano, excluída a origem. Substituindo-a em (3.19), obtemos:

$$v(x, y) = v_0 + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

Escolhendo como caminho de integração o contorno formado pelos segmentos retilíneos ligando (x_0, y_0) a (x, y_0) e (x, y_0) a (x, y) (faça uma figura), a expressão acima nos dá:

$$v(x, y) = v_0 - \arctg \frac{x}{y_0} + \arctg \frac{x_0}{y_0} + \arctg \frac{y}{x} - \arctg \frac{y_0}{x}$$

Observe agora que

$$\arctg \frac{x}{y_0} + \arctg \frac{y_0}{x} = \frac{\pi}{2},$$

donde o resultado final:

$$v(x, y) = \arctg \frac{y}{x} + \text{const.},$$

que é uma função multivalente na região considerada. Em coordenadas polares, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\theta = \arctg(y/x)$, obtemos:

$$f = u + iv = \log r + i\theta + \text{const.},$$

ou ainda, com $z = re^{i\theta} = x + iy$,

$$f(z) = \log z + \text{const.}$$

O leitor deve notar que casos como esse se reduzem à situação de uma região simplesmente conexa, bastando para isso introduzir um corte conveniente no plano.

Princípio do módulo máximo

A fórmula integral de Cauchy permite deduzir alguns resultados importantes sobre valores máximo e mínimo de funções analíticas e funções harmônicas, como veremos agora.

3.22. Teorema. *Seja f uma função analítica numa região R . Então, $|f(z)|$ não pode assumir valor máximo em R , a menos que f seja constante.*

Demonstração. Sejam z_0 um ponto qualquer de R , e $r > 0$ tal que o disco $C : |z - z_0| \leq r$ esteja todo contido em R . Pela fórmula de Cauchy,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Daqui segue-se que

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi r} \int_C |f(z)| |dz| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta = K, \quad (3.20)$$

onde K , como se vê, é a média aritmética dos valores de $|f|$ sobre C . Vemos, assim, que o valor de f em qualquer ponto $z_0 \in R$ é, em módulo, menor ou igual à média aritmética dos valores de $|f|$ sobre qualquer círculo C centrado em z_0 e tal que C e seu interior estejam contidos em R .

Suponhamos agora que $|f(z)|$ assumia valor máximo M num ponto $z_0 \in R$: $|f(z_0)| = M$. Continuando com a mesma notação acima, teremos $|f(z_0 + re^{i\theta})| \leq M$; e se, para algum valor de θ tivermos $|f(z_0 + re^{i\theta})| < M$, pela continuidade de $|f(z_0 + re^{i\theta})|$ como função de θ , esta função será menor do que M em todo um intervalo de valores de θ ; daqui e de (3.20) deduzimos prontamente que $K < M$. Isto contradiz a própria desigualdade (3.20). Somos, pois, forçados a concluir que $|f(z_0 + re^{i\theta})| = M$ para todo θ ; isto é, $|f(z)|$ é constantemente igual a M em qualquer círculo C centrado em z_0 e que esteja, juntamente com seu interior, todo contido na região R . Assim, $|f(z)|$ é constante em todo o disco $|z - z_0| \leq r$; portanto, o mesmo é verdade de $f(z)$. Mas, como provaremos adiante (Teorema 6.1 da p. 179), f terá de ser constante em toda a região R . Isto conclui a demonstração.

Conseqüência imediata desse teorema é o resultado que enunciamos a seguir.

3.23. Corolário (princípio do módulo máximo). *Seja f uma função analítica e não constante numa região limitada R e contínua em \bar{R} . Então, $|f(z)|$ assume seu valor máximo na fronteira de R e em nenhum ponto de R .*

Demonstração. Como $|f|$ é contínua em \bar{R} , e este é um conjunto compacto, $|f(z)|$ assume valor máximo em \bar{R} . Pelo teorema anterior, $|f(z)|$ não tem máximo em R ; portanto, seu máximo ocorre em algum ponto z da fronteira de R .

O teorema e corolário anteriores permitem demonstrar resultados análogos para funções harmônicas.

3.24. Teorema. *Seja u uma função harmônica numa região R . Então, $u(x, y)$ não pode assumir valor máximo em R , a menos que seja constante.*

Demonstração. Considere a função $f = u + iv$, onde v é uma conjugada harmônica de u . f é analítica em R , e o mesmo é verdade da função $F(z) = e^{f(z)}$. Agora é só aplicar o Teorema 3.22 a esta função, lembrando que $|F(z)| = e^{u(x,y)}$ e que a exponencial é uma função crescente.

3.25. Teorema (princípio do máximo). *Seja u uma função harmônica e não constante numa região limitada R , e contínua em \bar{R} . Então, $u(x, y)$ assume seu valor máximo na fronteira de R , a menos que u seja constante.*

Demonstração. A cargo do leitor.

Problemas de Dirichlet e de Neumann

O teorema anterior tem aplicações importantes em problemas de Física Matemática, quando se faz necessário resolver a equação de Laplace, ou mesmo a seguinte equação, chamada *equação de Poisson*:

$$\Delta u = f.$$

Entende-se que essa função f seja dada numa certa região R , onde deseja-se

achar a função u satisfazendo à condição de ser igual a uma outra função dada na fronteira de R . Um tal problema chama-se “problema de Dirichlet”. Às vezes, não u , mas sua derivada normal $\partial u/\partial n$ é que deve igualar uma dada função na fronteira; este é o chamado “problema de Neumann”.

Os problemas de Dirichlet e Neumann são exemplos típicos de “problemas de contorno”, assim chamados justamente porque a função u tem de satisfazer certa condição na fronteira ou contorno da região R . Além desses, há outros problemas de contorno, conforme as condições impostas à função u na fronteira, mas aqui vamos nos limitar apenas aos dois mencionados.

Denotando com ∂R a fronteira da região R , f uma função dada em R e g uma função dada em ∂R , os problemas de Dirichlet e Neumann, respectivamente, assim se enunciam: achar u em R tal que

$$\Delta u = f \quad \text{com } u = g \text{ em } \partial R;$$

achar u em R tal que

$$\Delta u = f \quad \text{com } \partial u/\partial n = g \text{ em } \partial R;$$

Vamos mostrar que o problema de Dirichlet, se tem solução, essa solução é única. De fato, suponhamos que u_1 e u_2 sejam soluções: então, pondo $u = u_1 - u_2$, teremos,

$$\Delta u = \Delta u_1 - \Delta u_2 = f - f = 0,$$

isto é, u é solução da equação de Laplace em R . Além disso, em ∂R , $u = 0$, pois tanto u_1 como u_2 são iguais a g na fronteira. Como u se anula na fronteira, pelo princípio do máximo, u deve se anular em toda a região R .

Vamos considerar o problema de Dirichlet para a equação de Laplace, o que equivale a tomar $f = 0$ na equação de Poisson. Com o mesmo tipo de raciocínio que acabamos de fazer, podemos provar que os valores de u em R não podem variar mais que seus valores na fronteira. Mais precisamente, sejam u_1 e u_2 soluções dos problemas de Dirichlet em R com valores de fronteira g_1 e g_2 , respectivamente. Então, pelo princípio do máximo,

$$|u_1(x, y) - u_2(x, y)| \leq \max_{(\xi, \eta) \in \partial R} |g_1(\xi, \eta) - g_2(\xi, \eta)|$$

Isto significa *estabilidade* do problema de Dirichlet, isto é, “pequenas” variações nos valores de g só podem acarretar “pequenas” variações nos valores de u .

Resultados análogos a esses valem para o problema de Neumann e ficam para os exercícios.

EXERCÍCIOS

1. Sendo $f = u + iv$ uma função analítica numa região R , mostre que u é conjugada harmônica de $-v$.
2. Mostre que $u = x - 5xy$ é harmônica em todo o plano. Determine sua conjugada v e expresse $f = u + iv$ em termos de $z = x + iy$.
3. Mostre que $a(x^2 - y^2) + bxy$ é a forma mais geral dos polinômios homogêneos e harmônicos do segundo grau em x e y . Determine sua função harmônica conjugada e a função $f = u - iv$.
4. Determine a forma geral dos polinômios homogêneos e harmônicos de grau 3 em x e y . Determine também a função harmônica conjugada e a função $f = u + iv$.

Mostre que as funções u dos Exercs. 5 a 7 são harmônicas em todo o plano. Determine a função harmônica conjugada e a função $f = u + iv$ em cada caso:

5. $u = x - 4xy$. 6. $u = \sin x \cosh y$. 7. $u = x^3 - 3xy^2$.

8. Sejam f uma função analítica e não constante numa região R e z_0 um ponto qualquer de R . Mostre que em qualquer vizinhança de z_0 existem pontos z tais que $|f(z)| > |f(z_0)|$.
9. Seja f uma função analítica numa região R , não constante e que não se anula nessa região. a) Mostre que $|f(z)|$ não tem valor mínimo em R .
b) **Princípio do módulo mínimo:** Mostre que se R é uma região limitada, f é analítica e não constante em R , não se anula e é contínua em \bar{R} , então $|f(z)|$ assume seu valor mínimo na fronteira de R .
c) Dê exemplo de uma função f que se anula em algum ponto z_0 de uma região R , tal que $|f(z_0)| = 0$ é o valor mínimo de $|f(z)|$.
10. Mostre que uma função harmônica numa região R não pode ser constante em qualquer subconjunto aberto de R , a menos que seja constante em toda a região R .
11. Mostre que uma função harmônica e não constante numa região R não pode assumir valor mínimo. **Princípio do mínimo:** No caso de R ser uma região limitada e a função harmônica contínua em \bar{R} , seu mínimo ocorre na fronteira de R .
12. Seja u uma função harmônica numa região limitada R e contínua em \bar{R} . Mostre que $|u|$ assume seu valor máximo na fronteira de R .

13. Prove que a solução do problema de Neumann, quando existe, é única a menos de uma constante aditiva.
14. Seja g_n uma seqüência de funções definidas na fronteira de uma região R e convergindo uniformemente para uma função f . Prove que as correspondentes soluções u_n do problema de Dirichlet para a equação de Laplace em R , quando existem, formam uma seqüência uniformemente convergente para a solução da equação do problema de Dirichlet com dado de fronteira g .

RESPOSTAS

2. $f(z) = z + 5iz^2/2 + \text{const.}$
4. $u = ax^3 - 3bx^2y - 3axy^2 + by^3$, $v = bx^3 + 3ax^2y - 3bxy^2 - ay^3 + c$,
 $f(z) = u + iv = (a + ib)z^3 + c$.
6. $v = \cos x \sinh y + c$, $f(z) = \sin z + ic$.
9. Para a parte a), considere a função $1/f$.
11. Sendo u a referida função, considere a função $-u$, que também é harmônica.

Capítulo 4

SÉRIES DE POTÊNCIAS

SÉRIES DE FUNÇÕES COMPLEXAS

Estudaremos, neste capítulo, o desenvolvimento de funções analíticas em séries de potências. Veremos ser este um modo natural de construir funções analíticas e um dos instrumentos mais importantes no tratamento dessas funções. Iniciamos este estudo com algumas definições gerais relativas às séries de funções.

Começamos observando que as definições de limite e convergência de seqüências e séries de números complexos são exatamente as mesmas que já conhecemos do caso real. Desses conceitos seguem as mesmas propriedades já conhecidas no caso real sobre limites de soma, produto, quociente etc., e cujas demonstrações são feitas segundo as mesmas linhas de raciocínio.

Uma *série de funções* é uma série

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots$$

cujos termos f_n são, em geral, funções de uma variável (complexa) z , todas com um domínio comum de definição. As expressões

$$\sum f_n(z), \quad \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \quad \text{e} \quad f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z) + \dots$$

são meros símbolos com que denotamos uma série. No caso de uma série

convergente, eles assumem o significado de soma da série, isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots = \lim s_n(z),$$

onde $s_n(z)$ é a soma parcial ou reduzida de ordem n :

$$s_n(z) = \sum_{j=0}^n f_j(z). \tag{4.1}$$

Em se tratando de uma série convergente, é claro que sua soma $s(z) = \sum f_n(z)$ é, em geral, uma função de z . Neste caso a expressão

$$r_n(z) = s(z) - s_n(z) = \sum_{j=n+1}^{\infty} f_j(z) = f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots$$

é chamada o *resto* da série a partir do termo $f_{n+1}(z)$.

Convergência simples ou pontual

Seja

$$s(z) = \sum f_n(z) \tag{4.2}$$

uma série convergente, para todo z num certo conjunto D . Então, dado qualquer $\varepsilon > 0$, para cada $z \in D$ existe N tal que

$$n \geq N \Rightarrow |s(z) - s_n(z)| < \varepsilon, \tag{4.3}$$

onde $s_n(z)$ é a reduzida de ordem n dada em (4.1).

É importante observar que, em geral, N depende não somente de ε mas também do valor z considerado. Por exemplo, consideremos a série geométrica

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots,$$

para a qual

$$s_n(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad z \neq 1.$$

É claro que para $|z| < 1$ a série acima converge e sua soma é $(1 - z)^{-1}$:

$$s(z) = \frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + \dots, \quad |z| < 1.$$

Por outro lado,

$$|s(z) - s_n(z)| = \frac{|z|^{n+1}}{|1 - z|}$$

é menor do que ε se e somente se (estamos supondo $|z| < 1$)

$$n > \frac{\log(\varepsilon|1 - z|)}{\log |z|} - 1.$$

Esta última expressão, por sua vez, cresce acima de qualquer valor à medida que z aproxima o valor 1; logo, não é possível determinar N de forma a satisfazer (4.3) para todo z de módulo menor do que 1: o valor de N depende de cada z particular que se considere, por isso mesmo a convergência costuma ser chamada de *convergência simples* ou *convergência pontual*, que é o único tipo de convergência que temos de considerar quando estudamos seqüências e séries numéricas. No entanto, ao tratarmos seqüências e séries de funções, sejam elas reais ou complexas, há um outro tipo muito importante de convergência, chamada *convergência uniforme*, que vamos considerar em seguida. Esse tipo de convergência é um dos tópicos centrais de qualquer curso de Análise ([A2], Capítulo 9).

Convergência uniforme

4.1. Definições. 1) Diz-se que uma seqüência de funções $(f_n(z))$, definidas num mesmo domínio D , converge uniformemente para uma função $f(z)$ se for sempre possível determinar um índice N em correspondência a cada $\varepsilon > 0$, tal que

$$\forall z \in D \text{ e } n > N \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

2) Diz-se que a série (4.2) converge uniformemente em D se for sempre possível determinar um índice N em correspondência a cada $\varepsilon > 0$, tal que a condição (4.3) fique satisfeita para todo $z \in D$.

4.2. Exemplos. 1) A seqüência $f_n(z) = nze^{-nz}$ converge para zero, qualquer que seja $z = re^{i\theta}$ no setor circular $r \geq 0$ e $|\theta| < \pi/2$, mas não uniformemente. Para vermos isso, observamos que

$$|nze^{-nz}| = nr|e^{-nr(\cos\theta + i\sin\theta)}| = nre^{-nr\cos\theta}.$$

Ora, esta última expressão tende a zero em todo ponto z fixo. Mas não uniformemente. Por exemplo, basta imaginar θ fixo e $r = 1/n$: ou, ainda, r fixo e θ aproximando-se de $\pi/2$ de tal modo que $\cos\theta = 1/nr$.

2) A série geométrica, considerada anteriormente, é um exemplo típico de série que converge no disco $|z| < 1$, mas não uniformemente. A mesma série converge uniformemente em qualquer disco fechado $|z| \leq \delta < 1$. Com efeito, temos:

$$\frac{|z|^{n+1}}{|1 - z|} \leq \frac{\delta^{n+1}}{1 - \delta} \leq \frac{\delta^{n+1}}{1 - \delta},$$

que é menor do que ε , desde que tomemos

$$n > \frac{\log \varepsilon(1 - \delta)}{\log \delta} - 1.$$

Assim, a condição (4.3) fica satisfeita para todo z no disco fechado $|z| \leq \delta$.

4.3. Teorema. Uma condição necessária e suficiente para que a série (4.1) convirja uniformemente em D é que, dado $\varepsilon > 0$, seja possível determinar N tal que, para todo inteiro positivo p , tenhamos:

$$z \in D \text{ e } n > N \Rightarrow |s_{n+p}(z) - s_n(z)| < \varepsilon, \quad (4.4)$$

ou seja,

$$z \in D \text{ e } n > N \Rightarrow |f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon.$$

Demonstração. Supondo que a série convirja uniformemente em D , seja $s(z)$ sua soma. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que, para todo $n \geq N$ e $z \in D$,

$$|s_n(z) - s(z)| < \frac{\varepsilon}{2};$$

é claro que vale também a desigualdade

$$|s_{n+p}(z) - s(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Então, usando a desigualdade do triângulo,

$$\begin{aligned} |s_{n+p}(z) - s_n(z)| &= |[s_{n+p}(z) - s(z)] + [s(z) - s_n(z)]| \\ &\leq |s_{n+p}(z) - s(z)| + |s(z) - s_n(z)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Isto prova que a condição é necessária.

Para provar que ela é suficiente, partimos da hipótese de que (4.4) esteja satisfeita; logo, para cada z fixo, $s_n(z)$ é uma seqüência numérica de Cauchy, portanto, convergente. Seja $s(z)$ seu limite, que é também o limite de $s_{n+p}(z)$ com $p \rightarrow \infty$. Então,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [s_{n+p}(z) - s_n(z)] = s(z) - s_n(z)$$

e, em conseqüência, temos também que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} |s_{n+p}(z) - s_n(z)| = |s(z) - s_n(z)|.$$

Finalmente, passando ao limite em (4.4) com $p \rightarrow \infty$, vem:

$$z \in D \text{ e } n > N \Rightarrow |s(z) - s_n(z)| \leq \varepsilon,$$

provando que a condição é suficiente.

Uma conseqüência importante do teorema acima é o chamado *teste de Weierstrass*, que consideramos a seguir. Ele é freqüentemente usado para testar se uma série é ou não uniformemente convergente.

4.4. Teorema (teste M de Weierstrass). *Sejam $\sum M_n$ uma série numérica convergente e $f_n(z)$ uma seqüência de funções definidas num conjunto D , satisfazendo a condição $|f_n(z)| \leq M_n$ para todo n e todo $z \in D$. Então, a série $\sum f_n(z)$ converge uniformemente em D .*

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned} |f_{n-1}(z) + \dots + f_{n+p}(z)| &\leq |f_{n+1}(z) + \dots + f_{n+p}(z)| \\ &\leq M_{n+1} + \dots + M_{n+p}. \end{aligned}$$

Como $\sum M_n$ é convergente, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$$z \in D \text{ e } n > N \Rightarrow M_{n+1} + \dots + M_{n+p} < \varepsilon;$$

logo, temos também,

$$z \in D \text{ e } n > N \Rightarrow |f_{n+1}(z) + \dots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon.$$

Daqui e do Teorema 4.3 segue a convergência uniforme de $\sum f_n(z)$ em D .

4.5. Exemplo. Para vermos que a série geométrica $1 + z + z^2 + \dots$, considerada anteriormente, converge uniformemente em qualquer disco $|z| \leq \rho < 1$, basta aplicar o teste de Weierstrass, notando que a referida série é dominada pela série numérica $1 + \delta + \delta^2 + \dots$, a qual é convergente, visto que $\delta < 1$.

O teorema seguinte revela a importância da convergência uniforme das séries de funções analíticas; seu alcance será mais bem compreendido logo adiante, quando tratarmos das séries de potências.

4.6. Teorema. *Seja*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \quad (4.5)$$

uma série de funções contínuas, uniformemente convergente num conjunto D . Então,

- 1) *f é contínua em D ;*
- 2) *no caso de a convergência ser uniforme ao longo de um contorno C , a integral de f sobre C pode ser obtida por integração de (4.5) termo a termo;*
- 3) *se a convergência é uniforme numa região simplesmente conexa R , onde as funções f_n são analíticas, então f também é analítica em R , e suas derivadas podem ser obtidas derivando a série (4.5) termo a termo um*

número conveniente de vezes.

Demonstração. 1) Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário e z_0 um ponto qualquer de D . Com a notação

$$s_n(z) = \sum_{j=0}^n f_j(z), \quad r_n(z) = \sum_{j=n+1}^{\infty} f_j(z),$$

resulta que $f(z) = s_n(z) + r_n(z)$; logo,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq |s_n(z) - s_n(z_0)| + |r_n(z) - r_n(z_0)| \\ &\leq |s_n(z) - s_n(z_0)| + |r_n(z)| + |r_n(z_0)| \end{aligned} \quad (4.6)$$

Da convergência uniforme da série (4.5), segue-se que existe um índice N tal que

$$z \in D, \quad n \geq N \Rightarrow |r_n(z)| < \varepsilon.$$

Fixado $n = N$, usamos a continuidade de $s_N(z)$ para determinar $\delta > 0$ tal que

$$z \in D, \quad |z - z_0| < \delta \Rightarrow |s_N(z) - s_N(z_0)| < \varepsilon.$$

Portanto, com $n = N$ e $|z - z_0| < \delta$, a desigualdade (4.6) nos dá

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

donde a continuidade de f em D .

2) Quanto à integração ao longo de C ,

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C s_n(z) dz + \int_C r_n(z) dz \\ &= \sum_{j=0}^n \int_C f_j(z) dz + \int_C r_n(z) dz. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Tomando $n \geq N$ e observando que $|r_n(z)| < \varepsilon$, obtemos:

$$\left| \int_C r_n(z) dz \right| \leq \int_C |r_n(z)| |dz| \leq \varepsilon L,$$

onde L é o comprimento do contorno C . Portanto, fazendo $n \rightarrow \infty$ em (4.7), obtemos o resultado desejado:

$$\int_C f(z) dz = \sum_{j=0}^{\infty} \int_C f_j(z) dz. \quad (4.8)$$

3) Vamos supor agora que as funções f_n sejam analíticas em R . Então

$$\int_C f_j(z) dz = 0, \quad j = 0, 1, \dots$$

para todo contorno fechado C em R . Daqui e de (4.8) segue-se que a integral de f sobre C é nula. Como f é contínua e C é arbitrário, concluímos, pelo teorema de Morera (p. 106), que f é analítica em R .

Finalmente, devemos mostrar que $f' = \sum f'_n$. Dado $z \in R$, seja C um contorno fechado simples em R , envolvendo z positivamente; por exemplo, C pode ser um círculo $|\zeta - z| = \delta$. Como a série

$$\frac{k!}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}$$

converge uniformemente em ζ , para $\zeta \in C$, ela pode ser integrada termo a termo ao longo de C ; usando a fórmula da derivada k -ésima (p. qq), obtemos, por integração termo a termo:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z).$$

Isto completa a demonstração do teorema.

EXERCÍCIOS

1. Supondo que a seqüência de números complexos (a_n) seja convergente, prove que a série $\sum a_n z^n$ converge uniformemente em qualquer disco $|z| \leq r < 1$. Prove que isso é verdade mesmo que a seqüência (a_n) seja apenas limitada, não necessariamente convergente.
2. Prove que a seqüência $f_n(z) = nze^{-n^2 z^2}$ tende a zero para todo z no setor circular $r \geq 0$ e $|\theta| < \pi/4$, mas não uniformemente. Prove que a convergência é uniforme em qualquer domínio do tipo $r \geq c > 0$ e $|\theta| < \pi/4 - \delta$, onde $0 < \delta < \pi/4$.

3. Derivando e integrando a série

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

obtenha os seguintes desenvolvimentos, válidos em $|z| < 1$:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n \quad \text{e} \quad \log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n},$$

onde $\log(1-z)$ é o ramo do logaritmo que corresponde a $\log 1 = 0$.

4. Obtenha os seguintes desenvolvimentos:

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n; \quad \frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n};$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)z^n; \quad \log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n;$$

todos válidos em $|z| < 1$.

Usando o teste de Weierstrass, mostre que as séries dadas nos Exercs. 5 a 16 convergem uniformemente nos domínios indicados em cada caso.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos 3n}{1+5n} z^n$, em qualquer disco $|z| \leq r < 1$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 3 \cos n}{10n^2 + 7} z^{2n-1}$, em qualquer disco $|z| \leq r < 1$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 7\sqrt{n-1}}{(n+1)2^n} z^{2n-1}$, em qualquer disco $|z| \leq r < \sqrt{2}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1} (z-1)^n$, em qualquer disco $|z-1| \leq r < 1$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{R^n} z^n$, em qualquer disco $|z| \leq r < R$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} z^n$, em qualquer disco $|z| < R$, qualquer que seja a constante a .

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{2n}} z^n$, em qualquer disco $|z| < R$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos n}{n^3 + 1} e^{z/n}$, em qualquer disco $|z| < R$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - z}$, em qualquer conjunto compacto que exclua os quadrados perfeitos.

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{z/n}}{n^2 + z^2}$, em qualquer conjunto compacto que não contenha números da forma $z = \pm in$ com n natural.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(z-n)}$, em qualquer conjunto compacto que exclua os números naturais.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2 - z^2}$, em qualquer conjunto compacto que exclua os números inteiros.

17. Prove que a série $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ define uma função analítica em $\operatorname{Re} z > 0$, conhecida como *função zeta* de Riemann.

18. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nz}{2^n}$ define uma função analítica na faixa $|\operatorname{Im} z| < \log 2$.

19. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nz}{n^2}$ converge uniformemente no eixo real, mas em nenhuma região do plano complexo.

SUGESTÕES

17. Qualquer ponto z tal que $\operatorname{Re} z > 0$ está contido num semiplano aberto $\operatorname{Re} z \geq c > 0$.

18. Use o teste de Weierstrass, notando que

$$|\operatorname{sen} nz|^2 = \frac{1}{4}(e^{2ny} + e^{-2ny}) + \frac{1}{2}(\operatorname{sen}^2 nx - \cos^2 nx).$$

19. Use a experiência ganha com o exercício anterior.

SÉRIES DE POTÊNCIAS

Dentre as séries de funções, são de interesse especial as *séries de potências*, ou séries do tipo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (4.9)$$

onde os coeficientes a_n e o ponto z_0 são constantes complexas. Como veremos brevemente, toda série de potências convergente define uma função analítica, e toda função analítica num ponto $z = z_0$ pode ser desenvolvida em série de potências numa vizinhança de z_0 .

Já vimos alguns exemplos dessas séries no caso das funções $(1 - z)^{-1}$ e $(1 + z)^{-1}$:

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n; \quad \frac{1}{1 + z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n. \quad |z| < 1.$$

Aliás, estas séries são muito úteis na obtenção de outros desenvolvimentos, como já tivemos oportunidade de ver nos Exercs. 3 e 4 anteriores. A seguir damos mais quatro exemplos.

4.7. Exemplo. Vamos desenvolver a função $1/z$ em série de potências de $z - 3$. Veja:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z - 3) + 3} = \frac{1/3}{1 + (z - 3)/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (z - 3)^n,$$

desenvolvimento este que é válido em $|z - 3| < 3$.

4.8. Exemplo. Vejamos agora como desenvolver a mesma função $1/z$, porém em séries de potências de $z + 4 = z - (-4)$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z + 4) - 4} = \frac{-1/4}{1 - (z + 4)/4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{4^{n+1}} (z + 4)^n.$$

Aqui o desenvolvimento é válido em $|z + 4| < 4$.

Nesses dois últimos exemplos, temos a mesma função $f(z) = 1/z$ desenvolvida em duas séries de potências distintas, uma em relação ao ponto $z_0 = 3$, a outra em relação ao ponto $z_0 = -4$.

4.9. Exemplo. Vamos desenvolver a função $f(z) = (2z - 9)^{-1}$ em potências de $z - 3$:

$$\frac{1}{2z - 9} = \frac{1}{2(z - 3) - 3} = \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{1 - 2(z - 3)/3} = \frac{-1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2(z - 3)}{3} \right]^n;$$

logo,

$$\frac{1}{2z - 9} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2^n}{3^{n+1}} (z - 3)^n,$$

desenvolvimento este que é válido em $|z - 3| < 3/2$.

4.10. Exemplo. A mesma função do exemplo anterior será agora desenvolvida em potências de $z + 4$:

$$\frac{1}{2z - 9} = \frac{1}{2(z + 4) - 17} = \frac{-1}{17} \cdot \frac{1}{1 - 2(z + 4)/17} = \frac{-1}{17} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2(z + 4)}{17} \right]^n;$$

portanto,

$$\frac{1}{2z - 9} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2^n}{17^{n+1}} (z + 4)^n.$$

Este desenvolvimento é válido em $|z + 4| < 17/2$.

Cada uma das séries consideradas nesses quatro últimos exemplos converge nos pontos z de um disco de centro z_0 . É fácil ver que elas divergem nos pontos z fora desses discos. Esta situação é de caráter geral e segue do teorema que consideramos a seguir.

4.11. Teorema. *A toda série de potências (4.9) está associado um número não-negativo r , tal que a série converge absolutamente em $|z - z_0| < r$ e uniformemente em qualquer disco $|z - z_0| \leq r' < r$. Ela diverge em $|z - z_0| > r$. O número r , que pode assumir os valores $r = 0$ e $r = \infty$, é chamado o "raio de convergência" da série; e o disco de raio r e centro z_0 , o seu "disco de convergência".*

Demonstração. Pode acontecer que a série só convirja em $z = z_0$, caso em que, é claro, $r = 0$. Do contrário, a série converge em um certo $z = z_1 \neq z_0$; então, o termo geral $a_n(z_1 - z_0)^n$ tende a zero, donde segue-se que existe M tal que $|a_n(z_1 - z_0)^n| \leq M$ para todo n . Portanto,

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n(z_1 - z_0)^n| \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n \leq M \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n, \quad (4.10)$$

Isto mostra que a série $\sum |a_n(z - z_0)^n|$ é majorada pela série

$$M \sum \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n,$$

a qual converge no disco $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$; logo, a série (4.9) converge absolutamente em todo z desse disco.

Seja r o supremo do conjunto dos números $|z_1 - z_0|$, onde z_1 varia no conjunto dos pontos onde a série (4.9) converge. Dado qualquer z' no disco $|z - z_0| < r$ (Fig. 4.1), pela definição de r existe z_1 onde a série converge, e tal que $|z' - z_0| < |z_1 - z_0|$. Daqui e do que vimos no parágrafo anterior, concluímos que a série converge absolutamente em $z = z'$ e, portanto, no disco $|z - z_0| < r$.

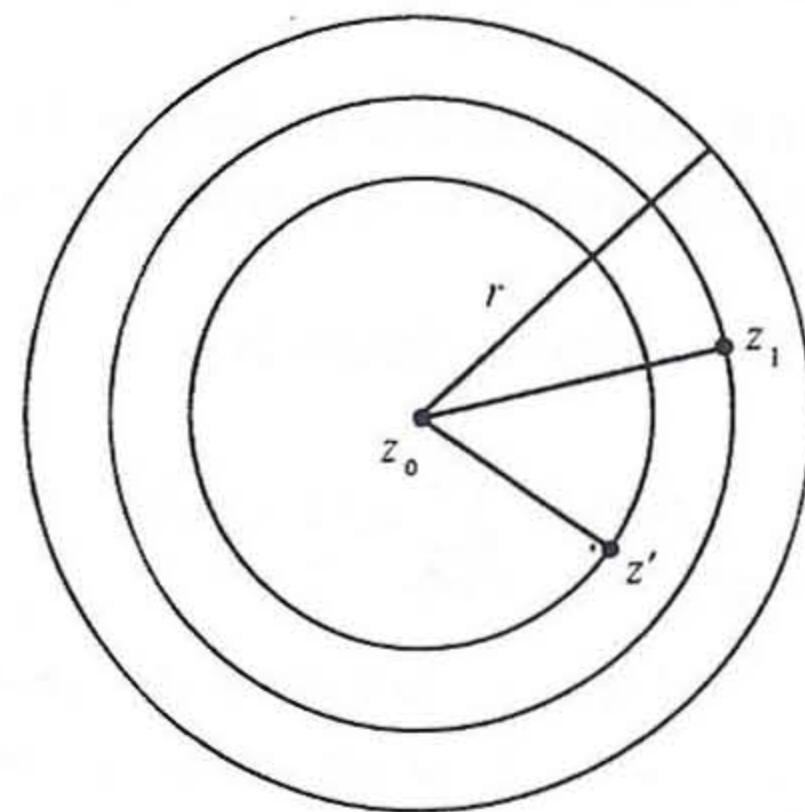


Fig. 4.1

Pela sua própria definição, vê-se também que, se r for finito, a série diverge em $|z - z_0| > r$.

Resta provar a convergência uniforme em qualquer disco $|z - z_0| \leq r' < r$. Fixemos z_1 tal que $r' < |z_1 - z_0| < r$ (Fig. 4.2). Então,

$$\left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right| \leq \frac{r'}{|z_1 - z_0|} = q < 1.$$

Daqui e de (4.10), obtemos: $|a_n(z - z_0)^n| < Mq^n$; aplicando o teste de Weierstrass (Teorema 4.4), concluímos que a série (4.9) converge uniformemente no disco $|z - z_0| \leq r' < r$, o que completa a demonstração. (Observe que o teorema nada esclarece sobre os pontos da fronteira do disco de convergência.)

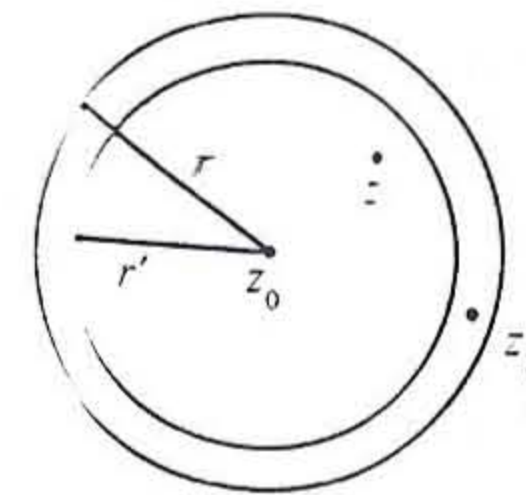


Fig. 4.2

4.12. Teorema. O raio de convergência r da série (4.9) é dado por

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

quando este limite existe. Em geral, r é dado por

$$r = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

com a convenção de se tomar $r = 0$ ou $r = \infty$, conforme o denominador desta expressão seja infinito ou zero, respectivamente.

Demonstração. Suponhamos que exista o primeiro limite referido. Então, pelo teste da razão, a série $\sum |a_n(z - z_0)^n|$ converge (portanto, converge também a série (4.9)) se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n(z - z_0)^n}{a_{n+1}(z - z_0)^{n+1}} \right| = \frac{1}{|z - z_0|} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

for maior do que 1, vale dizer, $|z - z_0| < \lim |a_n/a_{n+1}| = r$.

Para completar a demonstração da primeira parte, resta provar que a série (4.9) diverge se $|z - z_0| > r$. Ora, se ela convergisse em um certo z_1 , com $|z_1 - z_0| > r$, então, pelo teorema anterior, convergiria absolutamente em qualquer z' com $|z_1 - z_0| > |z' - z_0| > r$, contradizendo o teste da razão.

A demonstração da segunda parte é análoga, utilizando o teste da raiz, segundo o qual a série $\sum |a_n(z - z_0)^n|$ converge ou diverge conforme seja

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = |z - z_0| \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$$

menor ou maior do que 1, respectivamente.

EXERCÍCIOS

Nos Exercs. 1 a 5, obtenha os desenvolvimentos em séries de potências, conforme especificação em cada caso. Determine os respectivos discos de convergência e represente-os graficamente.

1. $f(z) = 1/z$ em potências de $z + i$.
2. $f(z) = 1/z$ em potências de $z - i$.
3. $f(z) = i/(z + i)$ em potências de $z - 1$.
4. $f(z) = 1/(2z - 3)$ em potências de z .
5. $f(z) = 1/(2z - 3)$ em potências de $z + i$.
6. $f(z) = 1/z^2$ em potências de $z - 1$.
7. $f(z) = 1/z^3$ em potências de $z + 2$.

Determine os raios de convergência das séries dadas nos Exercs. 8 a 16.

- | | | |
|---|--|---|
| 8. $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$. | 9. $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$. | 10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - i)^n}{n!}$. |
| 11. $\sum_{n=0}^{\infty} \log(3n^2 + 5)(z + i)^n$. | 12. $\sum_{n=0}^{\infty} (\sec n)z^n$. | 13. $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2})^{3n} z^n$. |
| 14. $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n})^n z^n$. | 15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n} z^{2n}$. | 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} z^{n^2}$. |
| 17. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, onde $a_{2n} = 2^{2n}$ e $a_{2n-1} = 5^{2n-1}$. | | |
| 18. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, onde $a_n = n^2$ se n é primo e $a_n = 0$ se n não é primo. | | |

RESPOSTAS E SUGESTÕES

1. $\frac{1}{z} = \frac{1}{-i + (z + i)} = \text{etc.}$ O disco de convergência é $|z + i| < 1$.
3. $\frac{i}{z + i} = \frac{i}{1 + i + (z - 1)} = \frac{i}{1 + i} \cdot \frac{1}{1 + (z - 1)/(1 + i)} = \text{etc.}$ O disco de convergência é $|z - 1| < \sqrt{2}$.

6. Obtenha primeiro a série de $1/z$, depois derive.
8. $r = 1$. 11. $r = 1$. 12. $r = 1/e$. 14. $r = 0$.
15. Trata-se de uma série de potências de $w = z^2$.
16. Observe que $a_{n^2} = n/3n$.
17. $r = 1/5$. 18. $r = 1$.

SÉRIES DE POTÊNCIAS, SÉRIE DE TAYLOR

Vamos estabelecer agora uma caracterização das funções analíticas como aquelas que podem ser desenvolvidas em séries de potências.

4.13. Teorema. *Toda série de potências*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{4.11}$$

representa uma função analítica no seu disco de convergência $|z - z_0| < r$. Ela pode ser derivada termo a termo um número arbitrário de vezes; e as séries assim obtidas possuem o mesmo raio de convergência r da série original, e representam as derivadas da função f .

Demonstração. Dado z qualquer no disco $|z - z_0| < r$, é claro que existe $r_1 < r$ tal que $|z - z_0| < r_1$ (Fig. 4.3a). Neste disco a série (4.11) converge uniformemente (Teorema 4.11) e pode, então, ser derivada termo a termo (Teorema 4.6). A série de derivadas

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)a_{n+1}(z - z_0)^n \tag{4.12}$$

converge pelo menos no disco $|z - z_0| < r$, de forma que seu raio de convergência r' é pelo menos r .

Suponhamos que r' pudesse ser maior do que r . Seja então r'' tal que $r < r'' < r'$ e seja z tal que $r < |z - z_0| < r''$ [Fig. 4.3(b)]. A série (4.12) converge uniformemente em $|z - z_0| < r''$ (Teorema 4.11); logo, pode ser integrada termo a termo ao longo de um caminho C , ligando z_0 a z (Teorema

4.6), resultando em (4.11). Esta série deve então convergir pelo menos para $|z - z_0| < r''$, o que é uma contradição. Fica assim provado que as séries (4.11) e (4.12) possuem o mesmo raio de convergência. O resto do teorema segue facilmente por indução.

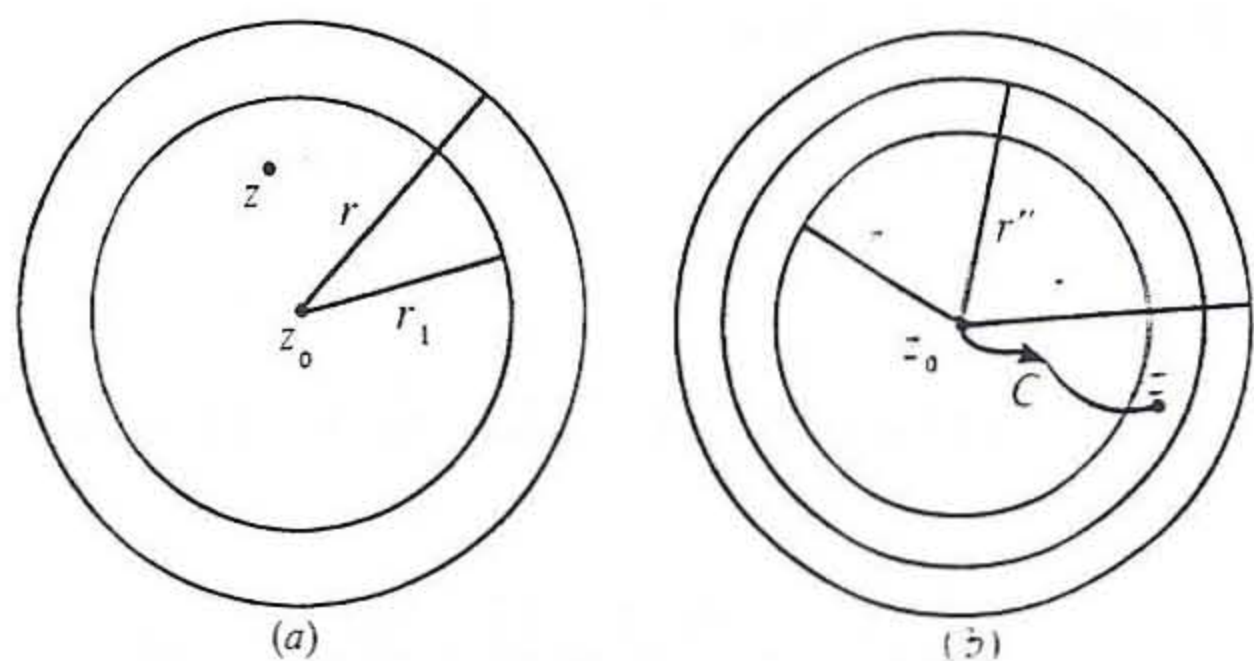


Fig. 4.3

4.14. Teorema (da série de Taylor). *Seja f uma função analítica numa região R, z_0 um ponto qualquer de R, e r_0 > 0 tal que o disco |z - z_0| ≤ r_0 esteja todo contido em R. Então, nesse disco a função f pode ser desenvolvida em série de potências de z - z_0. Conhecido como a "série de Taylor" da função f relativa ao ponto z_0, esse desenvolvimento é dado univocamente por*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

O caso z_0 = 0 é conhecido como série de Maclaurin da função f.

Demonstração. Sejam z um ponto qualquer do disco |z - z_0| < r_0, r = |z - z_0|, e r_1 tal que r < r_1 < r_0 (Fig. 4.4). Pela fórmula de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

onde C_1 é o círculo |ζ - z_0| = r_1. Observe agora que

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}},$$

de forma que a expressão anterior de f fica sendo:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \right] d\zeta. \quad (4.13)$$

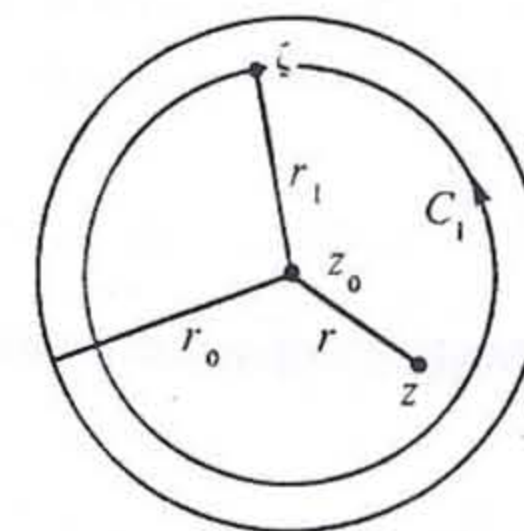


Fig. 4.4

Como f(ζ) é contínua, portanto, limitada por uma constante M sobre o círculo C_1, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \right| \leq \frac{M}{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1} \right)^n$$

Daqui e do teste de Weierstrass segue-se que a série em (4.13) converge uniformemente em ζ ∈ C_1. Podemos, então, integrá-la termo a termo, obtendo:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n.$$

Este é o desenvolvimento procurado, pois a expressão entre colchetes que aí aparece é igual a f^{(n)}(z_0)/n!, como vimos na p. qq. Assim, podemos escrever:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n. \quad (4.14)$$

Resta provar que o desenvolvimento acima é único. Isto é consequência imediata do teorema que consideramos a seguir.

4.15. Teorema (da identidade de séries de potências). *Sejam*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n \quad (4.15)$$

duas séries de potências, convergentes numa vizinhança $|z - z_0| < r$ de z_0 . Seja z_n uma seqüência de pontos distintos, que converge para z_0 , e tal que as duas séries coincidem nos pontos dessa seqüência. Então, as referidas séries são idênticas, isto é, $a_n = b_n$ para todo n . Em particular, esta conclusão é válida se as séries coincidem numa vizinhança de z_0 , ou mesmo num segmento ou pequeno arco com extremidade em z_0 .

Demonstração. As séries representam funções f e g , respectivamente, as quais são contínuas em $z = z_0$; e como $f(z_n) = g(z_n)$, passando ao limite, obtemos $f(z_0) = g(z_0)$, ou seja, $a_0 = b_0$.

Supondo que $a_j = b_j$, $j = 0, \dots, k-1$, vamos mostrar que $a_k = b_k$. Com efeito, cancelando os primeiros k termos das séries (4.15) e dividindo-as por $(z - z_0)^k$, obtemos as séries

$$a_k + a_{k+1}(z - z_0) + \dots \quad \text{e} \quad b_k + b_{k+1}(z - z_0) + \dots,$$

que convergem em $|z - z_0| < r$ e coincidem para $z = z_n$. Então, pelo mesmo argumento anterior, $a_k = b_k$, o que completa a demonstração.

Exemplos de séries de potências

4.16. A exponencial. Como primeiro exemplo, vamos considerar a função exponencial $f(z) = e^z$. Temos aqui $f^{(n)}(z) = e^z$; logo, $f^{(n)}(0) = 1$. Portanto, neste caso o desenvolvimento (4.14) com $z_0 = 0$ nos dá a série de MacLaurin da exponencial:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots,$$

válido para todo z . A constante de Euler é então dada por

$$e = e^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

4.17. Série binomial. Consideremos a função $f(z) = (1+z)^\alpha$, onde α é um número complexo qualquer. A não ser que α seja inteiro, essa função é multivalente, com ramificação no ponto $z = -1$. Vamos considerar o ramo da função fixado pela condição $f(0) = 1$. Como

$$f'(z) = \alpha(1+z)^{\alpha-1}, \quad f''(z) = \alpha(\alpha-1)z^{\alpha-2},$$

e, em geral

$$f^{(n)}(z) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+z)^{\alpha-n},$$

obtemos

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Portanto,

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n, \quad |z| < 1. \quad (4.16)$$

onde o símbolo do coeficiente binomial que aí aparece está definido para todo α complexo pela expressão

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

O desenvolvimento acima da função $(1+z)^\alpha$ é conhecido como "desenvolvimento binomial" ou "série binomial". No caso de α ser um inteiro positivo, a série termina com o termo em z^α , pois, neste caso, o coeficiente binomial se anula para $n > \alpha$.

O desenvolvimento de qualquer outro ramo $g(z)$ da função $(1+z)^\alpha$ segue de (4.16); basta notar que $g(z) = e^{2k\pi ai} f(z)$, onde o inteiro k caracteriza o ramo particular $g(z)$ que se considere. Portanto, o desenvolvimento de $g(z)$ é obtido multiplicando cada termo de (4.16) por $e^{2k\pi ai}$.

4.18. Observações. O cálculo direto das derivadas de uma função nem sempre é o modo mais prático de construir sua série de Taylor. Um procedimento muito útil consiste em utilizar desenvolvimentos conhecidos, como já tivemos oportunidade de ver por meio de exemplos e exercícios. Às vezes é mais fácil obter o desenvolvimento da derivada ou da integral da função original; o desenvolvimento desta é então obtido por integração ou derivação, respectivamente. Consideremos, como exemplo ilustrativo, a função $f(z) = \arcsen z$, ou melhor, a determinação dada por $f(0) = 0$. Sua derivada pode ser desenvolvida usando o desenvolvimento binomial. Veja:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = (1-z^2)^{-1/2} \\ &= 1 + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 2!} z^4 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{2^3 3!} z^6 + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n n!} z^{2n}. \end{aligned}$$

Como

$$1 \cdot 3 \dots (2n-1) = \frac{(2n)!}{(2 \cdot 1)(2 \cdot 2) \dots (2n)} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)},$$

podemos escrever:

$$f'(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} z^{2n}.$$

Integrando de $z = 0$ a z , encontramos o resultado procurado:

$$f(z) = \arcsen z = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (2n+1)(n!)^2} z^{2n+1}, \quad |z| < 1.$$

Produto e quociente de séries de potências

Consideremos duas funções, f e g , regulares num ponto z_0 , dadas por suas séries de potências relativamente a esse ponto:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{e} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \quad (4.17)$$

ambas convergentes num disco $|z - z_0| < r$. O produto $h = fg$ também é regular em z_0 e tem série de potências

$$h(z) = f(z)g(z) = \sum_n c_n (z - z_0)^n, \quad (4.18)$$

que converge pelo menos no mesmo disco $|z - z_0| < r$.

Para determinar os coeficientes c_n em termos dos coeficientes a_n e b_n , lembramos que

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad b_n = \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \text{e} \quad c_n = \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Assim,

$$c_0 = f(z_0)g(z_0) = a_0 b_0;$$

$$c_1 = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0) = a_1 b_0 + a_0 b_1;$$

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{2!} [f''(z_0)g(z_0) - 2f'(z_0)g'(z_0) + f(z_0)g''(z_0)] \\ &= a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{1}{3!} [f'''(z_0)g(z_0) - 3f''(z_0)g'(z_0) + 3f'(z_0)g''(z_0) - f(z_0)g'''(z_0)] \\ &= a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3; \end{aligned}$$

e assim por diante. Em geral, utilizando a regra de derivação de Leibniz (Exerc. 2, p. 52),

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}. \quad (4.19)$$

De modo análogo, se deduz uma regra para a divisão de séries de potências. Sejam dadas as séries de $f(z)$ e $h(z)$, indicadas em (4.17) e (4.18), respectivamente. Vamos determinar a série do quociente $g(z) = h(z)/f(z)$. Devemos supor, então, que $f(z_0) = a_0 \neq 0$. Em consequência, a função f não se anula em toda uma vizinhança de z_0 , onde g é regular e possui desenvolvimento indicado em (4.17). A determinação dos coeficientes b_n em

termos dos coeficientes a_n e c_n se faz usando novamente a relação $fg = h$, donde as relações (4.19). Assim,

$$a_0 b_0 = c_0 \Rightarrow b_0 = c_0/a_0,$$

$$a_0 b_1 + a_1 b_0 = c_1 \Rightarrow b_1 = (c_1 - a_1 b_0)/a_0;$$

e, em geral, para $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$a_0 b_n + \dots + a_n b_0 = c_n \Rightarrow b_n = (c_n - a_1 b_{n-1} - \dots - a_n b_0)/a_0.$$

O cálculo dos coeficientes de uma série de potências pelo produto ou quociente de duas outras é, em geral, complicado. Mas é sempre possível calcular os primeiros coeficientes da série, o que muitas vezes contém as informações desejadas. Vejamos alguns exemplos.

4.19. Exemplo. Consideremos o produto $e^z \sqrt{1+z}$, onde tomamos a determinação principal da raiz quadrada. Então,

$$\begin{aligned} e^z \sqrt{1+z} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} z^n \right] \\ &= \left(1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \dots \right) \left(1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{16}z^3 + \dots \right) \\ &= 1 + \frac{3}{2}z + \frac{7}{8}z^2 + \frac{17}{48}z^3 + \dots, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

4.20. Exemplo. Seja agora a função

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} = \frac{z}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}}.$$

Embora $z/(e^z - 1)$ não tenha sentido para $z = 0$, a última expressão está definida mesmo para $z = 0$ e coincide com $f(z)$ no seu domínio de definição (que exclui os pontos onde $e^z = 1$, isto é, $z = 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \dots$). Logo, é natural definir $f(0) = 1$. Para expandir $f(z)$ em potências de z , pomos

$$f(z) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

donde

$$1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{c_r}{(n-r+1)!} \right) z^n.$$

Daqui segue-se que

$$c_0 = 1, \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{c_r}{(n-r+1)!} = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Estas relações determinam os coeficientes c_n sucessivamente:

$$c_0 = 1, \quad c_1 = -1/2, \quad c_2 = 1/12, \dots$$

Então,

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12} + \dots$$

e esta série tem raio de convergência $r = 2\pi$, pois a função f é regular no disco $|z| < 2\pi$, mas não em $z = \pm 2\pi i$, onde $e^z - 1 = 0$.

4.21. Teorema (da série dupla de Weierstrass) *Seja*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

uma série uniformemente convergente num disco $|z - z_0| < r$. Suponhamos que as funções f_n sejam regulares no mesmo disco, de forma que

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < r.$$

Então as séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}$ convergem para todo k e

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} \right) (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < r.$$

Demonstração. f é analítica no disco $|z - z_0| < r$ (Teorema 4.6), logo, possui desenvolvimento em série de potências de $z - z_0$, cujos coeficientes A_k são dados por $A_k = f^{(k)}(z_0)/k!$. Ainda de acordo com o teorema citado,

$$A_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n^{(k)}(z_0)}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}.$$

Isto completa a demonstração.

4.22. Exemplo. Seja desenvolver em série de potências de z a função inteira $f(z) = e^{\operatorname{sen} z}$. Usando a regra de multiplicação e o Teorema de Weierstrass, obtemos:

$$\begin{aligned} e^{\operatorname{sen} z} &= 1 + \operatorname{sen} z + \frac{\operatorname{sen}^2 z}{2!} + \frac{\operatorname{sen}^3 z}{3!} + \dots \\ &= 1 + \left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots \right) + \frac{1}{2!} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots \right)^3 + \dots \\ &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} \right) z^3 + \left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right) z^4 + \dots, \end{aligned}$$

ou seja,

$$e^{\operatorname{sen} z} = 1 + z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{8} + \dots$$

Esta expressão nos mostra, em particular, que as funções $e^{\operatorname{sen} z}$ e e^z coincidem até segunda ordem com $z \rightarrow 0$:

$$e^{\operatorname{sen} z} - e^z = O(z^3), \quad z \rightarrow 0.$$

EXERCÍCIOS

Obtenha os desenvolvimentos em séries de potências de z dados nos Exercs. 1 a 4, e verifique que eles são válidos para todo z .

- | | |
|---|---|
| 1. $\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$. | 2. $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$. |
| 3. $\operatorname{senh} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$. | 4. $\operatorname{cosh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$. |

Desenvolva em séries de potências de z as funções dadas nos Exercs. 5 a 7, cujos ramos são fixados pelas condições $\arccos 0 = 1$, $\arctg 0 = 0$ e $\sqrt[3]{1} = 1$.

- | | | |
|------------------|-----------------|------------------------------------|
| 5. $\arccos z$. | 6. $\arctg z$. | 7. $\frac{1+z}{\sqrt[3]{1-z^2}}$. |
|------------------|-----------------|------------------------------------|
8. Desenvolva em série de potências de $z-1$ a determinação principal ($\log 1 = 0$) de $f(z) = z \log z - z$.

9. Desenvolva em série de potências de z e $(z-2)$, respectivamente, as funções

$$f(z) = \frac{1}{4-z^3} \quad \text{e} \quad g(z) = \frac{1}{z^5}$$

e represente graficamente seus discos de convergência.

10. Desenvolva em séries de potências de z as funções

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z - 2} \quad \text{e} \quad g(z) = \frac{z}{(z+i)^2(z-1)}$$

11. Mostre que $\operatorname{sen} z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+j}}{(2j+1)!} (z - n\pi)^{2j+1}$, onde n é um inteiro qualquer.
12. Obtenha o desenvolvimento de $\cos z$ em potências de $(z - n\pi - \pi/2)$, onde n é um inteiro.
13. Diz-se que uma função f é par (ímpar) se $f(z) = f(-z)$ ($f(z) = -f(-z)$) para todo z . Demonstre que o desenvolvimento de uma função par (ímpar) em potências de z só contém potências pares (ímpares).
14. Ao fazer o produto de duas séries de potências (4.17), em geral elas têm raios de convergência distintos. Mostre que o raio de convergência da série produto (4.18) é no mínimo o menor dos raios de convergência das séries (4.17). Dê exemplos de séries de potências cujo produto seja uma série com raio de convergência igual ao menor dos raios de convergência das séries dadas; e exemplos em que o produto seja uma série com raio de convergência maior que o menor dos raios de convergência das séries dadas, ou mesmo tenha raio de convergência infinito.
15. Obtenha os primeiros quatro termos do desenvolvimento de $z/(e^z - 1)$ em potências de z . Mostre que

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2}$$

é função par, significando que a função dada pode ser escrita na forma

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_0^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n,$$

onde $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, $B_4 = -1/30$ e $B_{2n+1} = 0$ para $n \geq 1$. Esses B_n são os chamados números de Bernoulli (Jacques Bernoulli (1654-1705)).

16. Mostre que $\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2} \coth \frac{z}{2}$; conclua que $\frac{z}{2} \coth \frac{z}{2} = \sum_0^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$. Substituindo z por $2z$, obtém-se $z \coth z = \sum_0^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$.

17. Mostre que, para $|z| < 1$,

$$\exp\left(\frac{1}{1-z}\right) = e + ez + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+2) \dots (k+n)}{k!} \right] z^n.$$

18. Determine os três primeiros termos do desenvolvimento

$$\log \cos z = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n,$$

tomando $\log 1 = 0$.

19. Sejam f uma função analítica numa região R , $z_0 \in R$ e r o raio de um disco centrado em z_0 e todo contido em R . Mostre que os coeficientes $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ da série de Taylor da função f relativa ao ponto z_0 são tais que $|a_n| \leq M/r^n$, onde M é o máximo de $|f(z)|$ em $|z - z_0| = r$.

SUGESTÕES

9. Observe que $f(z) = 1/4^3 / (1 - z/4)^3$ e aplique o desenvolvimento binomial; ou desenvolva $1/(4 - z)$ em potências de z e derive duas vezes. Quanto a $g(z)$, proceda de modo análogo, escrevendo $z = 2 + (z - 2)$.

10. Use decomposição em frações simples.

18. Observe que $\log(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$ e $\cos z = 1 + (\cos z - 1)$.

SÉRIE DE LAURENT

Vimos, no caso da série de Taylor, que é sempre possível desenvolver em série de potências de $z - z_0$ uma função que seja regular em z_0 . Veremos agora que o desenvolvimento pode ainda ser possível, mesmo que a função não seja regular em z_0 , desde que se admitam potências com expoentes negativos. Um exemplo dessa situação é dado por

$$\frac{e^z}{z^3} = \frac{1}{z^3} \sum \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-3}}{n!} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \frac{z^2}{5!} + \dots$$

Esse tipo de série, conhecido como *série de Laurent*, é uma generalização da série de Taylor. O resultado geral é dado pelo teorema seguinte.

4.23. Teorema. *Seja f uma função univalente e analítica numa região anular $G: r < |z - z_0| < R$. Então, para todo z nesta região,*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (4.20)$$

onde os coeficientes $a_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, são dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad (4.21)$$

sendo C um contorno fechado em G , envolvendo z_0 uma vez no sentido positivo.

Demonstração. Dado $z \in G$, sejam r_1 e r_2 tais que $r < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R$ (Fig. 4.5). Designemos por C_1 e C_2 os círculos de centro z_0 e raios r_1 e r_2 , respectivamente, orientados no sentido positivo. Ligando C_1 e C_2 por um arco L , obtemos um contorno fechado $\gamma = C_2 + L - C_1 - L$, numa região de regularidade da função f ; logo, pela fórmula de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

As integrais ao longo de L e $-L$ se cancelam mutuamente: portanto,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (4.22)$$

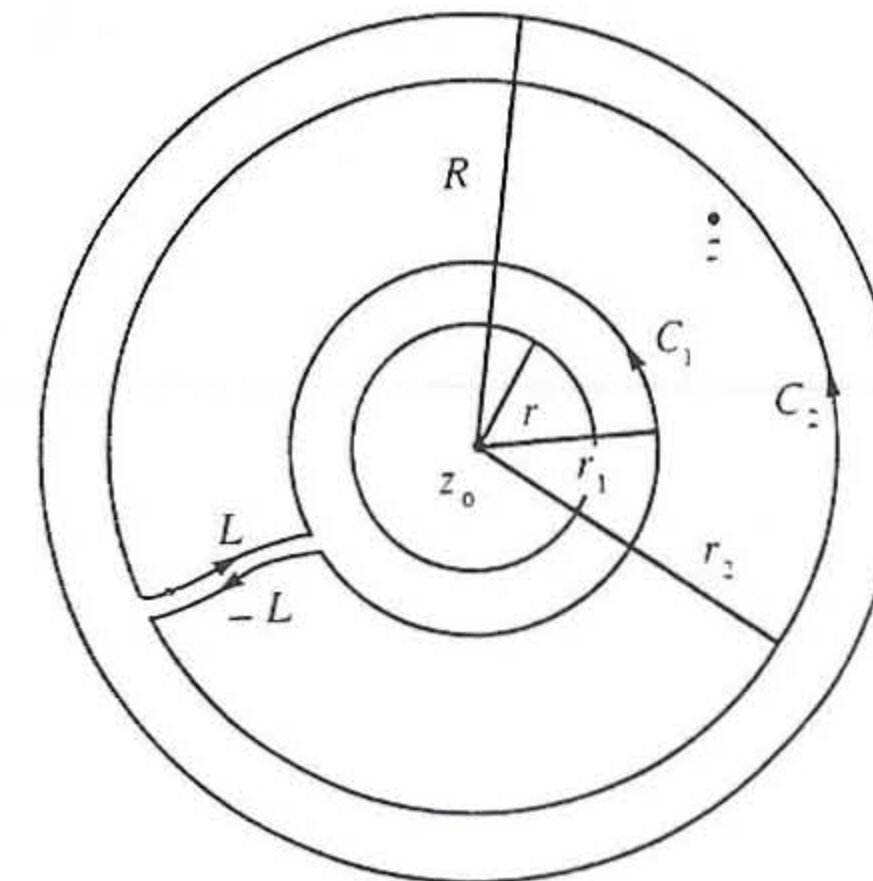


Fig. 4.5

A primeira destas integrais é tratada exatamente como no caso da série de Taylor (Teorema 4.14) e resulta na série de potências positivas que

aparece em (4.20), a qual, substituída em (4.22), nos dá:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta. \quad (4.23)$$

Quanto a esta última integral, notamos primeiro que

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{-1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Esta série converge uniformemente em $\zeta \in C_1$; logo,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n}} d\zeta. \end{aligned}$$

Escrevendo $n + 1$ como novo índice n , obtemos:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n}} d\zeta.$$

Substituindo em (4.23), obtemos o desenvolvimento dado por (4.20) e (4.21), já que a integral que aparece em (4.21) tem o mesmo valor, qualquer que seja o contorno C descrito no teorema, em particular C_1 ou C_2 . Isto completa a demonstração.

Como dissemos anteriormente, a série de Laurent é uma generalização da série de Taylor. Se a função f é regular mesmo para $z - z_0 \leq r$, então, para $n = -1, -2, \dots$ é também regular em todo o disco $|z - z_0| < R$ a função de ζ dada por

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = f(\zeta)(\zeta - z_0)^{-n-1},$$

Em conseqüência, $a_{-n} = 0$ para $n = 1, 2, \dots$, e a série de Laurent se reduz à série de Taylor.

Regularidade no infinito

É interessante notar que, enquanto a primeira das integrais em (4.22) é uma função regular no disco $|z - z_0| < R$ (na verdade, regular em $|z - z_0| < r_2$; mas, dado qualquer z tal que $|z - z_0| < R$, sempre existe $r_2 < R$ tal que $|z - z_0| < r_2$), a segunda integral é regular para $|z - z_0| > r$, inclusive no ponto $z = \infty$, de acordo com a definição que damos a seguir.

Uma função $g(z)$ se diz *analítica, regular* ou *holomorfa* no ponto $z = \infty$ se $g(1/\zeta)$ for regular no ponto $\zeta = 0$. Neste caso,

$$g(1/\zeta) = b_0 + b_1\zeta + b_2\zeta^2 + \dots$$

numa vizinhança de $\zeta = 0$, o que equivale a

$$g(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$$

numa vizinhança de $z = \infty$. Podemos, então, dizer que g é regular no infinito se ela for desenvolvível em série de potências de $1/z$ numa vizinhança do infinito, $|z| > R$.

Com essa definição fica claro o significado da série de Laurent: ela é a soma de duas séries: uma em potências de $z - z_0$, que caracteriza uma função regular no disco $|z - z_0| < R$, o primeiro termo de (4.22); outra em potências de $(z - z_0)^{-1}$, que define uma função regular em $|z - z_0| > r$, o segundo termo de (4.22). A soma dessas duas funções coincide com a função f na região anular $r < |z - z_0| < R$.

Zeros de funções analíticas

Seja f uma função regular num ponto z_0 . Então,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (4.24)$$

numa vizinhança $|z - z_0| < r$.

Pode acontecer que a_0 seja zero, em cujo caso f se anula no ponto z_0 , pois $f(z_0) = a_0$. Dizemos então que z_0 é um *zero* da função f .

Se todos os coeficientes a_n se anulam, então f se anula em toda a vizinhança $|z - z_0| < r$. Excluído este caso, deve existir $m > 0$ tal que a_m seja o primeiro coeficiente não-nulo em (4.24), isto é.

$$a_0 = \dots = a_{m-1} = 0 \quad \text{e} \quad a_m \neq 0.$$

Dizemos, então, que z_0 é um zero de ordem m da função f . Fatorando $(z - z_0)^m$ no desenvolvimento anterior, obtemos:

$$f(z) = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n}(z - z_0)^n.$$

Pondo

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n}(z - z_0)^n, \quad (4.25)$$

concluimos que se z_0 é um zero de ordem m da função f , então, numa vizinhança de z_0 ,

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad \text{e} \quad g(z_0) \neq 0. \quad (4.26)$$

Reciprocamente, suponhamos que exista uma função g satisfazendo a relação (4.26) numa vizinhança $|z - z_0| < r$ de z_0 . A função g possui, nessa vizinhança, desenvolvimento de Taylor do tipo (4.25), que, substituído em (4.26), nos dá o desenvolvimento (4.24) com $a_0 = \dots = a_{m-1} = 0$, $a_m \neq 0$. Fica assim demonstrado o seguinte teorema.

4.24. Teorema. *Uma condição necessária e suficiente para que z_0 seja um zero de ordem m da função f é que exista g satisfazendo a relação (4.26); ou ainda, que $(z - z_0)^{-m} f(z)$ tenha limite finito e diferente de zero com $z \rightarrow z_0$.*

Se uma função f é regular no ponto $z = \infty$, este ponto é chamado um zero de ordem m de $f(z)$ se $\zeta = 0$ é um zero de ordem m de $f(1/\zeta)$. É fácil ver que isto é equivalente a dizer que f possui desenvolvimento

$$f(z) = \frac{a_m}{z^m} + \frac{a_{m+1}}{z^{m+1}} + \dots, \quad a_m \neq 0.$$

válido numa vizinhança $|z| > K$ do infinito.

EXERCÍCIOS

1. A série de Laurent costuma ser escrita na forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad r < |z - z_0| < R. \quad (4.27)$$

(Deve-se entender então que temos aqui duas séries separadamente convergentes, uma que é a soma de $n = 0$ a $n = \infty$ e a outra a soma de $n = -1$ a $n = -\infty$.) Demonstre que, se essa série converge na região indicada, então a convergência é uniforme para $a \leq |z - z_0| \leq b$, quaisquer que sejam a e b , com $r < a < b < R$.

2. Demonstre que a série de Laurent é única, desde que fixados o ponto z_0 e a região onde ela é considerada. *Sugestão:* Multiplique (4.27) por $(z - z_0)^{-k-1}$ e integre termo a termo ao longo de um contorno C conveniente.

Nos Exercs. 3 a 8, obtenha as séries de Laurent das funções dadas, nas situações indicadas.

3. $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, $z_0 = 1$, $0 < |z-1| < 1$.

4. $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, $z_0 = 1$, $|z-1| > 1$.

5. $f(z) = \frac{1}{(z-i)(z-2)}$, $z_0 = 2$, $0 < |z-2| < \sqrt{5}$.

6. $f(z) = \frac{z^5}{z-1}$, $z_0 = 0$, $|z| > 1$.

7. $f(z) = z^5 e^{1/z}$, $z_0 = 0$, $|z| > 0$.

8. $f(z) = \frac{\text{sen } z}{(z-\pi)^3}$, $z_0 = \pi$, $z \neq \pi$.

9. Seja f uma função regular no ponto z_0 . Mostre que z_0 é um zero de ordem m de f se e somente se

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Determine a ordem do zero $z = 0$ das funções dadas nos Exercs. 10 a 15.

10. $(\cos z - 1)^3 \text{sen } z$. 11. $\frac{(1 - \cos z) \text{sen}^2 z}{1 - e^z}$. 12. $(e^z - 1 - z)^3 \text{sen}^2 z$.

13. $e^{\text{sen } z} - e^z$. 14. $(e^{z^2} - 1)(\text{sen } z^2 - z^2)$. 15. $e^{\text{sen } z} - e^{\text{tg } z}$.

Determine os zeros e as respectivas ordens das funções dadas nos Exercs. 16 a 18.

16. $z^2 \text{sen } z$. 17. $(\cos z - 1) \log(1+z)$. 18. $(z^2 - 4)^2 (e^z - 1)$.

19. Se $z = z_0$ é zero das funções f e g , de ordens r e s , respectivamente, prove que ele é zero de ordem $r + s$ de fg . De que ordem é esse zero para a função $f + g$?
20. Demonstre que o inverso de um polinômio de grau m ,

$$f(z) = \frac{1}{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0}, \quad a_m \neq 0,$$

é uma função regular no infinito e este ponto é um zero de ordem m dessa função.

21. Mostre que uma função racional

$$f(z) = \frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0},$$

onde $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$ e $m \leq n$, é regular no infinito, e este ponto é um zero de ordem $n - m$ da função, caso seja $n > m$.

22. Demonstre que uma função analítica no plano estendido (isto é, incluindo $z = \infty$) é necessariamente constante. (Este é outro modo de formular o teorema de Liouville da p. 106)

Capítulo 5

SINGULARIDADES E RESÍDUOS

SINGULARIDADES ISOLADAS

Diz-se que um ponto z_0 é *singularidade isolada* de uma função f se existe uma vizinhança de z_0 na qual f é univalente e regular, exceto no próprio ponto z_0 . Por exemplo, a função

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{\operatorname{sen} z}$$

possui singularidades isoladas nos zeros do denominador, que são os pontos $z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$. Já a função

$$g(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(1/z)}$$

tem singularidades isoladas em cada um dos zeros do denominador, que são os pontos $z = z_n = 1/n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Observe que esses pontos formam uma seqüência convergente. O limite $z = 0$ é, então, um ponto de acumulação de singularidades isoladas. Como veremos mais tarde, um ponto como esse também recebe o nome de "singularidade", mas é uma singularidade não-isolada.

Seja z_0 uma singularidade isolada de uma função f , de forma que o desenvolvimento de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (5.1)$$

é válido numa certa vizinhança perfurada $0 < |z - z_0| < r$ de z_0 .

Singularidades removíveis

Pode acontecer que todos os coeficientes da parte principal sejam nulos, isto é, $a_{-n} = 0$ para $n = 1, 2, \dots$: neste caso

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r.$$

Como esta série de potências define uma função analítica em $|z - z_0| < r$, com o valor a_0 no ponto $z = z_0$, é natural definir f no ponto z_0 , pondo $f(z_0) = a_0$. Vemos assim que uma tal singularidade é apenas aparente e pode ser removida, bastando definir f de maneira apropriada no ponto z_0 . Daí o nome *singularidade removível* que se dá a tais pontos.

Já vimos um exemplo de singularidade removível no Exemplo 4.20 (p. 140), no caso da função $z(e^z - 1)^{-1}$. As funções $(\cos z - 1)/z$ e $z^{-1} \log(1+z)$ também têm singularidades removíveis em $z = 0$, pois

$$\frac{\cos z - 1}{z} = \frac{1}{z} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} - 1 \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n-1} \quad \text{para todo } z:$$

e

$$\frac{\log(1+z)}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^n \quad \text{para } |z| < 1.$$

5.1. Teorema. *Uma singularidade isolada z_0 de $f(z)$ é removível se e somente se $f(z)$ for limitada numa vizinhança de z_0 , ou tiver limite finito com $z \rightarrow z_0$.*

Demonstração. Suponhamos que f seja limitada, digamos, por uma constante M , numa vizinhança de z_0 . Então, de acordo com a fórmula (4.21) (p. 145) que dá os coeficientes da série de Laurent relativa ao ponto z_0 , teremos, para r suficientemente pequeno,

$$|a_n| \leq \frac{Mr^{-n-1}}{2\pi} \int_{|\zeta - z_0| = r} d|\zeta| = Mr^{-n}.$$

Como r é arbitrariamente pequeno, concluímos que $a_n = 0$ para $n < 0$. Isto mostra que a série de Laurent se reduz a uma série de Taylor, provando, portanto, que a singularidade é removível. O restante da demonstração é mais fácil e fica a cargo do leitor.

Singularidades do tipo pólo

Vamos considerar, em seguida, o caso em que no desenvolvimento (5.1) só aparece um número finito de potências negativas, isto é, existe $m > 0$ tal que $a_{-m} \neq 0$ e $a_{-n} = 0$ para $n > m$. Então (5.1) se reduz a

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_{-m} \neq 0. \quad (5.2)$$

Neste caso, z_0 é chamado *pólo de ordem m* da função f . Um pólo de primeira ordem é também chamado *pólo simples*. No caso de um pólo de ordem m , o polinômio em $(z - z_0)^{-1}$ que precede a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ em (5.2) é chamado a *parte singular* ou *parte principal* de f no ponto z_0 . Observe o leitor que, se subtrairmos de f sua parte principal no ponto z_0 , o resultado será uma função com singularidade removível, portanto, regular nesse ponto. Deixamos ao leitor a tarefa de demonstrar que *uma singularidade isolada z_0 de f é um pólo de ordem m se e somente se $(z - z_0)^m f(z)$ tiver limite finito e diferente de zero com $z \rightarrow z_0$* . (Compare com o Teorema 4.24 da p. 148, que é a proposição análoga no caso de zeros.)

5.2. Exemplo. Vamos considerar a função

$$f(z) = \frac{e^z \log(1+z)}{z^4(z-2)},$$

primeiro numa vizinhança de $z = 0$, digamos $|z| < 1$. Escolhemos a determinação principal do logaritmo, caracterizada por $\log 1 = 0$. Para vermos que $z = 0$ é pólo de ordem 3, basta notar que $z^3 f(z)$ tem limite finito e diferente de zero com $z \rightarrow 0$. Para achar a parte principal da série de Laurent na origem, procedemos da seguinte maneira, usando multiplicação de séries:

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \cdot e^z \cdot \frac{\log(1+z)}{z} \cdot \frac{-1/2}{1-z/2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-1/2}{z^3} \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots\right) \left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \dots\right) \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \dots\right) \\
&= \frac{-1/2}{z^3} \left[1 + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)z + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)z^2 + \dots\right] \\
&= \frac{-1/2}{z^3} - \frac{1/2}{z^2} - \frac{5/12}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.
\end{aligned}$$

Os primeiros três termos aí explicitados formam a parte principal da série de Laurent.

A mesma função tem pólo simples em $z = 2$, cuja série de Laurent correspondente tem parte principal dada por

$$\frac{e^2(\log 3)/2^4}{z - 2}.$$

Neste caso, efetuamos um corte ao longo do semi-eixo real negativo (incluindo a origem), de sorte que o domínio da função seja dado por $|\arg z| < \pi$.

Singularidades essenciais

Além das possibilidades já analisadas, a série (5.1) pode conter uma infinidade de termos com potências negativas de $z - z_0$. Dizemos então que z_0 é uma *singularidade essencial* da função f . Exemplo disso é o ponto $z = 0$ no caso da função $e^{1/z}$, pois

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/n!}{z^n} + 1, \quad 0 < |z|.$$

Diz-se que o ponto $z = \infty$ é um *pólo* ou uma *singularidade essencial* da função $f(z)$ se o ponto $\zeta = 0$ for um pólo ou singularidade essencial da função $f(1/\zeta)$, respectivamente.

Qualquer polinômio de grau n ,

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

tem pólo de ordem n no infinito, pois

$$f(\zeta) = P\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{a_n}{\zeta^n} + \frac{a_{n-1}}{\zeta^{n-1}} + \dots + a_0$$

tem pólo de ordem n na origem.

Já a função e^z tem singularidade essencial no infinito, visto que, pondo $z = 1/\zeta$, obtemos:

$$e^{1/\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1/n!}{\zeta^n} + \dots$$

o que mostra que esta função de ζ tem singularidade essencial na origem.

Aliás, esta situação é típica das funções inteiras: a única singularidade delas é o ponto $z = \infty$; e esta singularidade é essencial, a não ser que a função inteira se reduza a um polinômio de grau n , em cujo caso $z = \infty$ é um pólo de ordem n . De fato, dada uma função inteira f , como é regular em todo o plano, temos, para todo z ,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

donde

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\zeta^n} + a_0$$

e daqui segue o resultado enunciado.

Um resultado interessante sobre singularidades essenciais é dado pelo teorema que consideramos a seguir.

5.3. Teorema (de Casorati-Weierstrass). *Seja f uma função com singularidade essencial num ponto z_0 . Então, em qualquer vizinhança de z_0 , f se aproxima arbitrariamente de qualquer número que se prescreva. Dito de outra maneira, qualquer que seja o número α que se prescreva, dados $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$, existe $z \in V'_\delta(z_0)$ tal que $|f(z) - \alpha| < \varepsilon$.*

Demonstração. Raciocinando por absurdo, suponhamos que existam $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ tais que $|f(z) - \alpha| \geq \varepsilon$ para todo $z \in V'_\delta(z_0)$. Então a função

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - \alpha}$$

é limitada em $z \in V'_\delta(z_0)$; e pelo Teorema 5.1, z_0 é singularidade removível de $g(z)$. Definida convenientemente, $g(z)$ é analítica em z_0 . Se $g(z_0) \neq 0$,

sua inversa $g^{-1}(z) = f(z) - \alpha$ seria analítica em z_0 , contradizendo a hipótese do teorema. Se $g(z_0) = 0$, z_0 seria zero de certa ordem m da função g , significando isto que z_0 seria pólo de ordem m da função $f(z) - \alpha$. Mas isto também contradiz a hipótese do teorema e completa a demonstração.

EXERCÍCIOS

Mostre que $z = 0$ é singularidade removível de cada uma das funções dadas nos Exercs. 1 a 5. Determine o valor que se deve atribuir à função em $z = 0$ para que ela fique regular nesse ponto.

1. $\frac{z}{e^z - 1}$. 2. $\frac{e^z - 1}{\operatorname{sen} 2z}$. 3. $\frac{\cosh 2z - 1}{\operatorname{sen}^2 z}$. 4. $\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$. 5. $\frac{1}{z} - \frac{1}{\operatorname{sen} z}$.

Determine os pólos, com suas respectivas ordens, no caso de cada uma das funções dadas nos Exercs. 6 a 13.

6. $\frac{z + 4}{z(z^2 + 1)^2}$. 7. $\frac{\operatorname{sen} z}{z^3(z - \pi)}$. 8. $\frac{1}{z \operatorname{sen}^2 \pi z}$. 9. $\frac{1 - e^z}{z^4 \operatorname{sen}(1 + z)}$.
 10. $\frac{e^z}{z(1 - e^{-z})}$. 11. $\frac{1}{(e^{iz} - 1)^2}$. 12. $\frac{\cosh z}{z(1 - \cos z)}$. 13. $\frac{\operatorname{senh} z}{z \operatorname{sen}^2(z + \pi/2)}$.

14. Seja z_0 um zero das funções f e g . Supondo ainda que $g'(z_0) \neq 0$, mostre que z_0 é singularidade removível de f/g e

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

15. Demonstre que uma singularidade isolada z_0 de uma função f é um pólo de ordem m se e somente se $(z - z_0)^m f(z)$ tiver limite finito e diferente de zero com $z \rightarrow z_0$.
 16. Demonstre que z_0 é pólo de ordem m de uma função f se e somente se z_0 for zero de ordem m de $1/f$.
 17. Demonstre que uma singularidade isolada z_0 de uma função f é pólo se e somente se $|f(z)|$ tende a infinito com $z \rightarrow z_0$.
 18. Determine a parte principal da função

$$f(z) = \frac{1}{z(z - i)^2}$$

relativa ao pólo $z = i$.

19. Determine a parte principal da função

$$f(z) = \frac{1}{(z - n\pi)^2 \operatorname{sen} z}$$

relativa ao pólo $z = n\pi$ (n inteiro).

RESPOSTAS

6. $z = 0, i$ e $-i$, de ordens 1, 2 e 2, respectivamente.
 8. $z = 0$, de ordem 3; $z = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ de ordens 2.
 10. $z = 0$, de ordem 2; $z = 2k\pi i$ (k inteiro $\neq 0$), de ordens 1.
 12. $z = 0$, de ordem 3; $z = 2k\pi$ (k inteiro $\neq 0$), de ordens 2.
 18. $\frac{-i}{(z - i)^2} + \frac{1}{z - i}$.

TEOREMA DO RESÍDUO

Seja f uma função regular e univalente numa região R , exceto numa singularidade isolada $z_0 \in R$. Então, numa vizinhança de z_0 vale o desenvolvimento de Laurent,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

os coeficientes a_n sendo dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \tag{5.3}$$

onde C é um contorno fechado de R , envolvendo z_0 uma vez no sentido positivo.

O coeficiente a_{-1} acima é chamado o *resíduo de f no ponto z_0* , e denotado $(\operatorname{res.} f)(z_0)$. Sua importância reside no teorema que daremos a seguir.

5.4. Teorema (do resíduo). *Se f é regular e univalente numa região simplesmente conexa R , exceto em um número finito de singularidades isoladas. z_1, \dots, z_k , então*

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k (\operatorname{res.} f)(z_j). \tag{5.4}$$

onde C é um contorno fechado de R , envolvendo z_1, \dots, z_k uma vez no sentido positivo.

Demonstração. No caso em que C encerra uma única singularidade z_0 , a fórmula (5.4) se reduz a

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i(\text{res. } f)(z_0), \quad (5.5)$$

que é equivalente à expressão de $a_{-1} = (\text{res. } f)(z_0)$ dada em (5.3).

No caso de várias singularidades z_1, \dots, z_k , utilizamos o Teorema 3.10 (p. 95), segundo o qual a integral sobre C é igual à soma de k integrais

$$I_j = \int_{C_j} f(z)dz, \quad j = 1, \dots, k,$$

onde C_j é um contorno fechado que envolve apenas a singularidade z_j , uma vez no sentido positivo (Fig. 5.1). Basta observar agora que cada uma destas integrais é dada por uma expressão análoga a (5.5), donde a fórmula (5.4).

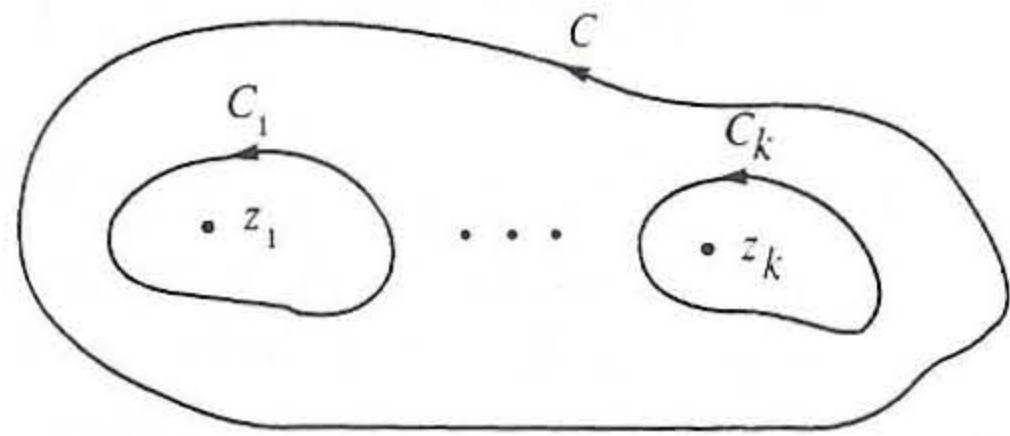


Fig. 5.1

Nas seções seguintes, vamos considerar várias aplicações do teorema do resíduo no cálculo de certas integrais. Isto é feito, como sugere a fórmula (5.4), reduzindo a integração a uma soma de resíduos: estes devem, então, ser obtidos dos desenvolvimentos de Laurent apropriados ou por processos que deles decorrem. No caso de um pólo simples z_0 , por exemplo, temos

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

numa vizinhança de z_0 , donde

$$(z - z_0)f(z) = a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \dots$$

Logo, neste caso o resíduo a_{-1} é dado pela fórmula

$$(\text{res. } f)(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)]. \quad (5.6)$$

Seja agora z_0 um pólo duplo da função f , de forma que

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

numa vizinhança de z_0 . Daqui obtemos:

$$(z - z_0)^2 f(z) = a_{-2} + a_{-1}(z - z_0) + a_0(z - z_0)^2 + \dots;$$

logo,

$$\frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f(z)] = a_{-1} + 2a_0(z - z_0) + 3a_1(z - z_0)^2 + \dots$$

Vemos, então, que se z_0 é pólo duplo de f , o resíduo correspondente é dado pela seguinte fórmula:

$$(\text{res. } f)(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f(z)]. \quad (5.7)$$

5.5. Exemplo. Consideremos a função

$$f(z) = \frac{1}{\log^2 z}.$$

que tem pólo duplo no ponto $z = 1$. (Estamos considerando o ramo principal do logaritmo, determinado pela condição $\log 1 = 0$; ou ainda, $|\arg z| < \pi$.) De acordo com (5.7), seu resíduo neste ponto é

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \frac{(z - 1)^2}{(\log^2 z)} &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2(z - 1) \log^2 z - 2(z - 1)^2 \log z / z}{\log^4 z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2(z - 1)}{\log z} \cdot \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\log z - 1 + 1/z}{\log^2 z} \end{aligned}$$

Calculando estes limites pela regra de l'Hôpital, encontramos $(\text{res. } f)(1) = 1$.

A fórmula (5.7) se generaliza para o caso de um pólo de ordem m qualquer. Deixamos ao leitor a tarefa de estabelecer o seguinte resultado geral:

Se z_0 é pólo de ordem m de uma função f , então

$$(\text{res. } f)(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]. \quad (5.8)$$

EXERCÍCIOS

1. Seja $f(z)$ uma função analítica e diferente de zero no ponto $z = z_0$. Mostre que a função $g(z) = f(z)/(z - z_0)$ tem pólo simples nesse ponto, com resíduo igual a $f(z_0)$.
2. Sejam $p(z)$ e $q(z)$ funções regulares no ponto z_0 , $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$ e $q'(z_0) \neq 0$. Mostre que z_0 é pólo simples da função $f(z) = p(z)/q(z)$, com resíduo igual a $p(z_0)/q'(z_0)$.
3. Use a regra (5.8) para determinar o resíduo de

$$f(z) = \frac{e^{\pi iz}}{(z - \pi)^4}$$

no seu pólo $z = \pi$. Obtenha o mesmo resultado desenvolvendo $e^{i\pi z} = e^{i\pi^2} e^{i\pi(z-\pi)}$ em série de potências de $z - \pi$.

Determine os pólos, as ordens e os resíduos correspondentes de cada uma das funções dadas nos Exercs. 4 a 11.

- | | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--|
| 4. $\frac{z - \text{sen } z}{z^4}$. | 5. $\frac{z - \text{sen } z}{z^6}$. | 6. $\text{coth } z$. | 7. $\frac{e^z}{z^2 + \pi^2}$. |
| 8. $\frac{e^{3z}}{z(z-1)^2}$. | 9. $\frac{1}{z \text{ sen } z}$. | 10. $\frac{e^z}{z \text{ sen } z}$. | 11. $\frac{\log(1+z)}{z^2 \text{ sen } z}$. |

Neste último exercício, considere o plano cortado ao longo do semi-eixo $(-\infty, -1]$.

12. Calcule a integral

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-i)(z^2+4)} dz,$$

tomando para C , sucessivamente, os seguintes círculos, todos orientados positivamente:

- a) de raio 3, centrado na origem;
- b) de raio 3, centrado em $z = -3i$;
- c) de raio $1/3$, centrado em $z = 2i$;
- d) de raio 2, centrado no ponto $z = 1$.

Calcule as integrais dadas nos Exercs. 13 a 15.

13. $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{\text{sen } z} dz$. 14. $\oint_{|z-1|=1} \text{tg } 3z dz$. 15. $\oint_{|z|=2} \frac{\cot z}{z} dz$.

RESPOSTAS E SUGESTÕES

6. Pólos simples em $z = k\pi i$, k inteiro.
7. Pólos simples em $z = \pm i\pi/2$.

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DE FUNÇÕES RACIONAIS

Veremos agora como o teorema do resíduo pode ser utilizado para calcular certas integrais impróprias de funções racionais. Começamos com um exemplo concreto.

5.6. Exemplo. Seja calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dz}{z^2 + 1}.$$

O integrando, $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$, possui pólos simples nos pontos $z = \pm i$. Seja C_R o semicírculo do semiplano $\text{Im } z \geq 0$, de raio R e centro na origem. Supondo $R > 1$, o contorno formado pelo segmento $[-R, R]$, seguido de C_R (Fig. 5.2), contém o pólo $z = i$, onde o resíduo de f é $1/2i$. Pelo teorema do resíduo,

$$\int_{-R}^R \frac{dz}{z^2 + 1} + \int_{C_R} \frac{dz}{z^2 + 1} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi. \quad (5.9)$$

Por outro lado, $|f(z)| \leq 1/(|z|^2 - 1)$, donde

$$\left| \int_{C_R} \frac{dz}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{R^2 - 1} \int_{C_R} |dz| = \frac{\pi R}{R^2 - 1}.$$

Isto mostra que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{dz}{z^2 + 1} = 0;$$

logo, passando ao limite com $R \rightarrow \infty$ em (5.9), obtemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \pi,$$

que é o resultado procurado.

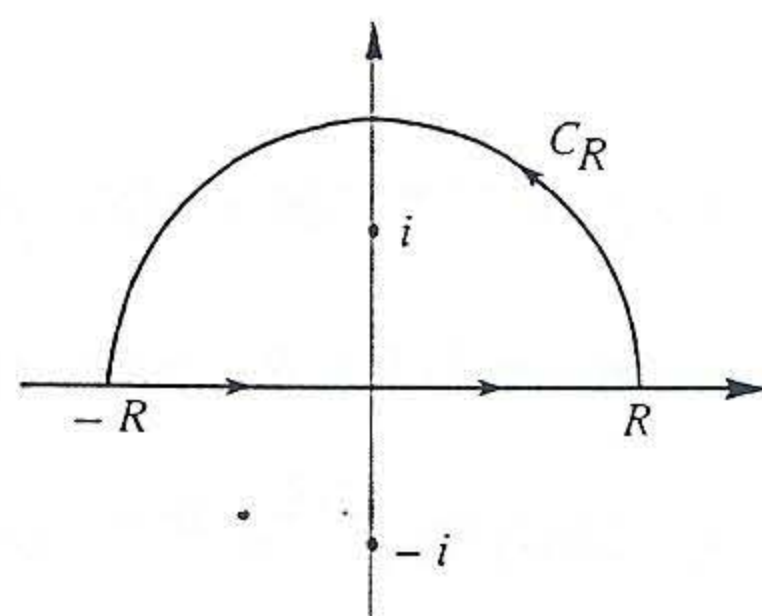


Fig. 5.2

Embora esse exemplo seja dos mais simples que se possa imaginar, ele apresenta um procedimento que é aplicável ao cálculo de toda integral de $-\infty$ a $+\infty$ de funções racionais $f(z) = P(z)/Q(z)$, onde $Q(z)$ não se anula para z real e

$$\text{grau } Q - \text{grau } P = m \geq 2$$

De fato, como $z^m P(z)$ e $Q(z)$ são polinômios de mesmo grau, $z^m f(z)$ tem limite finito e diferente de zero com $z \rightarrow \infty$; portanto, existem N e K positivos tais que

$$|z| = R > N \Rightarrow |f(z)| \leq \frac{K}{R^m}.$$

Em conseqüência,

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |f(z)| |dz| \leq \frac{K}{R^m} \int_{C_R} |dz| = \frac{K\pi}{R^{m-1}},$$

como $m \geq 2$, a integral sobre C_R tende a zero com $R \rightarrow \infty$.

Por outro lado, para R bastante grande,

$$\int_{-R}^R \frac{P(z)}{Q(z)} dz + \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_i (\text{res. } f)(z_i),$$

onde a soma se estende a todos os pólos z_i da função $P(z)/Q(z)$ que jazem no semiplano $\text{Im } z > 0$. Fazendo então $R \rightarrow \infty$, obtemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_i (\text{res. } f).$$

5.7. Observação. Devemos notar que o contorno C_R pode ser tomado no semiplano inferior $\text{Im } z < 0$. Neste caso, o caminho de $-R$ a R , seguido do semicírculo C_R , constitui um contorno fechado e com orientação negativa, como ilustra a Fig. 5.3. Logo, na fórmula anterior, o membro da direita leva um sinal negativo e a soma se estende aos pólos z_i do semiplano $\text{Im } z < 0$.

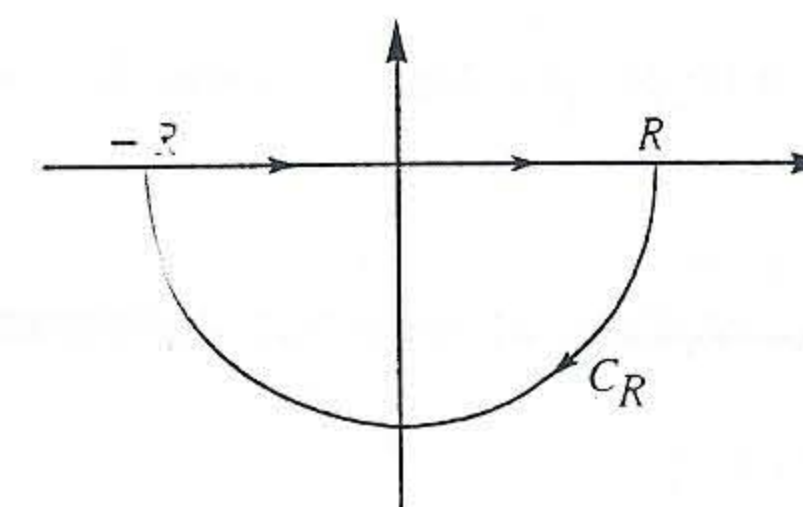


Fig. 5.3

5.8. Observação. O procedimento usado acima, que consistiu em incluir o caminho de integração C_R ao intervalo $[-R, R]$, costuma ser chamado de "dobrar o caminho de integração". Assim, o que fizemos foi dobrar o caminho de integração $[-R, R]$ no semiplano superior, incluindo o contorno C_R . Pela observação anterior, podemos também dobrar o caminho de integração no semiplano inferior.

EXERCÍCIOS

1. Calcule $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$.

2. Sendo a, b, c números reais, com $b^2 < 4ac$, calcule $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$.

3. Mostre que

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(z^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{2ab(a + b)},$$

onde $a \geq b > 0$. Considere as duas possibilidades: $a \neq b$ e $a = b$.

Calcule cada uma das integrais dadas nos Exercs. 4 a 9.

4. $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{x^4 + 9}$ 5. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 - x + 1}$ 6. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^6 + 1}$
 7. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}$ 8. $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2}, a > 0$ 9. $\int_0^\infty \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$.

RESPOSTAS E SUGESTÕES

1. $\pi/\sqrt{2}$. 2. $\frac{2\pi}{\sqrt{4ac - b^2}}$
 3. O integrando $f(z)$ é função par, logo a integral de $-\infty$ a zero é igual à integral de zero a ∞ .
 4. $\frac{\pi\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}$ 7. $-\pi/27$ 8. $\pi/4a$.

LEMA DE JORDAN

Muitas vezes temos necessidade de calcular integrais impróprias do tipo

$$\int_{-\infty}^\infty e^{irz} f(z) dz.$$

Somos então levados a dobrar o caminho de integração e considerar a integral

$$I_R = \int_{C_R} e^{irz} f(z) dz,$$

onde C_R é um semicírculo de centro na origem e raio R . O lema de Jordan, que consideramos a seguir, estabelece condições suficientes para que esta integral tenda a zero com $R \rightarrow \infty$.

5.9. Lema de Jordan. *Sejam $r > 0$, $R > 0$ e C_R o semicírculo $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Suponhamos que f seja uma função regular no semiplano $\text{Im } z \geq 0$, à exceção, eventualmente, de um número finito de singularidades isoladas; e que o máximo $G(R)$ de $|f(z)|$ para $z \in C_R$ tenda a*

zero com $R \rightarrow \infty$. Então $I_R \rightarrow 0$ com $R \rightarrow \infty$.

Demonstração. Começamos observando que

$$\begin{aligned} I_R &= \int_0^\pi e^{irR(\cos\theta + i\text{sen}\theta)} f(Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta \\ &= iR \int_0^\pi e^{-rR\text{sen}\theta} f(Re^{i\theta}) e^{i(rR\cos\theta + \theta)} d\theta, \end{aligned}$$

donde

$$|I_R| \leq RG(R) \int_0^\pi e^{-rR\text{sen}\theta} d\theta = 2RG(R) \int_0^{\pi/2} e^{-rR\text{sen}\theta} d\theta.$$

Como $\text{sen } \theta \geq 2\theta/\pi$ no intervalo $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ¹, temos:

$$\begin{aligned} |I_R| &\leq 2RG(R) \int_0^{\pi/2} e^{-2rR\theta/\pi} d\theta \\ &= \frac{\pi G(R)}{r} (1 - e^{-rR}) \rightarrow 0 \text{ com } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Isto completa a demonstração.

O leitor não terá dificuldade em verificar resultado análogo para $r < 0$ e C_R no semiplano inferior $\text{Im } z \leq 0$.

5.10. Exemplo. Como aplicação do lema de Jordan, seja calcular

$$\int_0^\infty \frac{x \text{sen } x}{a^2 + x^2} dx, \quad a > 0.$$

Observando que o integrando é uma função par e que $\text{sen } x = \text{Im } e^{ix}$, teremos:

$$\int_0^\infty \frac{x \text{sen } x}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{x \text{sen } x}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \text{Im} \int_{-\infty}^\infty \frac{ze^{iz}}{a^2 + z^2} dz. \quad (5.10)$$

¹Para provar isso, consideramos a função $f(\theta) = \text{sen } \theta - 2\theta/\pi$ no referido intervalo. Sua derivada, $f'(\theta) = \cos \theta - 2/\pi$, se anula para um certo valor a , é positiva para $0 < \theta < a$ e negativa para $a < \theta < \pi/2$. A função f é então crescente no intervalo $0 < \theta < a$ e decrescente em $a < \theta < \pi/2$. Como $f(0) = f(\pi/2) = 0$, concluímos que $f(\theta) \geq 0$ em todo o intervalo $0 \leq \theta \leq \pi/2$; logo, $\text{sen } \theta \geq 2\theta/\pi$ nesse intervalo.

O integrando $g(z) = ze^{iz}/(a^2 + z^2)$ tem pólo simples no ponto $z = ia$, que é sua única singularidade no semiplano superior. Considerando, então, a integral de $-R$ a R ($R > a$), seguida da integral sobre C_R no semiplano superior, obtemos:

$$\int_{-R}^R \frac{ze^{iz}}{a^2 + z^2} dz + \int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{a^2 + z^2} dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{-a}}{2}$$

onde $e^{-a}/2$ é resíduo de g no ponto $z = ia$. Passando ao limite e usando o lema de Jordan, vem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{iz}}{a^2 + z^2} dz = \pi i e^{-a};$$

substituindo em (5.10) obtemos, finalmente,

$$\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi e^{-a}}{2}.$$

5.11. Exemplo. Vamos agora calcular a integral da função $\operatorname{sen} x/x$ de $-\infty$ a $+\infty$. Gostaríamos de escrever:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz, \tag{5.11}$$

mas observe que enquanto $z = 0$ é singularidade removível de $\operatorname{sen} z/z$, esse ponto é um pólo simples de e^{iz}/z , de forma que a integral do segundo membro não existe. Isto acontece porque esta integral incorpora a integral de $\cos z/z$, que não aparece no primeiro membro. Mas, embora as integrais

$$\int_a^0 \frac{e^{iz}}{z} dz \quad \text{e} \quad \int_0^b \frac{e^{iz}}{z} dz$$

não existam separadamente (estamos supondo, é claro, que $a < 0 < b$), existe o *valor principal* segundo Cauchy, assim definido:

$$\text{v.p.} \int_a^b \frac{\cos z}{z} dz = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_a^{-i\delta} + \int_{i\delta}^b \right) \frac{\cos z}{z} dz.$$

Existe igualmente

$$\text{v.p.} \int_a^b \frac{e^{iz}}{z} dz = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_a^{-i\delta} + \int_{i\delta}^b \right) \frac{e^{iz}}{z} dz,$$

De fato, tanto $\cos z/z$ como e^{iz}/z têm parte principal 1/z em $z = 0$, para a qual a existência da integral no sentido de valor principal é evidente. Isso justifica a identidade (5.11), pelo menos com limites de integração finitos a e b , desde que se interprete a integral do segundo membro no sentido de "valor principal". Adotamos esse procedimento, tomando primeiro $a = -R$ e $b = R$ para, em seguida passar ao limite com $R \rightarrow +\infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_{-R}^{-\delta} + \int_{\delta}^R \right) \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

Para fechar o caminho de integração, além do semicírculo C_R no semiplano superior, introduzimos também o semicírculo C_δ no semiplano inferior, de raio δ e centro na origem, como se vê na Fig. 5.4. O contorno fechado assim obtido contém o pólo $z = 0$ da função e^{iz}/z , cujo resíduo aí é 1. Então,

$$\left(\int_{-R}^{-\delta} + \int_{\delta}^R \right) \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_\delta} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 2\pi i. \tag{5.12}$$

Como

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + f(z),$$

onde $f(z)$ é regular, portanto, limitada, numa vizinhança de $z = 0$, existe $K > 0$ tal que $|f(z)| \leq K$ para $|z| \leq \delta$. Portanto,

$$\int_{C_\delta} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{C_\delta} \left[\frac{1}{z} + f(z) \right] dz = \pi i + \int_{C_\delta} f(z) dz$$

e

$$\left| \int_{C_\delta} f(z) dz \right| \leq K \int_{C_\delta} |dz| = K\pi\delta \rightarrow 0 \text{ com } \delta \rightarrow 0;$$

logo,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \frac{e^{iz}}{z} dz = \pi i.$$

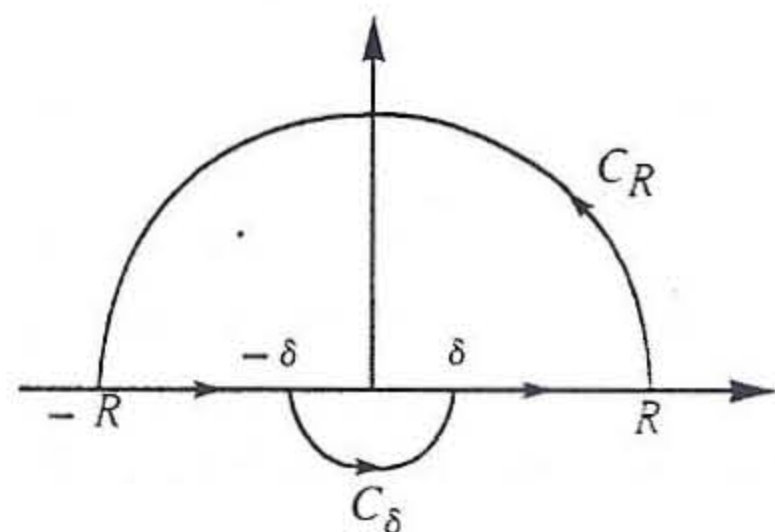


Fig. 5.4

Então, passando ao limite em (5.12) com $\delta \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$, e tendo também em conta que, pelo lema de Jordan, a integral sobre C_R tende a zero, obtemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz = \pi i.$$

Substituindo em (5.11), chegamos ao resultado final:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \pi.$$

EXERCÍCIOS

Calcule as integrais dadas nos Exercs. 1 a 4.

1. $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + 4} dx, \quad a > 0.$ 2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \text{sen } x}{x^2 + 4x + 20} dx.$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x(x^2 + a^2)} dx, \quad a > 0.$ 4. $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx.$

5. Seja $f(z)$ uma função regular no semiplano $\text{Re } z \geq 0$, tal que o máximo $G(R)$ de $|f(z)|$ sobre o arco $C_R: z = Re^{i\theta}, |\theta| \leq \pi/2$, tende a zero com $R \rightarrow \infty$. Mostre que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{rz} dz = 0, \quad r < 0.$$

6. Prove que $\int_{C_R} e^{-z^2} dz \rightarrow 0$ com $R \rightarrow \infty$, onde C_R é o arco $z = Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi/4$.

7. Calcule as chamadas *integrais de Fresnel*,

$$C = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx \quad \text{e} \quad S = \int_0^{\infty} \text{sen } x^2 dx.$$

mostrando que ambas são iguais a $\sqrt{2\pi}/4$.

RESPOSTAS E SUGESTÕES

1. $\pi e^{-2a}/4.$ 2. $\pi e^{-4}(2 \cos 2 + \text{sen } 2)/2.$

3. $\pi(1 - e^{-a^2})/a^2.$ 4. $\pi/4e.$

7. Lembre-se de que $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$. Use $x = e^{-i\pi/4}z$ e o exercício anterior para mostrar que $I_R = \int_0^R e^{-ix^2} dx = e^{-i\pi/4} \int_0^{Re^{i\pi/4}} e^{-z^2} dz = [(1-i)/\sqrt{2}] \int_0^R e^{-x^2} dx + \varepsilon_R$, onde $\varepsilon_R \rightarrow 0$ com $R \rightarrow \infty$.

INTEGRANDOS MULTIVALENTES

Vamos calcular a integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{k-1}}{x-1} dx, \quad 0 < k < 1.$$

onde consideramos a determinação real de x^{k-1} .

Seja $C = C_1 \cup C_R \cup C_2 \cup C_r$ o contorno fechado formado do segmento

$$C_1 = [r, R], \quad \arg z = 0,$$

do círculo C_R de centro na origem e raio R , do segmento

$$C_2 = [r, R], \quad \arg z = 2\pi$$

e do círculo C_r de centro na origem e raio r , onde $r < 1 < R$ (Fig. 5.5). Então, a única singularidade da função

$$f(z) = \frac{z^{k-1}}{z+1}$$

no interior de C é o ponto $z = -1$, que é pólo simples, no qual o resíduo de f é

$$(-1)^{k-1} = e^{(k-1)\log(-1)} = e^{(k-1)\pi i}.$$

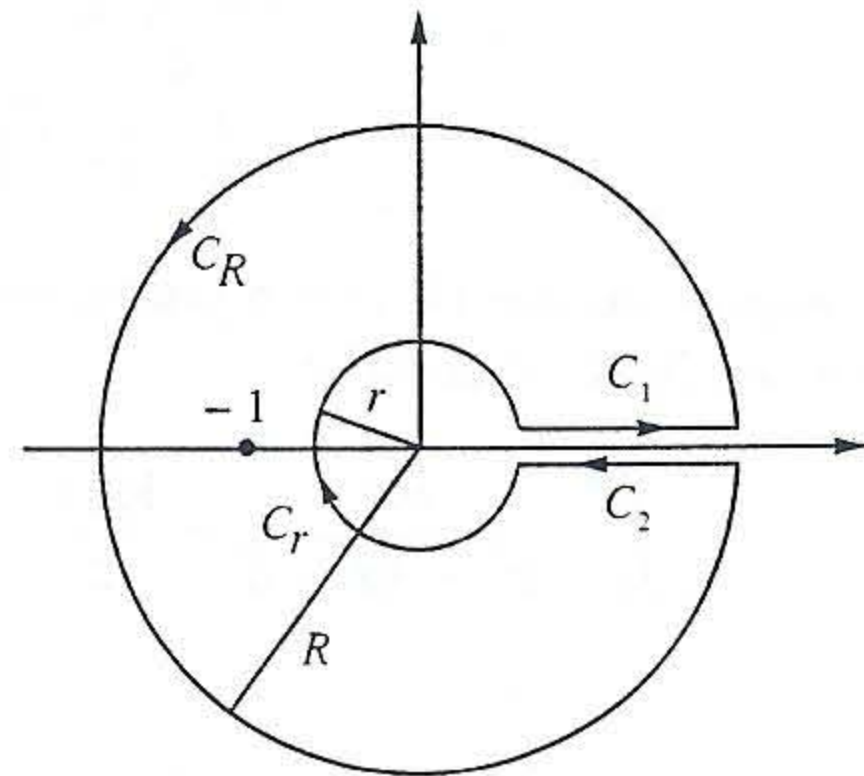


Fig. 5.5

Portanto,

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i e^{(k-1)\pi i}. \quad (5.13)$$

A integral de f ao longo de C_R tende a zero com $R \rightarrow \infty$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{z^{k-1}}{z+1} dz \right| &= \left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{(k-1)(\log R + i\theta)}}{Re^{i\theta} + 1} iRe^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq R \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{(k-1)\log R}}{Re^{i\theta} + 1} \right| d\theta \\ &\leq \frac{RR^{k-1}}{R-1} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi R^k}{R-1}. \end{aligned}$$

expressão esta que tende a zero com $R \rightarrow \infty$, pois $k < 1$.

De modo inteiramente análogo, verifica-se que a integral ao longo de C_r tende a zero com $r \rightarrow 0$. Então, fazendo $r \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$ em (5.13), obtemos:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{C_1} + \int_{C_2} \right) \frac{z^{k-1}}{z+1} dz = 2\pi i e^{(k-1)\pi i}. \quad (5.14)$$

O argumento de z é zero ao longo de C_1 e 2π ao longo de C_2 , de forma que

$$\begin{aligned} \left(\int_{C_1} + \int_{C_2} \right) \frac{z^{k-1}}{z+1} dz &= \int_r^R \frac{e^{(k-1)\log x}}{x+1} dx + \int_R^r \frac{e^{(k-1)(\log x + 2\pi i)}}{x+1} dx \\ &= [1 - e^{(k-1)2\pi i}] \int_r^R \frac{x^{k-1}}{x+1} dx. \end{aligned}$$

Substituindo esta expressão em (5.14) vem

$$[1 - e^{(k-1)2\pi i}] \int_0^\infty \frac{x^{k-1}}{x+1} dx = 2\pi i e^{(k-1)\pi i};$$

logo,

$$\int_0^\infty \frac{x^{k-1}}{x+1} dx = \frac{2\pi i}{e^{(1-k)\pi i} - e^{-(1-k)\pi i}};$$

ou ainda, em forma mais familiar,

$$\int_0^\infty \frac{x^{k-1}}{x+1} dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen}[(1-k)\pi]}.$$

O método que acabamos de utilizar é aplicável a toda integral do tipo

$$\int_0^\infty x^{k-1} R(x) dx,$$

onde k não é inteiro. $R(z)$ é uma função racional sem pólos no intervalo $(0, -\infty)$ e $x^k R(x) \rightarrow 0$ com $x \rightarrow 0$ e $x \rightarrow \infty$. Nestas condições, a integral acima converge e as integrais de $z^{k-1} R(z)$ ao longo de C_r e C_R tendem a zero com $r \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$, respectivamente (o leitor deve verificar isso em detalhe). Em consequência, procedendo como no caso particular acima, obtemos:

$$\int_0^\infty x^{k-1} R(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{(k-1)2\pi i}} \sum_j z_j^{k-1} (\operatorname{res.} R)(z_j). \quad (5.15)$$

onde z_j são os pólos não-nulos de $R(z)$.

O método acima falha se k for inteiro, pois então o denominador em (5.15) se anula. Neste caso, o integrando $x^{k-1} R(x)$ é uma função racional: se ela for par, a integral desejada é metade da integral de $-\infty$ a $+\infty$ do mesmo integrando, e já sabemos como calculá-la.

No caso em que o integrando não é par, a situação pode ser contornada. Seja, por exemplo, calcular a integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}.$$

Começamos integrando a função

$$g(z) = \frac{\log z}{z^2 + 4z + 3} = \frac{\log z}{(z+1)(z+3)}$$

ao longo do mesmo contorno $C = C_1 \cup C_R \cup C_2 \cup C_r$ da Fig. 5.5. As singularidades de g no interior de C são os pólos simples $z = -1$ e $z = -3$, onde os resíduos de g são, respectivamente,

$$\frac{\log(-1)}{2} = \frac{\pi i}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\log(-3)}{-2} = -\frac{\log 3 + \pi i}{2}.$$

Então,

$$\int_C \frac{\log z}{z^2 + 4z + 3} dz = -2\pi i \frac{\log 3}{2}. \quad (5.16)$$

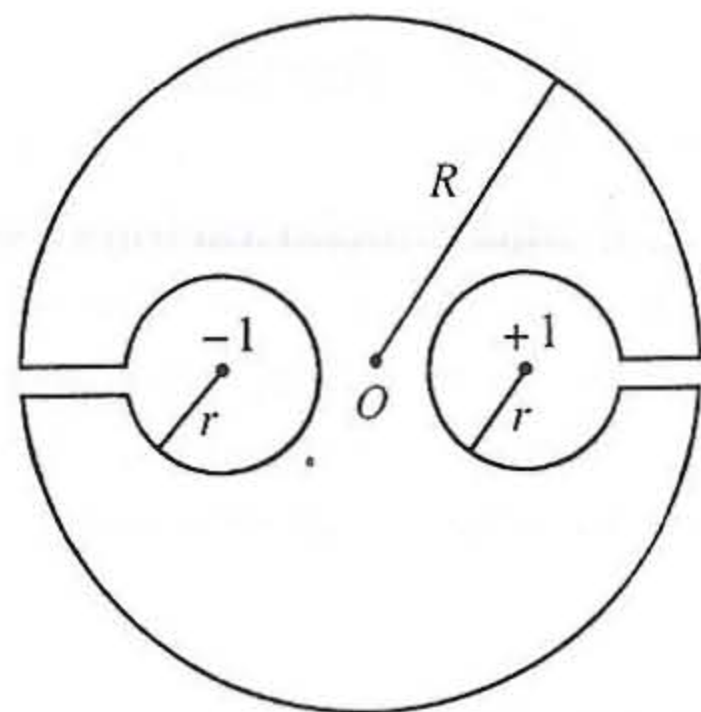


Fig. 5.6

Como no exemplo anterior, as integrais ao longo de C_r e C_R tendem a zero com $r \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$, respectivamente. De fato, $z = re^{i\theta}$ sobre C_r , e tomando $r < 1/4$, obtemos:

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_r} \frac{\log z}{z^2 + 4z + 3} dz \right| &\leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{\log r + i\theta}{z^2 + 4z + 3} ire^{i\theta} \right| d\theta \\ &\leq \frac{r(2\pi - \log r)}{3 - 4r - r^2} \int_0^{2\pi} d\theta \leq 2\pi r(|\log r| + 2\pi) \rightarrow 0 \quad \text{com } r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

De modo análogo, prova-se que a integral sobre C_R tende a zero com $R \rightarrow \infty$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left(\int_{C_1} + \int_{C_2} \right) \frac{\log z}{z^2 + 4z + 3} dz &= \int_r^R \left(\frac{\log x}{x^2 + 4x + 3} - \frac{\log x + 2\pi i}{x^2 + 4x + 3} \right) dx \\ &= -2\pi i \int_r^R \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}. \end{aligned}$$

Substituindo esta expressão em (5.16), e passando ao limite com $r \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$, obtemos o resultado desejado:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 4x + 3} = \frac{\log 3}{2}.$$

EXERCÍCIOS

1. Calcule as seguintes integrais:

$$\int_0^\infty \frac{x\sqrt{x}}{x^3 + 1} \quad \text{e} \quad \int_0^\infty \frac{x^2 - x + 3}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

2. Mostre que, sendo $\text{Im } \alpha \neq 0$,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x(x - \alpha)} = \frac{\pi i \text{Im } \alpha}{\alpha |\text{Im } \alpha|}.$$

Sugestão: Integre ao longo do contorno usado no cálculo da integral de $\text{sen } x/x$ (p. 106).

3. Mostre que

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\pi}{2}.$$

onde tomamos o valor positivo da raiz quadrada. Sugestão: Use o contorno da Fig. 5.6, faça $r \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$.

INTEGRAIS ENVOLVENDO FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Um outro tipo de integrais que podem ser calculadas por resíduos são integrais da forma

$$\int_0^{2\pi} f(\text{sen } \theta, \text{cos } \theta) d\theta.$$

Usando a transformação $z = e^{i\theta}$, obtemos:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \operatorname{cos} \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta;$$

logo, a integral acima assume a forma:

$$\int_{|z|=1} f\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{iz}.$$

Como exemplo, seja calcular $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos \theta - 2}$. Temos:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos \theta - 2} &= \int_{|z|=1} \frac{1}{(z + z^{-1})/2 - 2} \cdot \frac{dz}{iz} \\ &= \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 4z + 1} \\ &= \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{(z - 2 - \sqrt{3})(z - 2 + \sqrt{3})} \\ &= \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{-2\sqrt{3}}; \end{aligned}$$

portanto,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos \theta - 2} = \frac{-2\pi}{\sqrt{3}}.$$

EXERCÍCIOS

Calcule as integrais dadas a seguir: nas de números 2 e 3, tome $|a| < 1$, e na de número 4, tome $a > b > 0$.

1. $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \operatorname{sen}^2 \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{6}}$
2. $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \operatorname{cos} \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$
3. $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \operatorname{sen} \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$
4. $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \operatorname{cos} \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

RESÍDUOS LOGARÍTMICOS E PRINCÍPIO DO ARGUMENTO

Entende-se por *resíduo logarítmico* de uma função f num certo ponto a : resíduo de f'/f nesse ponto, isto é, ao resíduo da derivada logarítmica de f . É claro que para isso estamos supondo que f seja regular no referido ponto.

Vamos supor que f tenha um zero de ordem r num ponto z_0 , de sorte que

$$f(z) = (z - z_0)^r g(z),$$

onde g é regular e diferente de zero em z_0 . Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{r(z - z_0)^{r-1} g(z) + (z - z_0)^r g'(z)}{(z - z_0)^r g(z)} \\ &= \frac{r}{z - z_0} + h(z), \end{aligned}$$

onde $h = g'/g$ é regular no ponto z_0 . Vemos assim que o *resíduo logarítmico de uma função f num ponto que seja zero de ordem r da função é igual a ordem r desse zero*.

O raciocínio anterior pode ser repetido no caso em que z_0 seja pólo de ordem s , bastando substituir r por s (Exerc. 1 adiante), o que permite afirmar que *o resíduo logarítmico de uma função f num ponto que seja pólo de ordem s da função é igual a $-s$* .

Juntando esses dois resultados, demonstra-se facilmente o teorema que enunciamos a seguir.

5.12. Teorema. *Seja f uma função que, à exceção de pólos, é analítica numa região simplesmente conexa R . Seja $C \subset R$ um contorno fechado simples, orientado positivamente, e cujo interior contenha um número finito de zeros e pólos de f . Então,*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P,$$

onde Z e P denotam, respectivamente, os números de zeros e pólos de f no interior de C , contadas as multiplicidades.

A demonstração desse teorema é simples e fica a cargo do leitor. Basta substituir o contorno C por contornos envolvendo cada zero e cada pólo isoladamente (Exerc. 2 adiante).

Observe que $f'(z)/f(z) = (\log f(z))'$, onde tomamos qualquer ramo do logaritmo. (Lembramos que diferentes ramos têm a mesma derivada, já que eles diferem entre si por valores constantes.) Em vista disso, podemos escrever:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} [\log f(z)]_C.$$

ou seja, a integral é igual à variação de $\log f(z)$ ao longo do contorno C . Acontece que essa variação só afeta a parte imaginária do logaritmo, pois a parte real $\log |f(z)|$ volta ao valor inicial uma vez completado o percurso C . Em consequência, denotando com $\Delta_C \arg f(z)$ a variação sofrida pelo argumento de $f(z)$ ao longo do contorno C , obtemos o chamado *princípio do argumento*:

$$Z - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z).$$

O princípio do argumento tem uma interessante interpretação geométrica. Suponhamos que C só contenha em seu interior um zero z_0 de ordem r e nenhum pólo. Então, quando z percorre o contorno C no sentido positivo, o ponto $w = f(z)$ percorrerá um contorno C' envolvendo r vezes a origem no plano w (Fig. 5.7). E se z_0 for um pólo de ordem s em vez de zero, $w = f(z)$ percorrerá o contorno C' envolvendo r vezes a origem do plano w no sentido negativo.

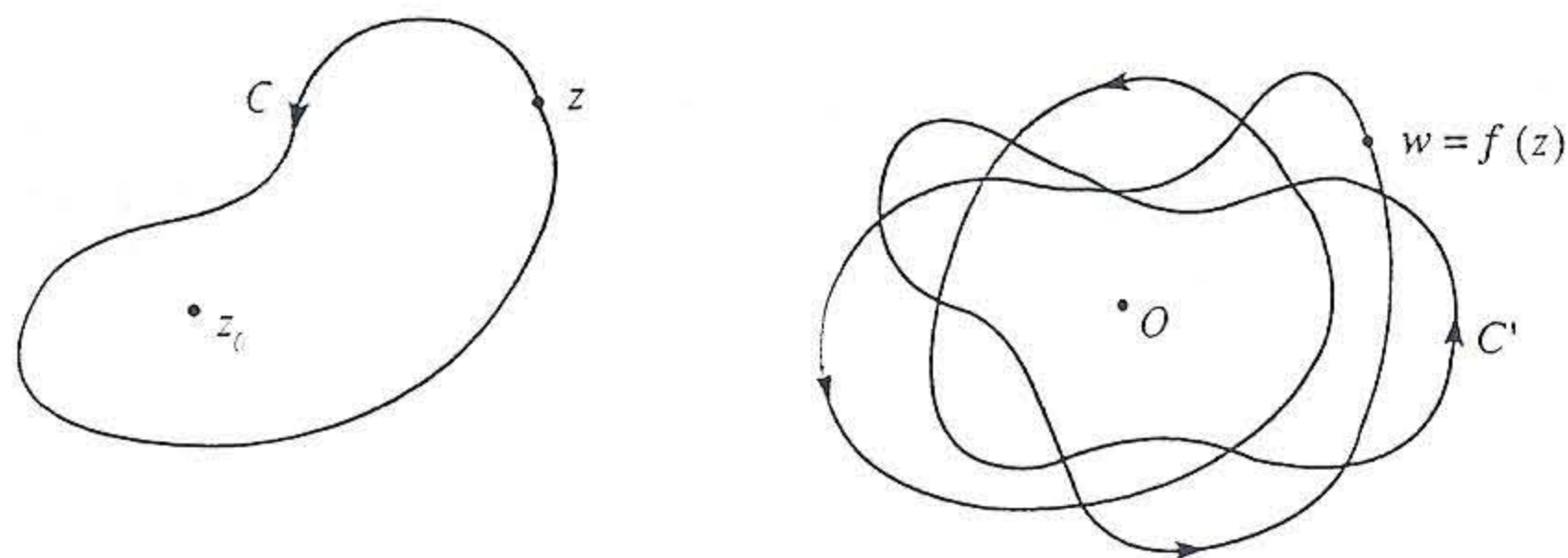


Fig. 5.7

O teorema seguinte é uma aplicação interessante do princípio do argu-

mento.

5.13. Teorema (de Rouché.) *Sejam f e g funções analíticas numa região simplesmente conexa R . Seja $C \subset R$ um contorno fechado simples, orientado positivamente e tal que $|f(z)| > |g(z)|$ nos pontos de C . Então $f(z)$ e $f(z) + g(z)$ têm o mesmo número de zeros no interior de C .*

Demonstração. Por causa da hipótese $|f(z)| > |g(z)|$, $f(z)$ não se anula sobre C . Em consequência, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \Delta_C \arg[f(z) + g(z)] &= \Delta_C \arg \left[f(z) \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) \right] \\ &= \Delta_C \arg f(z) + \Delta_C \arg \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right). \end{aligned}$$

Observe agora que o ponto $w = 1 + f(z)/g(z)$ não pode circundar a origem no plano w , pois $|w - 1| = |f(z)/g(z)| < 1$. Portanto,

$$\Delta_C \arg \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) = 0.$$

donde segue-se que,

$$\Delta_C \arg[f(z) + g(z)] = \Delta_C \arg f(z).$$

Daqui e do princípio do argumento segue o resultado desejado.

O teorema de Rouché permite fazer uma demonstração muito elegante do Teorema Fundamental da Álgebra, do qual consideramos uma versão na p. 107.

5.14. Teorema Fundamental da Álgebra. *Todo polinômio de grau $n > 0$ tem exatamente n raízes, contadas as multiplicidades.*

Demonstração. Seja

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

um polinômio qualquer de grau $n > 0$, de sorte que $a_n \neq 0$. Pondo

$$f(z) = a_n z^n, \quad g(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

e $|z| = R$, teremos:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| \geq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{|a_n|R^n}{|a_{n-1}|R^{n-1} + \dots + |a_1|R + |a_0|} = \infty,$$

donde se vê que existe R tal que $|f(z)| > |g(z)|$ para $|z| = R$. Daqui e do teorema de Rouché concluímos que $f(z)$ e $f(z) + g(z) = P(z)$ têm o mesmo número de zeros, isto é, exatamente n , que é o número de zeros de $f(z)$, como queríamos demonstrar.

EXERCÍCIOS

1. Prove que o resíduo logarítmico de uma função f num ponto que seja pólo de ordem r da função é igual à ordem s desse pólo.
2. Demonstre o Teorema 5.12.

Capítulo 6

CONTINUAÇÃO ANALÍTICA

Sabemos que a série

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

tem raio de convergência 1, e, portanto, define uma função analítica no disco $|z| < 1$. Sabemos também que essa série tem por soma a função $g(z) = 1/(1-z)$, a qual, por sua vez, está definida em todo o plano complexo, exceto em $z = 1$. Então, a função g é uma extensão da função f ; mais do que isso, é uma “extensão analítica”. Isto é importante, pois, embora uma função possa ter muitas extensões diferentes, essa extensão é única quando preserva a analiticidade, como nos garante o teorema seguinte.

6.1. Teorema (de unicidade da extensão analítica). *Sejam f e g funções analíticas numa mesma região R , que coincidem numa vizinhança de um ponto $z_0 \in R$, ou apenas num conjunto de pontos tendo ponto de acumulação $z_0 \in R$. Então f e g são idênticas, isto é, coincidem em toda a região R .*

Para a demonstração deste teorema, necessitamos do seguinte lema de topologia métrica.

6.2. Lema. *A distância entre dois conjuntos fechados e disjuntos, um dos quais limitado, é positiva.*

Demonstração. Sejam X e Y conjuntos fechados e disjuntos, sendo X limitado. A distância entre eles, $d(X, Y)$, é definida como sendo o ínfimo das distâncias $d(x, y) = |x - y|$, x variando em X e y variando em Y . É claro que $d(X, Y) \geq 0$. Vamos provar que $d(X, Y) > 0$. Se fosse $d(X, Y) = 0$,

haveria duas seqüências, $x_n \in X$ e $y_n \in Y$, tais que $|x_n - y_n| \rightarrow 0$. Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, x_n possuiria uma subseqüência convergindo para um ponto $x_0 \in X$, a qual continuamos a indicar com a mesma notação x_n . Em correspondência a x_n , haveria também uma subseqüência de y_n (que continuamos a denotar por y_n), a qual, por ser equivalente a x_n , seria convergente para um certo y_0 , que pertenceria a Y , já que Y é fechado. Em conseqüência, $|x_0 - y_0| = 0$, donde $x_0 = y_0$. Mas isto contradiz a hipótese de que X e Y são disjuntos e completa a demonstração.

Demonstração do teorema. Seja z um ponto qualquer da região R . Vamos provar que f e g coincidem em z . Pela hipótese, f e g possuem a mesma série de Taylor numa vizinhança de z_0 (veja o Teorema 4.15 na p. 136). Se z pertence a essa vizinhança, o teorema está demonstrado.

Se z estiver fora da referida vizinhança, conectamos z_0 a z por meio de um arco C todo contido em R e denotamos com δ a distância de C à fronteira de R . Como essa fronteira e C são conjuntos fechados, e C é limitado, $\delta > 0$. Tomamos, sobre C , a partir de z_0 , os pontos $z_1, z_2, \dots, z_n = z$, tais que $|z_0 - z_1| < \delta, |z_1 - z_2| < \delta, \dots, |z_{n-1} - z_n| < \delta$. Então, $z_j \in V_\delta(z_{j-1})$, $j = 1, \dots, n$ (Fig. 6.1). Como f e g coincidem em $V_\delta(z_0)$, e $z_1 \in V_\delta(z_0)$, as séries de Taylor de f e g coincidem em $V_\delta(z_1)$. Como $z_2 \in V_\delta(z_1)$, as séries de Taylor de f e g coincidem em $V_\delta(z_2)$; e assim por diante, até concluirmos que as séries de Taylor de f e g coincidem em $V_\delta(z_n)$, portanto f e g coincidem em $z_n = z$, como queríamos provar.

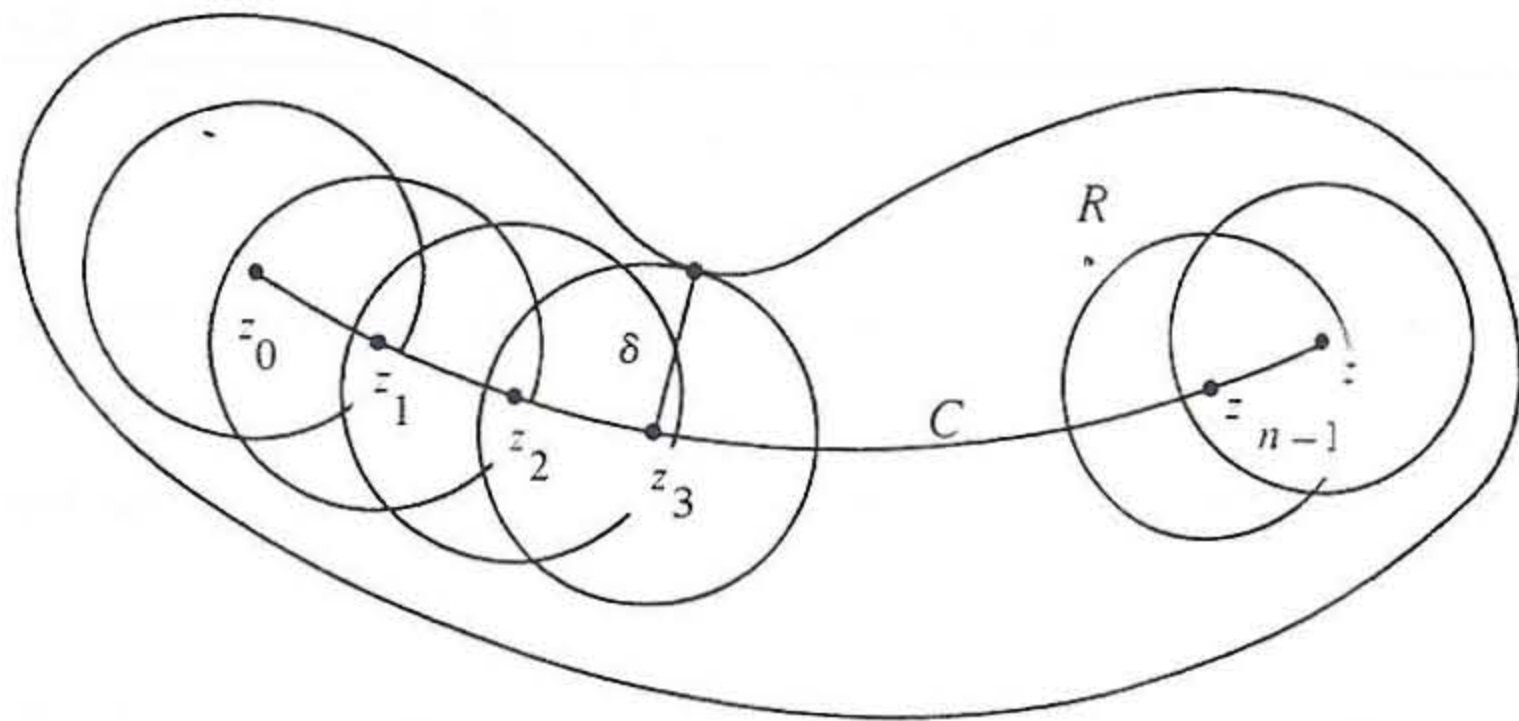


Fig. 6.1

O teorema de unicidade que acabamos de demonstrar leva naturalmente

à definição de “continuação analítica” que damos a seguir.

6.3. Definição. *Sejam R uma região e E um subconjunto de R com um ponto de acumulação em R . Seja f uma função definida em E , possuindo uma extensão analítica g na região R . Diz-se, então, que g é continuação analítica de f em R ; ou ainda, prolongamento analítico.*

O requisito de que E tenha um ponto de acumulação em R é feito justamente para garantir a unicidade da extensão g , de acordo com o Teorema 6.1. Com efeito, pode acontecer que duas funções analíticas distintas coincidam numa infinidade de pontos que se acumulam num ponto $z_0 \notin R$. (Veja o Exerc. 1 adiante.)

Primeiras conseqüências.

Permanência das relações funcionais

O teorema de unicidade garante que se uma função já é analítica numa região, e tem continuação analítica numa região maior, então essa continuação analítica é única; e garante também que uma função analítica numa certa região R fica completamente determinada pelo conhecimento da função apenas numa vizinhança de um ponto de R , num pequeno arco ou mesmo apenas num conjunto de pontos que tenha ponto de acumulação pertencente a R .

Consideremos concretamente o caso da função exponencial, inicialmente definida no eixo real. No Capítulo 2 estendemos essa função a todo o plano complexo, utilizando a fórmula

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y);$$

e dessa maneira obtivemos uma função analítica. Poderíamos ter utilizado outros meios; por exemplo, a série de potências

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

também define uma função analítica em todo o plano, extensão da exponencial real. Em vista do teorema de unicidade, as duas extensões aqui

consideradas são idênticas. Essa mesma observação é válida para todas as funções reais que estendemos ao plano complexo, como o logaritmo e as funções trigonométricas.

O teorema de unicidade permite estender ao plano complexo, ou a regiões do plano complexo, várias identidades que já tenham sido estabelecidas no eixo real, ou em subconjuntos do eixo real. Tomemos um exemplo simples, a identidade

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

que é válida para x real. Podemos afirmar que, para todo z complexo,

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

Com efeito, $F(z) = \cos^2 z + \sin^2 z$ é continuação analítica a todo o plano complexo da função real $f(x) = \cos^2 x + \sin^2 x$. Mas acontece que $f(x)$ é constantemente igual a 1; portanto, sua continuação analítica também tem de ser a constante 1.

O mesmo raciocínio aqui utilizado permite demonstrar a permanência de certas relações funcionais. O mais simples é o caso polinomial. Assim, suponhamos que as funções reais f_1, \dots, f_n estejam definidas num intervalo do eixo real, aí satisfazendo uma identidade do tipo

$$P(f_1(x), \dots, f_n(x)) = 0.$$

onde P é um polinômio em n variáveis. Supondo ainda que essas funções tenham continuações analíticas a uma mesma região R do plano complexo, podemos afirmar que

$$P(f_1(z), \dots, f_n(z)) = 0$$

nessa região.

É exatamente esse o caso exemplificado anteriormente, da identidade trigonométrica $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, onde $f_1(z) = \cos z$, $f_2(z) = \sin z$ e $P(f_1, f_2) = f_1^2 + f_2^2 - 1$.

O mesmo raciocínio pode ser aplicado a situações mais gerais que polinômios. A título de ilustração, vamos provar que

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2.$$

Para isso, lembramos que essa identidade é verdadeira quando z_1 e z_2 são números reais, isto é, sabemos que, sendo x e b números reais quaisquer,

então

$$\sin(x + b) = \sin x \cos b + \cos x \sin b.$$

Por continuação analítica,

$$\sin(z + b) = \sin z \cos b + \cos z \sin b$$

quaisquer que sejam b real e z complexo. Com efeito, o primeiro membro desta última igualdade é continuação analítica do primeiro membro da identidade anterior, o mesmo acontecendo com os segundos membros. Em seguida faz-se $z = z_1$, $b = x$, e nova continuação analítica leva x a z_2 , completando a demonstração.

Esse mesmo raciocínio pode ser aplicado a todas as identidades estabelecidas no Capítulo 2, pp. 64 e seguintes.

Continuação analítica por reflexão

As funções que assumem valores reais para valores reais da variável independente, como

$$z^2 - 3z, \quad \cos z, \quad e^z \quad \text{etc.}$$

são tais que seus valores se refletem no eixo real quando z é assim refletido, isto é: $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$. Isto já não é verdade no caso de funções que não são reais para valores reais de z , como

$$z^2 - 3iz, \quad i \cos z, \quad e^{iz} \quad \text{etc.}$$

Essa propriedade é a versão mais simples do chamado *princípio de reflexão*, que vamos considerar agora.

6.4. Teorema (princípio de reflexão). *Seja f uma função analítica numa região R que intersecta o eixo real e tal que $z \in R \Leftrightarrow \bar{z} \in R$. Suponhamos ainda que $f(z)$ seja real para z real. Então $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$ para todo $z \in R$.*

Demonstração. Seja x_0 um ponto qualquer de R que seja real. Então,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - x_0)^n,$$

para todo z numa vizinhança conveniente de x_0 , digamos, $V_\delta(x_0)$. Os coeficientes a_n são todos reais, pois

$$a_0 = f(x_0), a_1 = f'(x_0), a_2 = \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}, \dots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \dots$$

e todas as derivadas $f^{(n)}(x_0)$ que aí aparecem podem ser calculadas considerando z real. Em consequência, $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$, ou seja, a função

$$F(z) = f(z) - \overline{f(\bar{z})}$$

que é analítica em R (veja o Exerc. 9 adiante), se anula em $V_\delta(x_0)$: portanto, se anula identicamente em R por continuação analítica. Isto completa a demonstração do teorema.

O teorema anterior permite continuar analiticamente uma função f , dada inicialmente numa região R contida no semiplano superior $\text{Im } z > 0$ ou no semiplano inferior $\text{Im } z < 0$, desde que \bar{R} contenha um conjunto I do eixo real, que seja aberto como subconjunto da reta, e f seja contínua e real em $R \cup I$. Para isso, sendo R^* o refletido de R no eixo real, basta definir f para $z \in R^*$ mediante $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$ (observe que $\bar{z} \in R$) para que f se estenda analiticamente a R^* .

O procedimento que acabamos de descrever é conhecido como o *princípio de reflexão de Riemann-Schwarz*. Para demonstrar sua validade, vamos supor que R esteja contido no semiplano superior $\text{Im } z > 0$. (O raciocínio é inteiramente análogo caso R esteja no semiplano inferior $\text{Im } z < 0$.) Seja C um disco (aberto) centrado em algum ponto de I , e tal que, juntamente com sua fronteira Γ , esteja todo contido em $R \cup R^* \cup I$. Pelo Teorema 3.17 (p. 105), a função

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

é analítica no interior de C . Vamos mostrar que ela coincide com $f(z)$ nesse disco. Isto implicará o resultado desejado, como se vê facilmente.

Sejam γ a interseção de C com I (Fig. 6.2a). Γ^+ a parte de Γ no semiplano superior e Γ^- a parte de Γ no semiplano inferior. Então, para $z \notin I$, podemos escrever:

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+ \cup \gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^- \cup (-\gamma)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

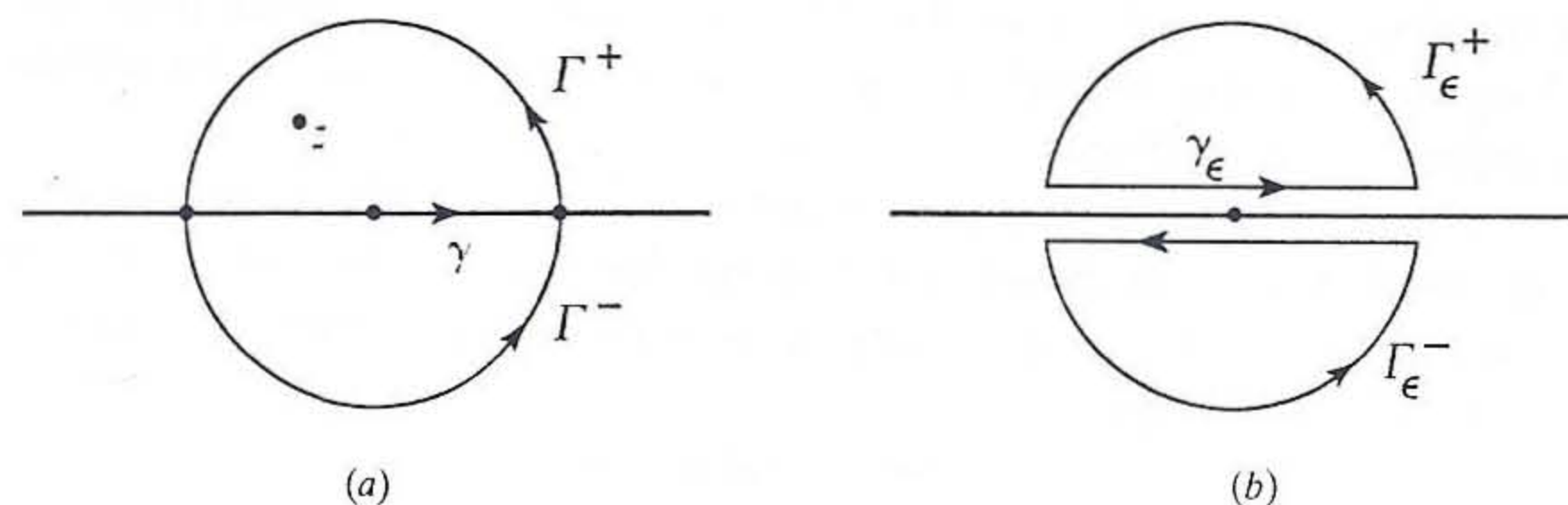


Fig. 6.2

Notamos, em seguida, pela fórmula integral de Cauchy, que, se z estiver no semiplano superior, a primeira integral será igual a $f(z)$ (veja também o parágrafo seguinte), enquanto a segunda será nula; e se z estiver no semiplano inferior, a primeira integral será nula, enquanto a segunda será igual a $f(z)$. E, por continuidade, $g(z)$ coincide com $f(z)$ também em I .

Na verdade, estamos usando a fórmula integral de Cauchy nas integrações em $\Gamma^+ \cup \gamma$ e em $\Gamma^- \cup (-\gamma)$, o que, a rigor, exigiria saber, de antemão, que f é analítica em γ . Mas isto pode ser facilmente contornado, assim: seja Γ_ϵ a parte de Γ no semiplano $\text{Im } z \geq \epsilon$, onde $\epsilon > 0$ é tomado suficientemente pequeno. Em seguida fechamos o contorno Γ_ϵ com o segmento horizontal $\gamma_\epsilon = \gamma + i\epsilon$ (Fig. 6.2b). No contorno $\Gamma_\epsilon \cup \gamma_\epsilon$ podemos aplicar a fórmula integral de Cauchy, após o que passamos ao limite com $\epsilon \rightarrow 0$; isto é possível pela continuidade do integrando num conjunto compacto. O mesmo raciocínio pode ser feito na integração sobre $\Gamma \cup (-\gamma)$.

EXERCÍCIOS

1. Construa um exemplo com duas funções analíticas distintas, f e g , definidas na mesma região R , e coincidindo numa seqüência infinita de pontos distintos z_n que converge para um ponto fora de R .
2. Mostre que uma função analítica numa região R não pode assumir o mesmo valor num conjunto de pontos com ponto de acumulação em R , sob pena de ser constante.
3. Seja f uma função analítica e não-constante numa região R , e seja F um subconjunto fechado e limitado de R . Prove que só pode haver um número finito de pontos de F onde f assume o mesmo valor. Prove, em particular, que se f é uma função não-constante e regular num ponto z_0 , então existe $\delta > 0$ tal que $f(z) \neq f(z_0)$ para todo

$z \in V'_\epsilon(z_0)$. (Observe que esta propriedade segue também do Corolário 3.23 da p. 114.)

- Dê exemplo de uma função analítica e não-constante numa região R , que assume um mesmo valor uma infinidade de vezes em um subconjunto fechado de R .
- Use continuação analítica para provar que, para todo z complexo.

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2;$$

$$\operatorname{sen} z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) \quad \text{e} \quad \cos z = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right);$$

$$\operatorname{senh}(z_1 + z_2) = \operatorname{senh} z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \operatorname{senh} z_2;$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \operatorname{senh} z_1 \operatorname{senh} z_2.$$

- A série $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^{3n}$ define uma função analítica no disco $|z| < 1$. Obtenha sua continuação analítica a todo o plano e mostre que ela é regular e nula no infinito, que ela possui apenas três singularidades do tipo pólo, e localize esses pólos.
- Faça o mesmo para $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{5n}$.
- Determine a continuação analítica a todo o plano da função

$$f(x) = \int_0^{\infty} t e^{-tx} dt, \quad x > 0.$$

Mostre que ela é regular no infinito e localize sua única singularidade.

- Com a mesma notação usada na demonstração do Teorema 6.4, prove que a função $F(z) = \overline{f(\bar{z})}$ é analítica em R .
- Prove a recíproca do Teorema 6.4, isto é, que, se $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$ para todo $z \in R$, então $f(z)$ é real para z real em R .
- Considere a função $w = \sqrt{z} = r e^{i\theta/2}$, com as restrições $r > 0$ e $0 < \theta < \pi$. Explique como continuá-la analiticamente ao 4º quadrante através do semi-eixo positivo Ox ; e ao 3º quadrante através do semi-eixo negativo Ox .
- Repita o exercício anterior com a função $w = \log z$ $0 < \arg z < \pi$.

RESPOSTAS E SUGESTÕES

- $f(z) = \operatorname{sen}(1/z)$ e $g(z)$ identicamente nula coincidem numa seqüência infinita de pontos tendendo a zero. Isso é possível porque zero não pertence ao domínio de analiticidade da primeira função.

- Escreva $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, donde

$$\overline{f(z)} = u(x, -y) - iv(x, -y) = U(x, y) + iV(x, y),$$

e use as equações de Cauchy-Riemann.

CONTINUAÇÃO ANALÍTICA E SINGULARIDADES

Quando temos uma função analítica f numa região R , dizemos que o par (f, R) constitui um *elemento funcional* ou *germe de função analítica*. Isso porque é concebível que se possa estender f analiticamente a uma região maior, englobando R ; e, de acordo com o teorema da unicidade da continuação analítica, o elemento funcional (f, R) determinará completamente essa continuação analítica, constituindo-se, pois, num "germe" da função analítica estendida. Aliás, basta a série de Taylor de f relativa a um ponto z_0 de R para que a continuação analítica de f fique completamente determinada.

Começemos com um exemplo concreto, retomando as funções consideradas no início do capítulo.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{e} \quad g(z) = \frac{1}{1-z}. \quad (6.1)$$

A primeira, embora definida apenas no disco $|z| < 1$, soma facilmente identificável, que é a função $g(z)$. Em conseqüência, g é a continuação analítica de f a todo o plano, excetuado o ponto $z = 1$, que é pólo simples.

Mas em geral não é assim, pois a função pode ser dada inicialmente por uma série cuja soma não seja conhecida, por uma integral ou outro recurso qualquer; e o problema que se apresenta é o de saber se ela tem continuação analítica e como obter essa continuação. Por exemplo, não sabemos como obter a soma da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{3^n + 1} z^n$$

em forma simples, como em (6.1), ou, como se diz, em "forma fechada". Mas sabemos que seu raio de convergência é 3, de forma que ela define uma função analítica no disco $|z| < 3$. Como, então, continuá-la analiticamente? Se é que ela tem continuação analítica.

Para descrever um procedimento de caráter geral, é conveniente primeiro introduzir a noção de continuação analítica de elementos funcionais.

6.5. Definição. *Sejam (f_1, R_1) e (f_2, R_2) dois elementos funcionais tais que $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$ e $f_1(z) = f_2(z)$ para $z \in R_1 \cap R_2$. Diz-se então que cada um dos elementos funcionais (f_1, R_1) e (f_2, R_2) é a continuação analítica direta do outro.*

Quando (f_1, R_1) e (f_2, R_2) são a continuação analítica direta um do outro, a função f , definida por

$$f(z) = f_1(z) \text{ em } R_1 \text{ e } f(z) = f_2(z) \text{ em } R_2,$$

é a continuação analítica, tanto de f_1 como de f_2 , à região $R_1 \cup R_2$.

Em geral, os elementos funcionais de que falamos aqui são séries de potências associadas a seus discos de convergência. Assim, para continuar analiticamente uma função f , consideremos um certo caminho L , que se origine num ponto da região R , onde f é dada inicialmente. Observe que (f, R) é o elemento funcional de onde partimos. Desenvolvemos f em série de potências f_1 relativamente a outro ponto $z_1 \in L$, que esteja também em R , na expectativa de que o disco de convergência R_1 desta série tenha uma parte fora de R . (f_1, R_1) é um novo elemento funcional, a partir do qual construímos outro elemento (f_2, R_2) , centrado num ponto $z_2 \in R_1 \cap L$; e assim por diante. Dizemos que estamos continuando analiticamente a função f ao longo do caminho L , ou que se trata de uma *continuação analítica ao longo do caminho L* . Vejamos um exemplo concreto.

6.6. Exemplo. Retomemos a função f dada pela série em (6.1). Seja z_1 um ponto qualquer de seu disco de convergência $|z| < 1$, denotado por R , e seja f_1 a função dada pela série de Taylor de f relativa ao ponto z_1 :

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_1^{(n)}(z_1)}{n!} (z - z_1)^n, \text{ onde } f_1^{(n)}(z_1) = \frac{n!}{(1 - z_1)^{n+1}}.$$

O raio de convergência desta série, como se calcula prontamente, é $|1 - z_1|$. Seja R_1 o disco de convergência $|z - z_1| < |1 - z_1|$. Assim, os elementos funcionais (f, R) e (f_1, R_1) são continuação analítica direta um do outro.

Caso $0 \leq z_1 < 1$, $|1 - z_1| = 1 - z_1$ e $R_1 \subset R$ (Fig. 6.3a); neste caso, f_1 é uma restrição de f e em nada ajuda para continuar f analiticamente. Mas, em qualquer outra situação (Fig. 6.3b), $|1 - z_1| > 1 - |z_1|$, e o disco de convergência R_1 conterà pontos fora de R ; portanto, neste caso, f_1 efetua uma continuação analítica de f fora do disco original R . Observe que, em ambos os casos, a fronteira de R_1 passa pelo ponto $z = 1$, que é, como já sabemos, um pólo simples da continuação analítica de f a todo o plano.

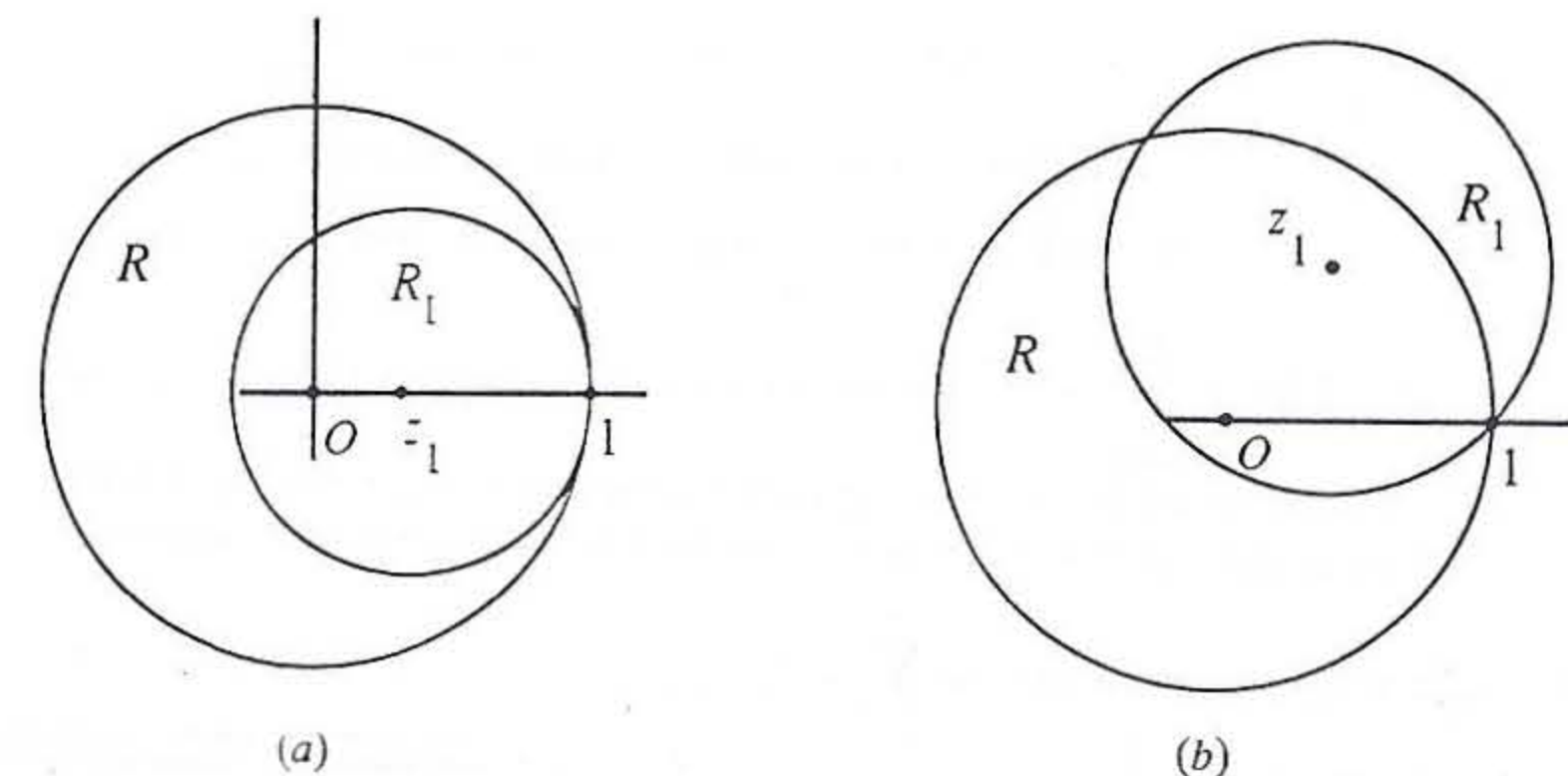


Fig. 6.3

Singularidades

Consideremos uma função f , definida por uma série de potências relativa a um ponto z_0 , centro de seu disco de convergência R . Sejam r o raio desse disco (que supomos finito e não-nulo), ζ um ponto da fronteira de R e z_1 um ponto qualquer do segmento aberto $z_0\zeta$ (Fig. 6.4). Consideremos a série de Taylor da função f relativa ao centro z_1 . Com isso estamos procurando continuar f analiticamente ao longo do raio $z_0\zeta$.

Esta última série terá raio de convergência pelo menos igual à distância $|\zeta - z_1|$ de z_1 a ζ (Fig. 6.4a). Mas o raio pode superar esse valor, caso em que a série realmente continua f analiticamente além de seu domínio original de definição (Fig. 6.4b).

Se o raio da série for exatamente $|\zeta - z_1|$, como ilustra a Fig. 6.4a, então a série não nos proporcionará continuação alguma. Neste caso, dizemos que ζ é uma *singularidade* da função f . Um caso como este ocorreu no Exem-

plo 6.6, onde a função considerada não tinha continuação analítica ao longo do raio que vai da origem ao ponto 1. Este ponto era uma singularidade da função, fato este já sabido anteriormente pelo conhecimento da soma da série.

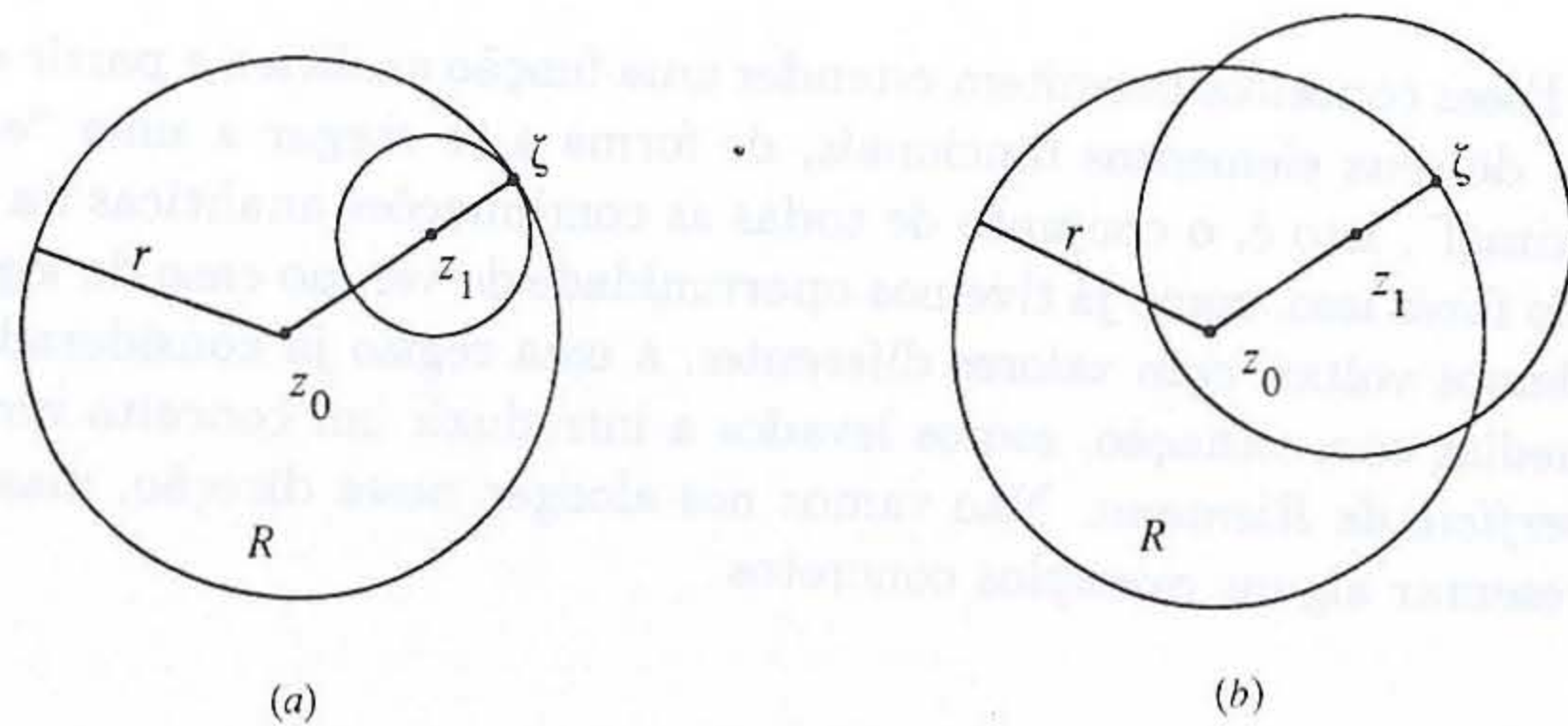


Fig. 6.4

Um fenômeno interessante é que toda função definida por uma série de potências de raio finito tem pelo menos uma singularidade na fronteira de seu disco de convergência. É o que veremos a seguir.

6.7. Teorema. *Seja f uma função definida por uma série de potências relativa a um ponto z_0 , centro de seu disco de convergência C , de raio R , que supomos finito e não-nulo. Então f tem pelo menos uma singularidade na fronteira F de C .*

Demonstração. Suponhamos que f possa ser continuada analiticamente ao longo de qualquer raio $z_0\zeta$, ζ variando na fronteira F de C . Então f pode ser desenvolvida em séries de Taylor em discos C_ζ (abertos) centrados em ζ . Assim, f prolonga-se analiticamente, de forma que seu domínio original C fica aumentado da união U de todos esses discos C_ζ . (Observe que os valores das diferentes continuações de f nos discos C_ζ coincidem nas interseções desses discos.) Seja G a fronteira de U . Ora, F e G são disjuntos, pois $F \subset U$ e U é aberto, de sorte que $U \cap G = \emptyset$. Então, a distância δ de F a U é positiva (cf. Lema 6.2). Assim, f estará sendo continuada analiticamente a todo um conjunto $C \cup U$ que contém um disco centrado

em z_0 , de raio $R + \delta$. Em conseqüência, o raio de convergência da série de potências de f relativamente a z_0 deveria ser $R + \delta$ e não R . Isto contradiz a hipótese do teorema e completa a demonstração.

Vamos dar exemplo de uma função em que todos os pontos da fronteira de seu disco de convergência são singularidades. A função não é continuável além dessa fronteira, a qual é chamada *fronteira natural da função*.

6.8. Exemplo. Considere a função definida pela série

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!} = 1 + z + z^2 + z^6 + z^{24} + \dots,$$

cujos raio de convergência é 1, como se vê facilmente. Consideremos valores de z da forma $z = re^{2\pi(p/q)i}$, onde $0 < r < 1$ e p e q são inteiros, com $q > 0$. Então,

$$z^{n!} = r^{n!} e^{2\pi(p/q)i n!},$$

o que implica $z^{n!} = r^{n!}$ a partir de $n = q$, visto que, então, $pn!/q$ é inteiro. Em conseqüência,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{q-1} z^{n!} + \sum_{n=q}^{\infty} r^{n!},$$

donde obtemos, sendo $N > 2q$ um número inteiro qualquer:

$$|f(z)| \geq \sum_{n=q}^{\infty} r^{n!} - \sum_{n=0}^{q-1} r^{n!} > \sum_{n=q}^N r^{n!} - q > (N - q + 1)r^{N!} - q.$$

Ora, esta última expressão tende a $N + 1 - 2q$ com $r \rightarrow 1$. Como N pode ser tomado arbitrariamente grande, isso prova que $|f(z)|$ tende a infinito com z tendendo à fronteira ao longo do raio $z = re^{2\pi(p/q)i}$. Em vista disso, é impossível que f tenha uma continuação analítica g a uma região contendo qualquer ponto z_0 da fronteira, pois g teria de ser analítica em todos os pontos de um arco da fronteira contendo z_0 , mas tal arco contém infinitos pontos da forma $e^{2\pi(p/q)i}$.

Continuação analítica por cadeias

Para melhor compreender a relevância do conceito que vamos introduzir agora, comecemos com um exemplo.

6.9. Exemplo. A função $\log z$, como sabemos, só fica bem definida quando restringimos o argumento de z convenientemente. Consideremos as regiões R_k como semiplanos dados pelas seguintes restrições ao argumento de z :

$$\frac{k\pi}{2} < \arg z < \frac{k\pi}{2} + \pi.$$

Denotemos com f_k o ramo do logaritmo definido nesses semiplanos, isto é, $f_k(z) = \log z$, com z restrito a R_k . Então, (f_k, R_k) é um elemento funcional ou germe do logaritmo. Observe que os elementos (f_k, R_k) e (f_{k+1}, R_{k+1}) são a continuação analítica direta um do outro. Os valores $k = -1, k = 0, k = 1$ e $k = 2$ nos dão o logaritmo nos semiplanos $\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z < 0$ e $\operatorname{Im} z < 0$, respectivamente. Cada um é a continuação analítica direta de seu antecessor ou sucessor imediato, mas não de outro elemento qualquer. Por exemplo, (f_2, R_2) não é continuação analítica direta de (f_{-1}, R_{-1}) .

Observe que R_2 e R_{-1} têm uma interseção não-vazia, mas f_2 e f_{-1} não coincidem nessa interseção. No entanto, é claro que sendo cada elemento funcional da seqüência

$$(f_{-1}, R_{-1}), (f_0, R_0), (f_1, R_1), (f_2, R_2)$$

continuação analítica direta de seu antecessor imediato, então (f_2, R_2) deve ser considerado continuação analítica de (f_{-1}, R_{-1}) em algum novo sentido. Isso nos leva à noção de continuação analítica por cadeias, como definimos a seguir.

6.10. Definições. Um conjunto de elementos funcionais

$$(f_1, R_1), (f_2, R_2), \dots, (f_n, R_n),$$

tal que cada um é a continuação analítica direta de seu antecessor ou sucessor imediato, é chamada uma cadeia de elementos funcionais ligando

(f_1, R_1) a (f_n, R_n) . Cada elemento (f_k, R_k) da cadeia é chamado uma continuação analítica de qualquer outro (f_j, R_j) (podendo eventualmente, mas não necessariamente, ser continuação analítica direta).

Diz-se que uma família de elementos funcionais (que pode ser finita ou infinita) é conexa se quaisquer dois de seus elementos podem ser ligados por uma cadeia de elementos pertencentes à família.

Esses conceitos permitem estender uma função analítica a partir de qualquer de seus elementos funcionais, de forma a se chegar a uma "extensão maximal", isto é, o conjunto de todas as continuações analíticas da função. E, ao fazer isso, como já tivemos oportunidade de ver, no caso do logaritmo, podemos voltar, com valores diferentes, a uma região já considerada. Para remediar essa situação, somos levados a introduzir um conceito novo, o de *superfície de Riemann*. Não vamos nos alongar nessa direção, mas apenas apresentar alguns exemplos concretos.

Superfícies de Riemann

Vejamos como essas idéias se aplicam no caso concreto do logaritmo, que comecemos a analisar no Exemplo 6.8. Os vários elementos ali considerados, (f_k, R_k) , com k variando no conjunto dos inteiros, são uma família conexa que faz a máxima extensão possível do logaritmo. Mas surge aqui um novo fenômeno: partindo de um determinado elemento funcional (f_{-1}, R_{-1}) , que nos dá o logaritmo no semiplano $\operatorname{Re} z > 0$, voltamos a este mesmo semiplano com o elemento funcional (f_3, R_3) , o qual, todavia, não coincide com o elemento inicial (f_{-1}, R_{-1}) : o logaritmo volta acrescido de $2\pi i$.

Por causa desse fenômeno, dizemos que $z = 0$ é um *ponto de ramificação*: e que o logaritmo é uma *função multivalente*. Para fazê-la "univalente", somos levados a distinguir várias réplicas dos semiplanos, como R_{-1} e R_3 . Para isso, vamos juntando os vários elementos funcionais (f_k, R_k) em seqüência, "colando" os semiplanos R_k uns aos outros convenientemente. Assim, R_{-1} é colado a R_0 no 1º quadrante, que é comum a esses semiplanos; R_0 é colado a R_1 no 2º quadrante, que é comum a eles dois; R_1 colado a R_2 no 3º quadrante, R_2 colado a R_3 no 4º quadrante etc. Mas observe que o 4º quadrante que comparece em R_2 deve ser distinguido do 4º quadrante que comparece em R_{-1} , bem assim todo o semiplano R_3 deve ser distinguido

do semiplano R_{-1} .

Esse procedimento de colagem sucessiva dos vários elementos funcionais equivale à construção que descrevemos a seguir. Consideramos várias réplicas F_k do plano complexo (k variando no conjunto dos números inteiros), correspondendo aos números complexos z tais que

$$2k\pi \leq \arg z < 2(k+1)\pi.$$

F_k é cortada ao longo do semi-eixo positivo, de sorte que possui duas arestas, uma delas em que $\arg z = 2k\pi$, chamada 1ª aresta, a outra em que $\arg z = 2(k+1)\pi$, chamada 2ª aresta. Agora colamos a 2ª aresta de F_k na 1ª aresta de F_{k+1} , k variando no conjunto dos inteiros. O resultado é o que se chama a *superfície de Riemann* do logaritmo, uma superfície "espiralada", ilustrada na Fig. 6.5. Assim, partindo de um ponto $z = re^{i\theta}$ e aumentando continuamente seu argumento até o valor $\theta + 2\pi$, atingimos o ponto $z' = re^{i\theta+2\pi}$. Mas observe que z' não coincide com z , pois encontra-se em nova folha da superfície de Riemann, o que torna o logaritmo uma função multivalente.

Observe também que a superfície de Riemann não apenas torna a função univalente; ela faz a extensão máxima da função. De fato, quando consideramos um ramo do logaritmo, como

$$\log z = \log r + i \arg z, \quad 2k\pi \leq \arg z < 2(k+1)\pi,$$

por que preferir este a outro ramo qualquer? É evidente que um ramo não passa de um elemento funcional ou germe, não a função em sua totalidade.

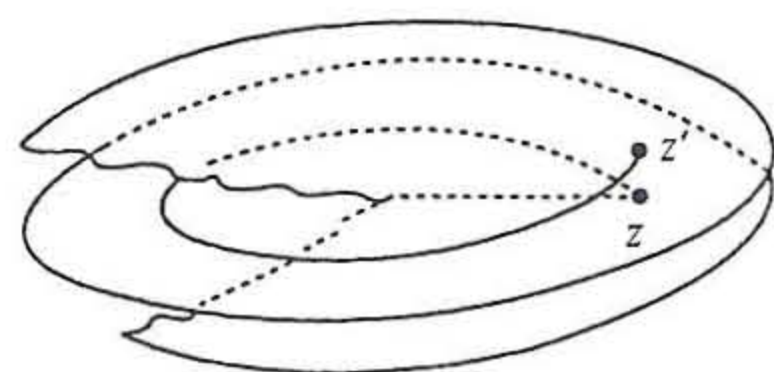


Fig. 6.5

6.11. Exemplo. Outra função multivalente é a raiz quadrada. Sendo $z = re^{i\theta}$, $f(z) = r^{1/2}e^{i\theta/2}$. Mas o argumento θ tem várias determinações; como sabemos, sendo θ_0 uma delas, as demais são dadas por $\theta_0 + 2k\pi$,

k variando no conjunto dos inteiros. Assim, $f(z) = r^{1/2}e^{i\theta_0/2}e^{k\pi i}$. Ora, $e^{k\pi i} = \pm 1$, conforme k seja par ou ímpar, respectivamente. Então, sendo f_0 o valor de $f(z)$ com $k = 0$, vemos que, partindo de z com argumento θ_0 , após uma volta em torno da origem no sentido positivo ($k = 1$), o valor de f passa a ser $-f_0$; uma volta mais ($k = 2$) e o valor de f volta a ser f_0 . Assim, após o ponto z percorrer duas voltas em torno da origem, ele deve voltar à posição inicial (Fig. 6.6a).

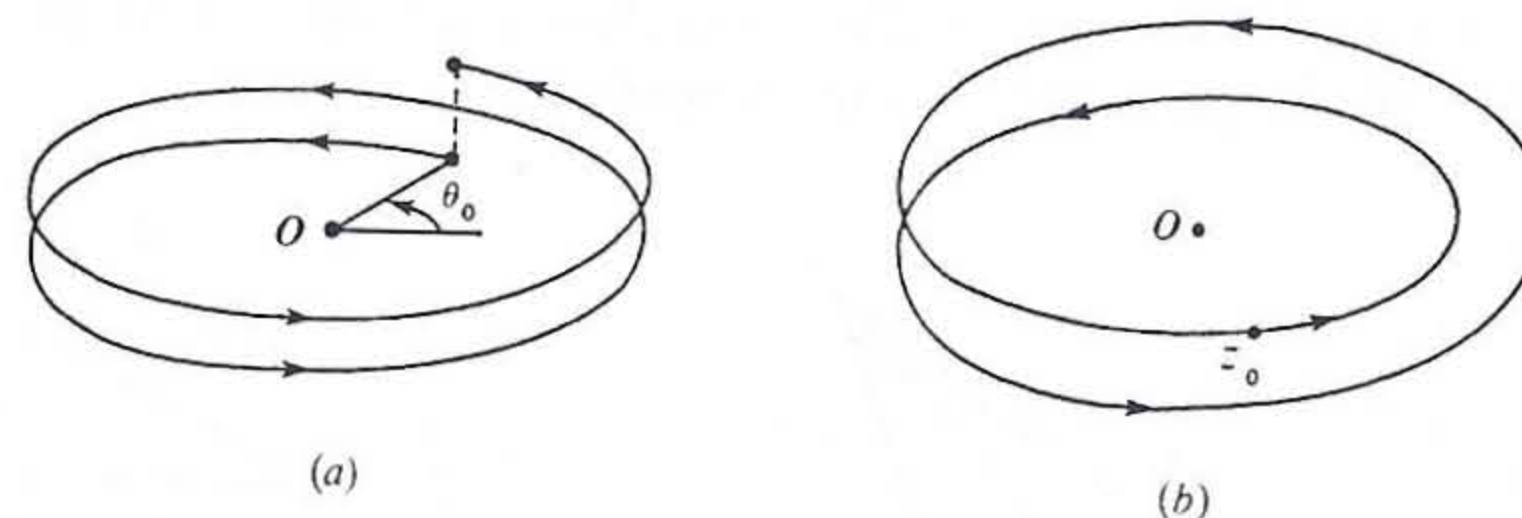


Fig. 6.6

Essas observações mostram que $z = 0$ é um ponto de ramificação da função raiz quadrada; e para formar sua superfície de Riemann bastam apenas duas réplicas do plano complexo, F_0 e F_1 na notação usada há pouco. Colamos a 2ª aresta de F_0 com a 1ª aresta de F_1 e a 2ª aresta de F_1 com a 1ª aresta de F_0 . A Fig. 6.6b ilustra um caminho fechado simples em volta da origem nessa superfície de Riemann.

6.12. Exemplo. Vamos estudar a função

$$f(z) = \sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{z+1}\sqrt{z-1}.$$

Para fazê-la univalente, cortamos o plano ao longo dos semi-eixos $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$, através das restrições

$$-\pi < \arg(z+1) < \pi \quad \text{e} \quad 0 < \arg(z-1) < 2\pi.$$

Obtemos assim uma região (Fig. 6.7a) onde ambas as funções $\sqrt{z+1}$ e $\sqrt{z-1}$ são univalentes, portanto, onde é também univalente a função original $\sqrt{z^2 - 1}$.

Outra possibilidade consiste em cortar o plano complexo ao longo do segmento $[-1, 1]$, de modo que, se um contorno fechado simples C envolver

o ponto 1, ele terá necessariamente de envolver o ponto -1 (Fig. 6.7b). Dessa forma, se um ponto z se desloca ao longo de C , no sentido antihorário, voltando à posição inicial, os argumentos de $z-1$ e $z+1$ ficam aumentados de 2π e $f(z)$ volta ao valor inicial. Novamente aqui, f é univalente na região considerada, mas possui dois ramos, dependendo do valor escolhido num ponto qualquer. Por exemplo; seja $z_0 = 3$. Como sabemos, há dois valores possíveis para $\sqrt{z_0 - 1}$, que são $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$, conforme $\arg(z_0 - 1)$ seja um múltiplo par ou ímpar de 2π , respectivamente. Analogamente, $\sqrt{z_0 + 1}$ pode assumir os valores $+2$ e -2 . Então, os possíveis valores de $f(z_0)$ são $2\sqrt{2}$ e $-2\sqrt{2}$; uma vez escolhido um desses valores, f fica determinada em toda a região que estamos considerando.

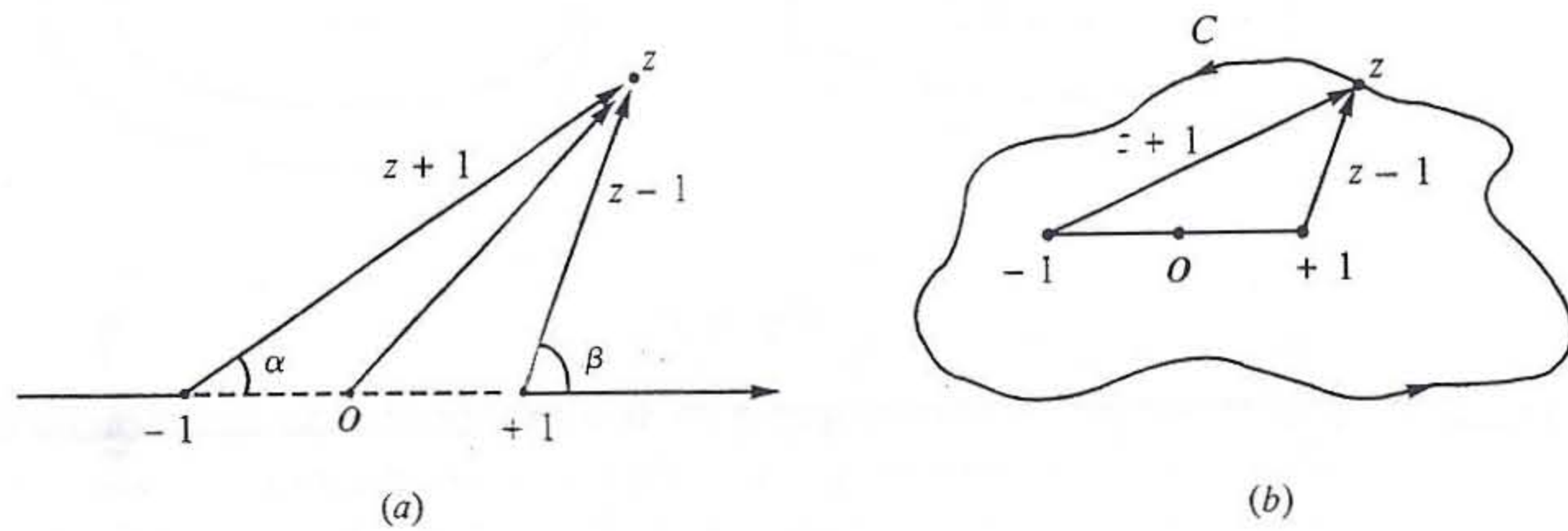


Fig. 6.7

Temos de juntar esses dois ramos convenientemente para construir a superfície de Riemann de f . Para isso, tomemos duas réplicas F_1 e F_2 do plano complexo cortado ao longo do segmento $[-1, 1]$, correspondendo aos dois ramos de f . Cada réplica possui duas arestas, ao todo quatro arestas, duas inferiores A_- e B_- e duas superiores A_+ e B_+ (Fig. 6.8a). Obtemos a superfície de Riemann colando A_- com B_+ e A_+ com B_- . Assim, um ponto que parta de $z = 2$ em F_1 e se desloque no sentido positivo no contorno circular de centro $z = 1$ e raio $r = 1/2$, ao atingir a aresta A_+ passa para F_2 ; e, depois de mais meia volta, retorna ao ponto $z = 2$, mas agora em F_2 . Continuando por mais meia volta, retornamos a F_1 , onde mais meia volta nos leva ao ponto inicial $z = 2$ em F_1 (Fig. 6.8b).

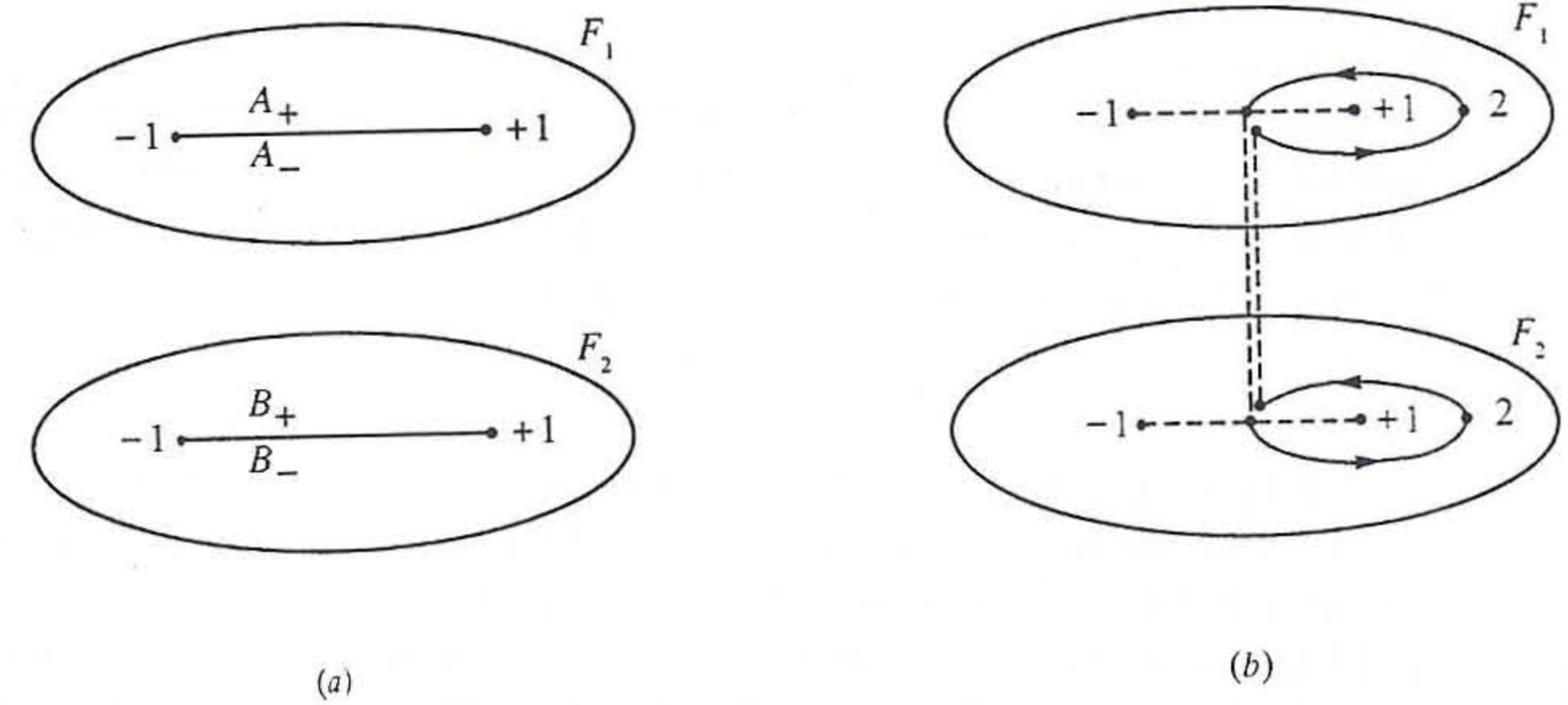


Fig. 6.8

Os exemplos de funções multivalentes aqui considerados são relativamente simples, e suas superfícies de Riemann podem ser facilmente visualizadas. Em geral isso não é assim, mas em muitas aplicações basta o conhecimento de ramos particulares, que obtemos freqüentemente sem muita dificuldade.

EXERCÍCIOS

Nos Exercs. 1 a 7, construa a superfície de Riemann da função dada.

1. $f(z) = z^{1/3}$.
2. $f(z) = (z - 1)^{2/3}$.
3. $f(z) = z^{m/n}$, onde m e n são números naturais, com $n > 1$.
4. $f(z) = z^a$, a irracional.
5. $f(z) = (z^2 - 1)^{1/3}$.
6. $f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$.
7. $f(z) = \sqrt{z(z^2 - 1)}$. Sugestão: Considere duas réplicas do plano complexo, ambas cortadas de -1 a zero e de 1 a ∞ .

FUNÇÕES ANALÍTICAS DEFINIDAS POR INTEGRAIS

Um exemplo interessante de continuação analítica é fornecido pela chamada "função gama", uma importante função especial que aparece freqüentemente, tanto na matemática pura como nas aplicações. Para estudar esse exemplo, devemos primeiro considerar, de um modo geral, funções definidas por certas integrais.

6.13. Teorema. *Seja $f(z, \zeta)$ uma função contínua das variáveis z e ζ , onde z varia numa região R e ζ está restrita a um contorno limitado C . Suponhamos que f seja analítica em $z \in R$ para todo $\zeta \in C$. Então, a função*

$$F(z) = \int_C f(z, \zeta) d\zeta$$

é analítica na região R , e $F'(z) = \int_C \frac{\partial f(z, \zeta)}{\partial z} d\zeta$.

Demonstração. Faremos a demonstração no pressuposto de que C seja um arco regular, ao qual se reduz facilmente o caso geral em que C seja composto de uma sucessão finita de arcos regulares, bastando para isso substituir a integral sobre C por uma soma finita de integrais sobre arcos regulares. Assim, supomos que C seja dado por uma parametrização $\zeta = \zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$, t variando num intervalo (a, b) .

Seja Λ um contorno fechado simples, envolvendo o ponto z , e todo contido na região R , juntamente com seu interior. Pela fórmula de Cauchy,

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C d\zeta \int_\Lambda \frac{f(\lambda, \zeta)}{\lambda - z} d\lambda.$$

Utilizando as parametrizações dos contornos C e Λ , essa integral repetida pode ser escrita como soma de integrais reais repetidas, envolvendo integrandos contínuos. Em tais integrais podemos inverter a ordem das integrações; após recomposição das integrais complexas, chegamos à conclusão de que podemos inverter a ordem das integrações na última expressão acima e escrever:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Lambda \frac{d\lambda}{\lambda - z} \int_C f(\lambda, \zeta) d\zeta,$$

ou seja,

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Lambda \frac{F(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda.$$

Provamos, assim, que F satisfaz a fórmula integral de Cauchy, o que permite provar que F tem derivada (ou seja, é analítica), como fizemos na demonstração do Teorema 3.16 (p. 103).

Falta provar que a derivada de F pode ser calculada por derivação sob o sinal de integração na definição original de F . Para isso, utilizamos novamente a mudança da ordem de integração, assim:

$$\begin{aligned} F'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Lambda \frac{F(\lambda)}{(\lambda - z)^2} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_\Lambda \frac{d\lambda}{(\lambda - z)^2} \int_C f(\lambda, \zeta) d\zeta \\ &= \int_C d\lambda \int_\Lambda \frac{f(\lambda, \zeta)}{(\lambda - z)^2} d\lambda = \int_C \frac{\partial f(\lambda, \zeta)}{\partial \lambda} d\zeta. \end{aligned}$$

Isto completa a demonstração.

6.14. Teorema. *Seja C um contorno não-limitado, indo para infinito ao longo do eixo Oz ou em qualquer outra direção. Suponhamos que as condições do teorema anterior estejam satisfeitas em qualquer parte limitada de C e que a integral*

$$F(z) = \int_C f(z, \zeta) d\zeta$$

seja uniformemente convergente. Então as conclusões do teorema anterior permanecem válidas.

Demonstração. Seja C_n a parte de C no círculo de centro na origem e raio n . Pelo teorema anterior,

$$F_n(z) = \int_{C_n} f(z, \zeta) d\zeta$$

é analítica, e $F'_n(z) = \int_{C_n} \frac{\partial f(z, \zeta)}{\partial z} d\zeta$. Aplicando o Teorema 4.6 (p. 123) como se a seqüência F_n fosse a reduzida s_n de uma série uniformemente convergente, teremos:

$$F'(z) = \lim F'_n(z) = \lim \int_{C_n} \frac{\partial f(z, \zeta)}{\partial z} d\zeta = \int_C \frac{\partial f(z, \zeta)}{\partial z} d\zeta,$$

e isto conclui a demonstração.

Um teorema análogo a este último pode ser formulado, com a hipótese de que a integral se estenda sobre um contorno limitado C , mas o integrando $f(z, \zeta)$ tenda a infinito em um ou em ambos os extremos de C . (Veja o Exerc. 1 adiante). Veremos a aplicação de um tal teorema no estudo da função gama, considerada logo a seguir.

A função gama

A chamada *função gama* aparece em vários domínios da Matemática, sejam de natureza puramente teórica, sejam nas aplicações. Ela foi introduzida por Euler como extensão do fatorial de um número inteiro positivo. Começamos observando que repetidas integrações por partes nos conduzem a

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt = n!$$

para todo inteiro $n \geq 0$. Ora, esta última integral faz sentido mesmo quando substituímos n por x real maior do que -1 . Isso resulta na função

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt,$$

definida para todo $x > -1$. Generalizando, pois, o fatorial, podemos escrever:

$$x! = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt, \quad x > -1.$$

Para evitar esse $x > -1$, basta escrever $x - 1$ em lugar de x , o que nos conduz à função gama com argumento real, denotada por $\Gamma(x)$:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0.$$

Assim, $\Gamma(n + 1) = n!$ para todo inteiro $n \geq 0$.

A notação $z!$ até que é a mais lógica e natural para indicar a função $\Gamma(z + 1)$. Alguns autores chegaram a insistir nela, mas sem sucesso; Γ é a notação consagrada e não há mais como mudar essa situação.

A última integral acima faz sentido mesmo quando substituímos a variável real x pela variável complexa z , desde que façamos a restrição

$\operatorname{Re} z > 0$. Para vermos isso, primeiro separemos as duas integrais impróprias que aparecem na expressão

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (6.2)$$

da seguinte maneira:

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (6.3)$$

A segunda destas integrais converge qualquer que seja z , por causa do fator e^{-t} , que decai fortemente no infinito e domina o fator t^{z-1} . Além disso, a convergência é uniforme, desde que z fique restrito a qualquer região limitada (Exerc. 2 adiante). Portanto, pelo Teorema 6.14, essa segunda integral define uma função inteira, ou seja, analítica em todo o plano.

Já a primeira integral só converge se $\operatorname{Re} z > 0$, em vista do fator t^{-1} , que tende a infinito quando t se aproxima de zero. Para provar que ela define uma função analítica em todo o semiplano $\operatorname{Re} z > 0$, basta notar que, dado um tal z , existe $a > 0$ tal que $\operatorname{Re} z > a$; e, como a integral é uniformemente convergente nesse domínio (Exerc. 3 adiante), concluímos que ela define uma função analítica de z em todo o semiplano $\operatorname{Re} z > 0$ (conforme o Exerc. 1 adiante). Em conseqüência, a função gama, dada pela expressão (6.2), é uma função analítica no semiplano indicado, $\operatorname{Re} z > 0$.

Continuação analítica a todo o plano

Observe que

$$e^{-t} t^{z-1} = t^{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}$$

é uma série que, à exceção do primeiro termo, converge com $\operatorname{Re} z > 0$; portanto, pode ser integrada termo a termo de $t = 0$ a $t = 1$:

$$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+z-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n / n!}{z + n}.$$

Substituindo em (6.3) obtemos:

$$\Gamma(z) = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n / n!}{z+n}. \quad (6.4)$$

A série que aí aparece converge uniformemente em qualquer região cuja fronteira esteja a uma distância positiva do conjunto formado pela origem e os inteiros negativos (Exerc. 4 adiante). Exemplo de tal região é o plano todo do qual se eliminam discos de raios $\delta > 0$, centrados nos referidos pontos. Portanto, a expressão (6.4) é a continuação analítica da função gama a todo o plano complexo, exceção feita do zero e dos inteiros negativos. Como essa mesma expressão nos mostra, esses pontos são pólos simples com resíduos $(-1)^n / n!$

EXERCÍCIOS

1. Seja $f(z, \zeta)$ uma função contínua das variáveis z e ζ , onde z varia numa região R e ζ está restrita a um contorno limitado C , excluídos um ou ambos de seus extremos. Suponhamos que f seja analítica em $z \in R$ para todo $\zeta \in C$, tendendo a infinito quando ζ aproxima um dos extremos de C ; e que a integral que define a função

$$F(z) = \int_C f(z, \zeta) d\zeta$$

seja uniformemente convergente. Prove que $F(z)$ é analítica na região R , e

$$F'(z) = \int_C \frac{\partial f(z, \zeta)}{\partial z} d\zeta$$

2. Prove que a integral $\int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ converge uniformemente, desde que a variável z fique restrita a qualquer região limitada.
3. Prove que a integral $\int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ converge uniformemente em qualquer semiplano $\operatorname{Re} z \geq a > 0$.
4. Prove que a série em (6.4) converge uniformemente em qualquer região cuja fronteira esteja a uma distância positiva do conjunto formado pela origem e os inteiros negativos.
5. Prove que $\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1)$. Mais geralmente, prove que

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2)\dots(z+1)z\Gamma(z).$$

donde

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)}.$$

Observe que esta expressão permite fazer a continuação analítica de $\Gamma(z)$ ao semiplano $\operatorname{Re} z > -n$, pois o segundo membro está definido nesse semiplano, exceção feita dos pólos $0, -1, -2, \dots, -(n-1)$.

6. Calcule $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(5/2)$, $\Gamma(-3/2)$; de um modo geral, calcule $\Gamma(n-1/2)$, sendo n inteiro qualquer, positivo ou negativo. *Sugestão:* Primeiro mostre que $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$; faça isso elevando a integral ao quadrado e transformando a integral repetida numa integral dupla. Veja [A3], Seç. 5.5.)
7. Mostre que $\int_0^{\infty} e^{-zt^2} dt$ define uma função analítica no semiplano $\operatorname{Re} z > 0$. Mostre ainda que essa função tem continuação analítica a todo o plano cortado ao longo do semi-eixo $(-\infty, 0]$, dada por $\sqrt{\pi}/4z$.

Capítulo 7

APLICAÇÕES À DINÂMICA DOS FLUIDOS

OS MOVIMENTOS FLUIDOS A CONSIDERAR

Veremos, no presente capítulo, algumas aplicações simples das funções analíticas à Dinâmica dos Fluidos e, em particular, à Aerodinâmica. Nossas considerações se restringirão a fluidos perfeitos, homogêneos e incompressíveis. Num *fluido perfeito* a força que uma parte do fluido exerce sobre a parte adjacente é devida apenas à pressão, sempre perpendicular à superfície de separação entre as partes. Na verdade, isto nunca ocorre na Natureza, sendo apenas uma idealização simplificadora, confirmada, com boa aproximação, em várias situações físicas importantes.

Faremos a hipótese de que o fluido permaneça *homogêneo* e *incompressível* durante o movimento, de sorte que a densidade de massa ρ é constante em todos os pontos e durante todo o tempo¹. Suporemos também que o movimento seja bidimensional e estacionário. *Bidimensional* significa que existe um plano, que tomaremos como o plano xy , tal que a velocidade se mantenha paralela a este plano, independente da terceira coordenada espacial z , de forma que o movimento é o mesmo em todos os planos paralelos ao plano xy , bastando, pois, estudar o movimento neste plano. *Estacionário* é o movimento cuja velocidade em cada ponto mantém-se constante no tempo.

¹ *Homogêneo* significa que ρ se mantém constante nos diferentes pontos, podendo variar com o tempo; *incompressível* significa que ρ se mantém constante para cada partícula, podendo variar de uma partícula para outra. As duas condições juntas implicam ρ constante em todas as variáveis, espaciais e temporal.

Conservação da massa

Denotemos com $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x, y)$ o vetor velocidade no ponto (x, y) , de componentes $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$. Suporemos sempre que essas funções sejam de classe C^1 , isto é, elas têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em seus domínios de definição. Então u e v satisfazem a seguinte equação, chamada *equação de continuidade* ou *equação de conservação da massa*:

$$\text{div } \mathbf{q} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{7.1}$$

Na verdade, esta equação é caso particular da equação geral de continuidade, da qual fazemos uma dedução em [A3], p. 232, Eq. 7.11).

Vamos deduzir (7.1) diretamente, considerando o fluxo do vetor \mathbf{q} através de uma curva C . Se ds designa o elemento de arco ao longo de C e $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ o vetor unitário normal à curva (Fig. 7.1a), o *fluxo* ψ de \mathbf{q} através de C , no sentido de \mathbf{n} , é definido pela expressão

$$\psi = \int_C \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds \tag{7.2}$$

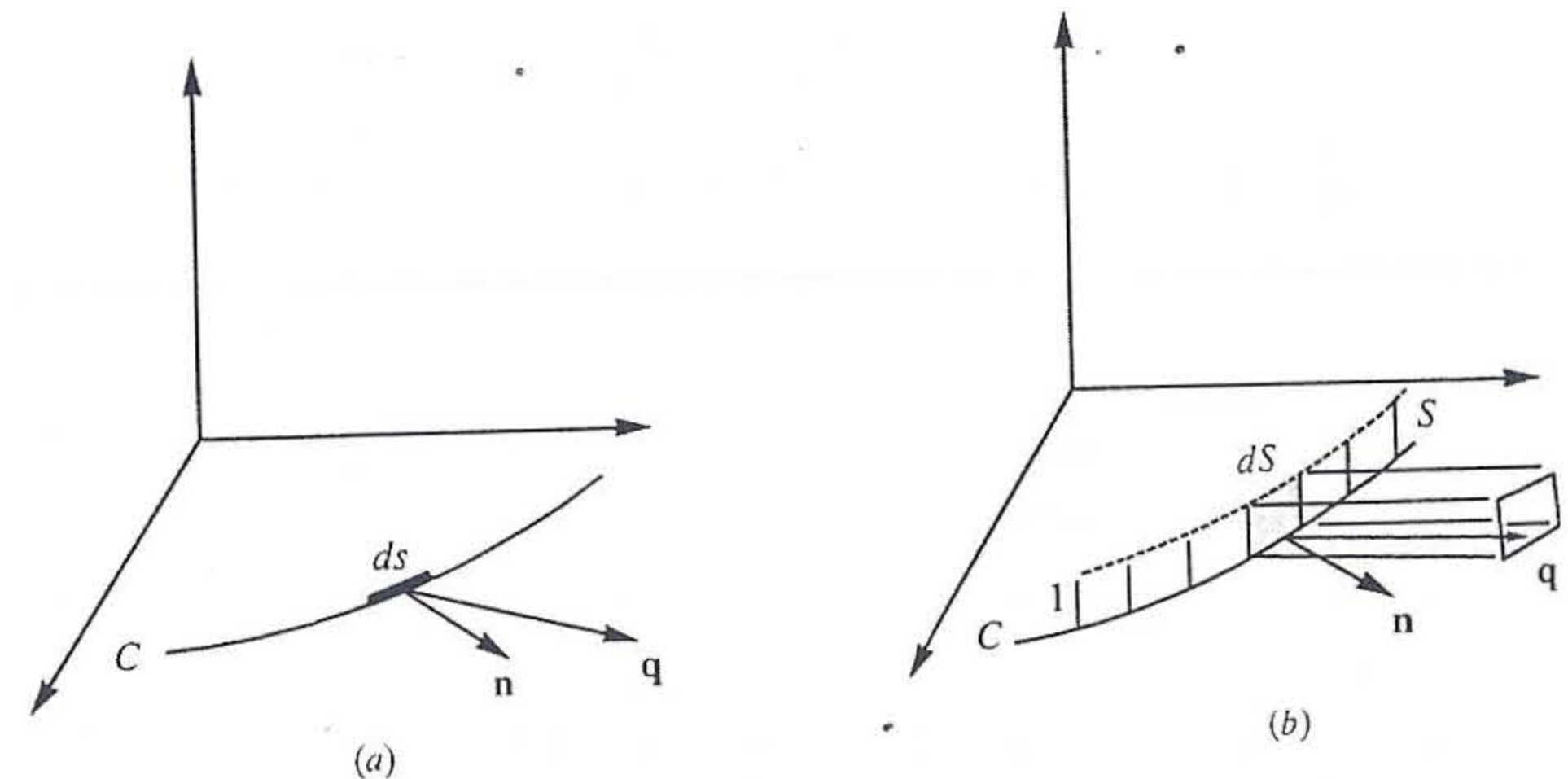


Fig. 7.1

A importância deste conceito decorre do significado físico de $\rho\psi$, que passamos a explicar. Seja S a superfície cilíndrica formada pelos segmentos

unitários levantados a partir dos pontos de C , perpendicularmente ao plano xy (Fig. 7.1b). Então, ao elemento de arco ds corresponde um elemento de superfície $dS = 1 \cdot ds$, de sorte que $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds$ é numericamente igual ao volume $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds$ de um pequeno cilindro de base dS e altura $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$. Ora, \mathbf{q} é o deslocamento das partículas de fluido por unidade de tempo, de forma que $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds$ é o volume de fluido que atravessa o elemento de área dS por unidade de tempo. Em conseqüência, $\rho \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds$ é a massa de fluido que atravessa dS por unidade de tempo no sentido do vetor \mathbf{q} . Quando integramos sobre C em (7.2) e multiplicamos por ρ , vemos que $\rho \psi$ é a massa de fluido que atravessa a superfície S na unidade de tempo, no sentido indicado por \mathbf{n} .

Notemos que a integração em (7.2) será negativa naqueles trechos da curva onde $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} < 0$, ou seja, onde o fluxo de massa através de S efetivamente se processa no sentido oposto ao de \mathbf{n} . Assim, $\rho \psi$ representa, na verdade, a soma algébrica de toda a massa que atravessa S no sentido de \mathbf{n} ; ou ainda, $\rho \psi$ é a diferença entre a massa que atravessa S no sentido de \mathbf{n} e a que atravessa S no sentido oposto ao de \mathbf{n} .

Suponhamos agora que C seja uma curva fechada simples, que esteja contida, juntamente com seu interior, no domínio onde u e v sejam de classe C^1 . Seja \mathbf{n} a normal externa de C . $\rho \psi$ será a massa total que sai do interior de S na unidade de tempo, ou ainda, a diferença entre a que sai (nos trechos de C onde $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} > 0$) e a que entra (nos trechos de C onde $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} < 0$) (Fig. 7.2). Como o fluido é incompressível, $\rho \psi$ é zero, pois a massa que efetivamente sai é compensada pela que efetivamente entra para o interior de C . Assim,

$$\oint_C \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds = 0 \tag{7.3}$$

e, pelo teorema da divergência (p. 90).

$$\iint_R \text{div} \mathbf{q} dx dy = 0,$$

onde R é o interior da curva C . Como $\text{div} \mathbf{q}$ é função contínua e R é um domínio arbitrário, o teorema da média para integrais nos permite concluir que $\text{div} \mathbf{q} = 0$. Isto completa a demonstração de (7.1).

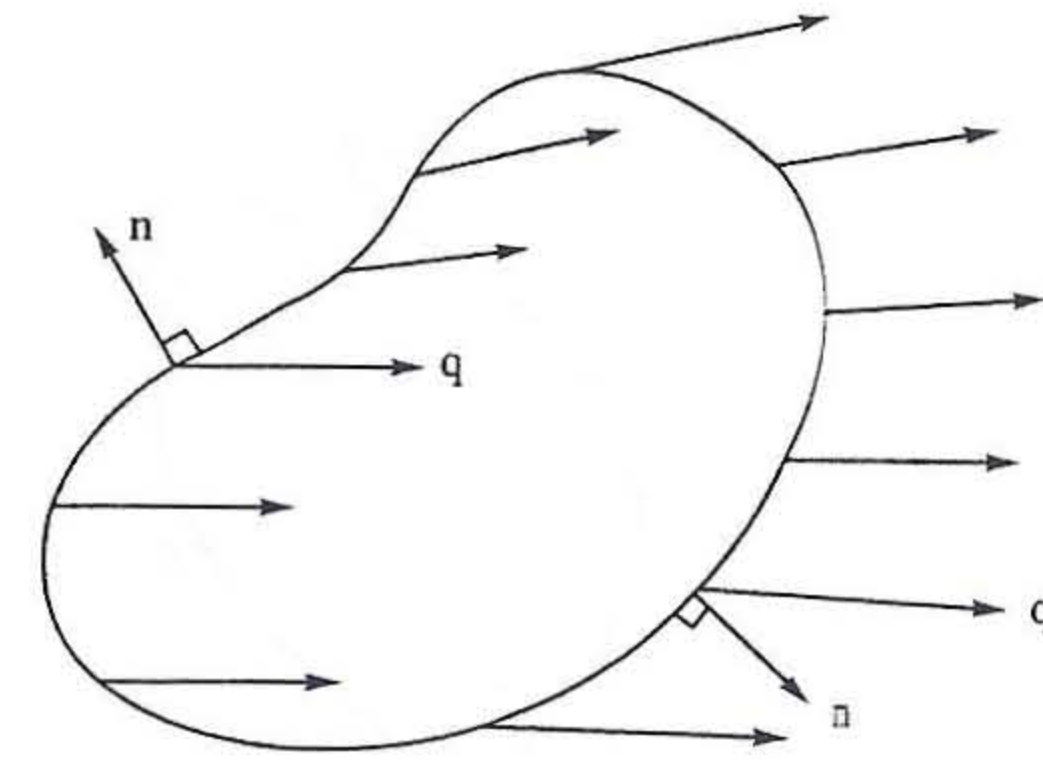


Fig. 7.2

O campo de velocidades é, como se vê, *solenoidal*, designação esta que é dada aos campos vetoriais com divergente nulo. Como é fácil ver, um campo vetorial \mathbf{q} é solenoidal se e somente se seu fluxo é zero para todo contorno fechado simples que esteja contido, juntamente com seu interior, no domínio onde $\text{div} \mathbf{q}$ seja contínuo.

A lei de conservação da massa na forma (7.3) tem como conseqüência que o fluxo de \mathbf{q} através de uma curva com origem num ponto P_0 e extremidade num ponto P não depende da curva, mas somente dos pontos P_0 e P . De fato, se C e C' são duas curvas com a mesma origem P_0 e a mesma extremidade P , então $C - C'$ é uma curva fechada (Fig. 7.3); logo,

$$\oint_{C-C'} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds = 0,$$

onde obtemos

$$\int_C \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{C'} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds,$$

que é o resultado desejado. (Nesse raciocínio estamos supondo, tacitamente, que o interior do circuito $C - C'$ esteja todo contido no domínio de \mathbf{q} ; ou ainda, que a curva C se deforma na curva C' sem sair do domínio de \mathbf{q} .) Segue-se então que, fixado o ponto inicial $P_0 = (x_0, y_0)$, o fluxo ψ dado em (7.2) passa a ser uma função do ponto final $P = (x, y)$, já que pode ser

escrito na forma

$$\psi = \psi(P) = \int_{P_0}^P \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds \quad (7.4)$$

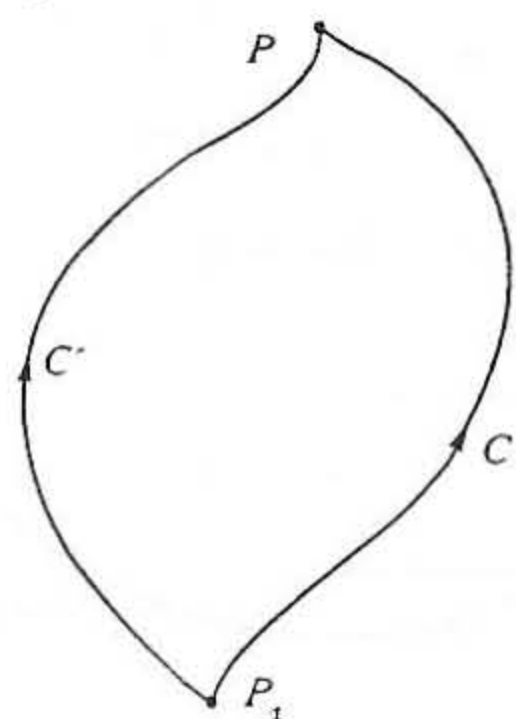


Fig. 7.3

Esta função ψ permanece constante ao longo das trajetórias das partículas. Para vermos isso, notamos que se Q é um ponto qualquer sobre a trajetória que passa por P (Fig. 7.4), podemos escrever:

$$\psi(Q) = \int_{P_0}^P \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds + \int_P^Q \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds = \psi(P) + \int_P^Q \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds$$

Ora, esta última integral se anula, pois é feita ao longo da trajetória por P , e \mathbf{q} é tangente, enquanto \mathbf{n} é normal a essa trajetória, de forma que $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$.

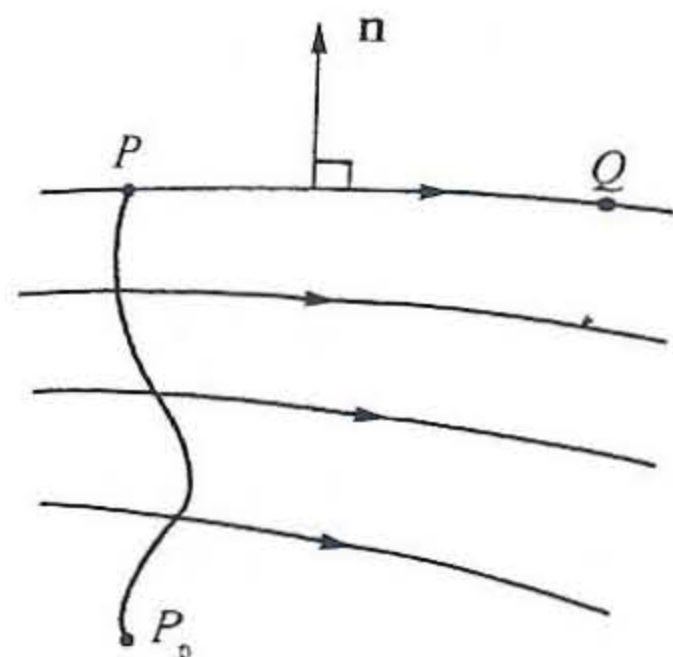


Fig. 7.4

Escoamentos irrotacionais

Obteremos agora uma nova equação do movimento, ou *escoamento* fluido. Começamos com a seguinte integral de linha:

$$\Gamma = \int_C \mathbf{q} \cdot \mathbf{t} ds. \quad (7.5)$$

onde C é um caminho fechado, que supomos seja simples e em cujo interior as funções u e v sejam de classe C^1 e \mathbf{t} é o vetor unitário tangente a C . Essa integral Γ é chamada a *circulação* do campo de velocidades \mathbf{q} ao longo da curva C . Observe que o produto $\mathbf{q} \cdot \mathbf{t}$ é o valor escalar da velocidade tangencial, de forma que a circulação Γ é, de fato, uma medida de quanto as partículas fluidas tendem a circular ao longo do circuito C . Por exemplo, vamos supor que o movimento seja uma rotação pura², a velocidade sendo sempre perpendicular ao raio vetor $\mathbf{r} = (x, y)$, como ilustra a Fig. 7.5a. É claro então que a circulação de \mathbf{q} será positiva ao longo de círculos centrados na origem e percorridos no mesmo sentido de \mathbf{q} . Por outro lado, se a velocidade for constante, a circulação será zero ao longo de qualquer circuito C , e é fácil entender por que: a contribuição à integral em (7.5) será positiva na parte de C onde $\mathbf{q} \cdot \mathbf{t} > 0$ e negativa onde $\mathbf{q} \cdot \mathbf{t} < 0$ (Fig. 7.5b).

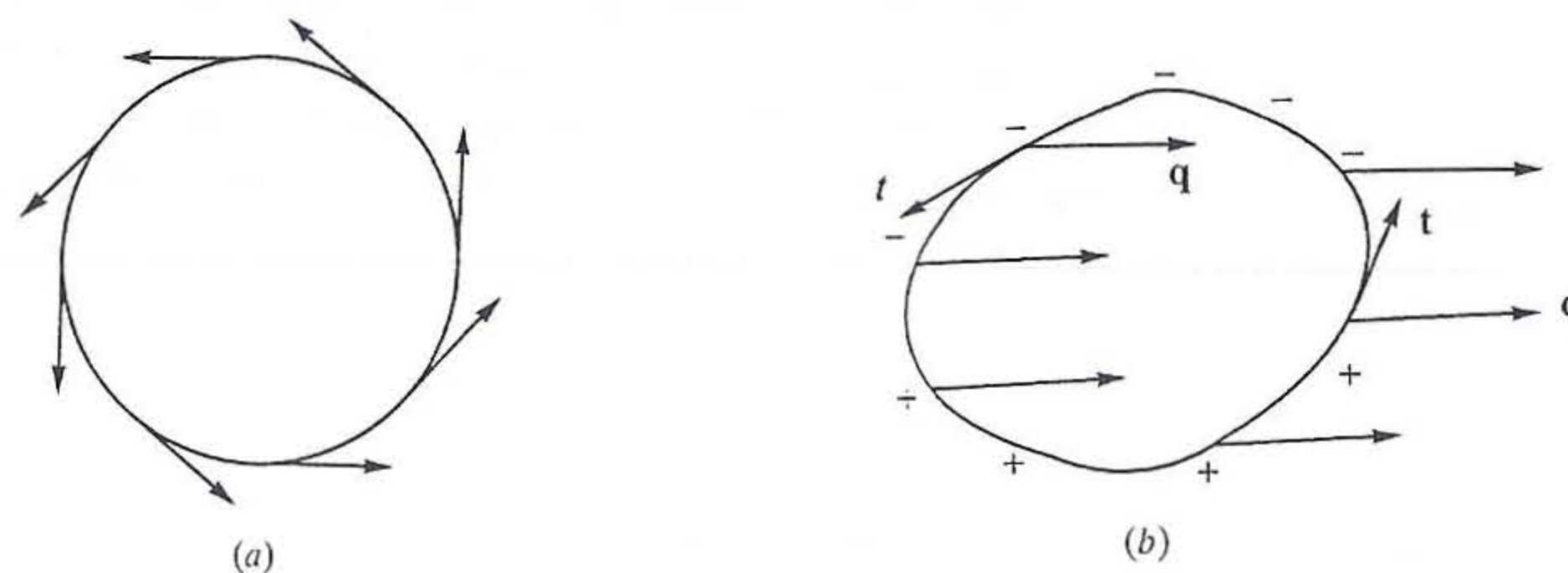


Fig. 7.5

A circulação é uma função do circuito C . Considerando este circuito como constituído das mesmas partículas do fluido, ele se deforma com o passar do tempo. Um teorema fundamental, devido a Lord Kelvin (e que não vamos demonstrar aqui)², afirma que a circulação permanece constante

²O leitor pode encontrar a demonstração desse teorema nas referências [C1] e [M1].

com o passar do tempo. Ora, na hipótese de que o movimento se origina do repouso, a circulação é inicialmente zero: logo, será zero por todo o tempo.

Esta é a hipótese de que o movimento seja *irrotacional*. Vejamos a que equação diferencial ela nos leva. Para tanto, basta notar que

$$0 = \int_C \mathbf{q} \cdot \mathbf{t} \, ds = \int_C u \, dx + v \, dy.$$

Aplicando o teorema de Green (p. 90), esta equação passa a ser

$$\iint_R \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

onde R é a região interior ao circuito C . Finalmente, como o integrando é uma função contínua e R é uma região arbitrária, obtemos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (7.6)$$

Como é fácil ver, as equações (7.1) e (7.6) são as equações de Cauchy-Riemann para as funções u e $-v$, de sorte que a função $u - iv$ é analítica. Isto estabelece uma ligação muito importante e útil entre a teoria das funções analíticas e os movimentos bidimensionais de fluidos que sejam homogêneos, incompressíveis, estacionários e irrotacionais. De fato, uma das maneiras de encontrar esses movimentos consiste em determinar soluções de (7.1) e (7.6), satisfazendo certas condições adicionais, chamadas *condições de contorno*. Mas, por causa da mencionada ligação com as funções analíticas, a determinação dos fluidos pode ser feita mais facilmente partindo de funções analíticas concretas, como veremos adiante.

As funções potenciais

A Eq. 7.6 nos diz que a diferencial

$$u \, dx + v \, dy$$

Aliás, estes livros apresentam os fundamentos matemáticos da Dinâmica dos Fluidos de maneira precisa, clara e sucinta.

é exata, já que sua integral ao longo de qualquer curva fechada Γ é zero ([A3], p. 208). Logo, existe uma função $\phi = \phi(x, y)$, chamada *potencial de velocidade*, tal que

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad \text{ou} \quad \mathbf{q} = \text{grad } \phi \quad (7.7)$$

Substituindo (7.7) em (7.1), verificamos que ϕ satisfaz a equação de Laplace:

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0. \quad (7.8)$$

Vemos assim que a função ϕ é harmônica, possuindo, pois, derivadas parciais de todas as ordens.

Seja $\psi = \psi(x, y)$ a conjugada harmônica de ϕ . Pelo que vimos na p. 111, ψ é determinada a menos de uma constante aditiva. Suas curvas de nível,

$$\psi(x, y) = \text{const.},$$

cruzam as curvas de nível da função ϕ em ângulo reto em todo ponto onde $\text{grad } \psi \neq 0$ (ou $\text{grad } \phi \neq 0$). Ora, como $\mathbf{q} = \text{grad } \phi$, vemos que, onde o campo vetorial \mathbf{q} for diferente de zero, ele é perpendicular às *curvas equipotenciais*

$$\phi(x, y) = \text{const.}$$

e tangente às curvas $\psi = \text{const.}$ Estas curvas são, pois, as *trajetórias das partículas*, ou *linhas de corrente*³.

De acordo com a fórmula (3.20) da p. 113, a função ψ , chamada *função de corrente*, é dada por

$$\psi(x, y) = \psi_0 + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \phi_x \, dy - \phi_y \, dx = \psi_0 + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} u \, dy - v \, dx,$$

onde ψ_0 é uma constante arbitrária e a integração se processa ao longo de qualquer caminho C ligando (x_0, y_0) a (x, y) . Se ds designa o elemento de

³Com a hipótese que fazemos de que o escoamento seja estacionário, esses dois conceitos coincidem. Fora dessa hipótese, as trajetórias são diferentes das linhas de corrente. Estas são definidas como as curvas em cada um de cujos pontos as direções da tangente e da velocidade coincidem. Ora, se a velocidade variar com o tempo em cada ponto as linhas de corrente, em geral, não coincidirão com as trajetórias.

arco ao longo de C e $\mathbf{n} = (n_{x1}, n_{y1})$ o vetor normal unitário. então ([2], p. 201)

$$dx = -n_y ds \quad \text{e} \quad dy = n_x ds.$$

de sorte que

$$\psi(x, y) = \psi_0 + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds$$

Isto mostra que, a menos da constante ψ_0 , ψ é o fluxo do campo de velocidades \mathbf{q} através de qualquer curva ligando (x_0, y_0) a (x, y) , isto é, a mesma grandeza dada em (7.4).

Com a notação $z = x + iy$, a função analítica

$$F(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

é chamada o *potencial complexo* do movimento. Observe que

$$F'(z) = \phi_x + i\psi_x = \phi_x - i\phi_y = u - iv,$$

de sorte que a expressão $w(z) = F'(z)$, é chamada, apropriadamente, de *velocidade complexa*. O módulo da velocidade, por sua vez, resulta ser

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{u^2 + v^2} = |F'(z)|.$$

Os pontos z onde $F'(z) = 0$ — e, conseqüentemente, $\mathbf{q} = 0$ — são chamados *pontos de estagnação*.

Como mencionamos atrás, um modo prático de encontrar possíveis escoamentos bidimensionais de fluidos consiste em partir de exemplos concretos de funções analíticas $F(z)$, o que é muito mais fácil do que resolver as equações diferenciais parciais (7.1) e (7.6) — ou sua equivalente (7.8). A partir de agora, e nas seções seguintes, descreveremos vários exemplos de escoamentos fluidos correspondentes a potenciais complexos dados.

Exemplos básicos

7.1. Exemplo. Consideremos a função

$$F(z) = \alpha z.$$

onde $\alpha = a + ib$ é uma constante. Temos:

$$F'(z) = \alpha = a + ib$$

e

$$F(z) = (ax - by) + i(bx + ay),$$

de sorte que

$$\phi = ax - by \quad \text{e} \quad \psi = bx + ay.$$

$$u = a \quad \text{e} \quad v = -b.$$

O escoamento fluido ocorre em todo o plano complexo, as linhas de corrente sendo dadas pela família de retas paralelas,

$$bx + ay = \text{const.}$$

e as linhas equipotenciais pela família de retas ortogonais,

$$ax - by = \text{const.}$$

Como se vê, e como já sabemos, as retas de cada família cruzam as retas da outra família ortogonalmente (Fig. 7.6). O escoamento é uniforme ao longo de retas paralelas, com velocidade complexa $F'(z) = \alpha = a + ib = u - iv$, por isto mesmo chamado *escoamento paralelo*. O escoamento é paralelo ao eixo Ox , da esquerda para a direita, quando $\alpha = V > 0$, V sendo então a velocidade do escoamento.

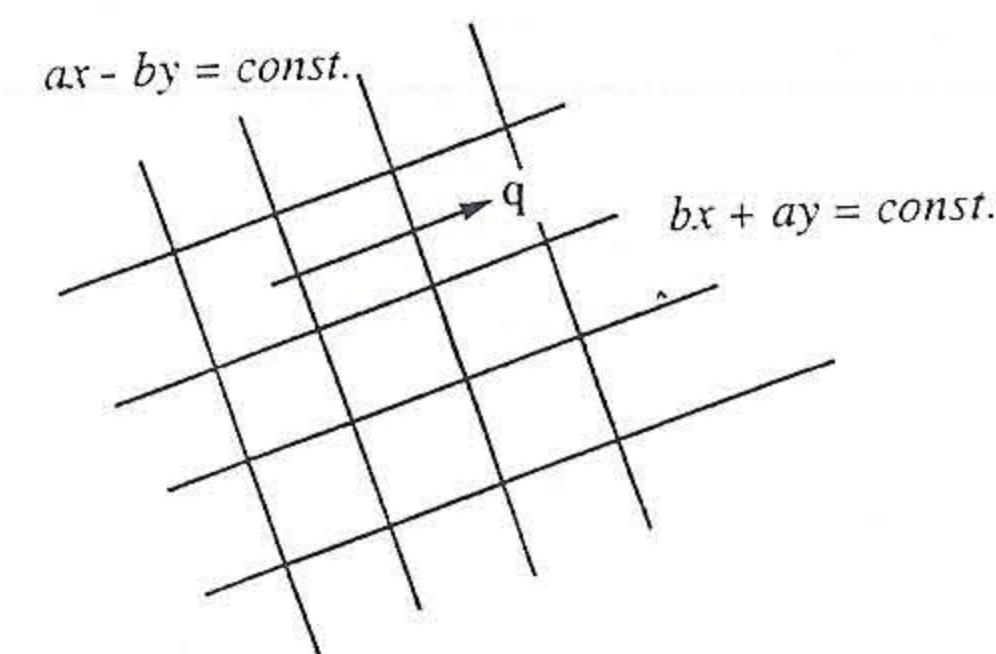


Fig. 7.6

7.2. Exemplo. Vamos considerar o potencial complexo

$$F(z) = z^2,$$

restrito ao primeiro quadrante $x > 0, y > 0$. Como

$$F(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy,$$

vemos que

$$\phi = x^2 - y^2 \quad \text{e} \quad \psi = 2xy,$$

de sorte que as linhas de corrente são as hipérbolas

$$xy = \text{const.}$$

e as linhas eqüipotenciais as hipérbolas

$$x^2 - y^2 = \text{const.}$$

Novamente observamos que as linhas de corrente cruzam as linhas eqüipotenciais ortogonalmente, como ilustra a Fig. 7.7. (Veja também o Exerc. 13 da p. 62.) A velocidade complexa é dada por

$$F'(z) = 2z = 2x + 2iy = u - iv,$$

de sorte que $u = 2x$ e $v = -2y$.

Como se vê, o presente potencial complexo descreve um escoamento fluido no 1º quadrante, as partículas se deslocando ao longo das linhas de corrente no sentido indicado na Fig. 7.7a, a velocidade no ponto (x, y) sendo dada por $\mathbf{q} = 2(x, -y)$. Os semi-eixos Ox e Oy são como paredes fixas que se encontram na origem, onde formam um ângulo de 90° . Esses semi-eixos podem ser considerados como linhas de corrente particulares; mas então, uma partícula descendo para a origem ao longo do eixo dos y tem velocidade decrescente, que atinge o valor zero na origem. Por outro lado, a partir da origem, a velocidade cresce de zero a infinito ao longo do eixo dos x .

É claro que o potencial que acabamos de analisar representa um escoamento fluido em cada um dos quatro quadrantes, nos semiplanos, ou no plano todo (Fig. 7.7b). Em qualquer desses casos, a origem é um ponto de estagnação.

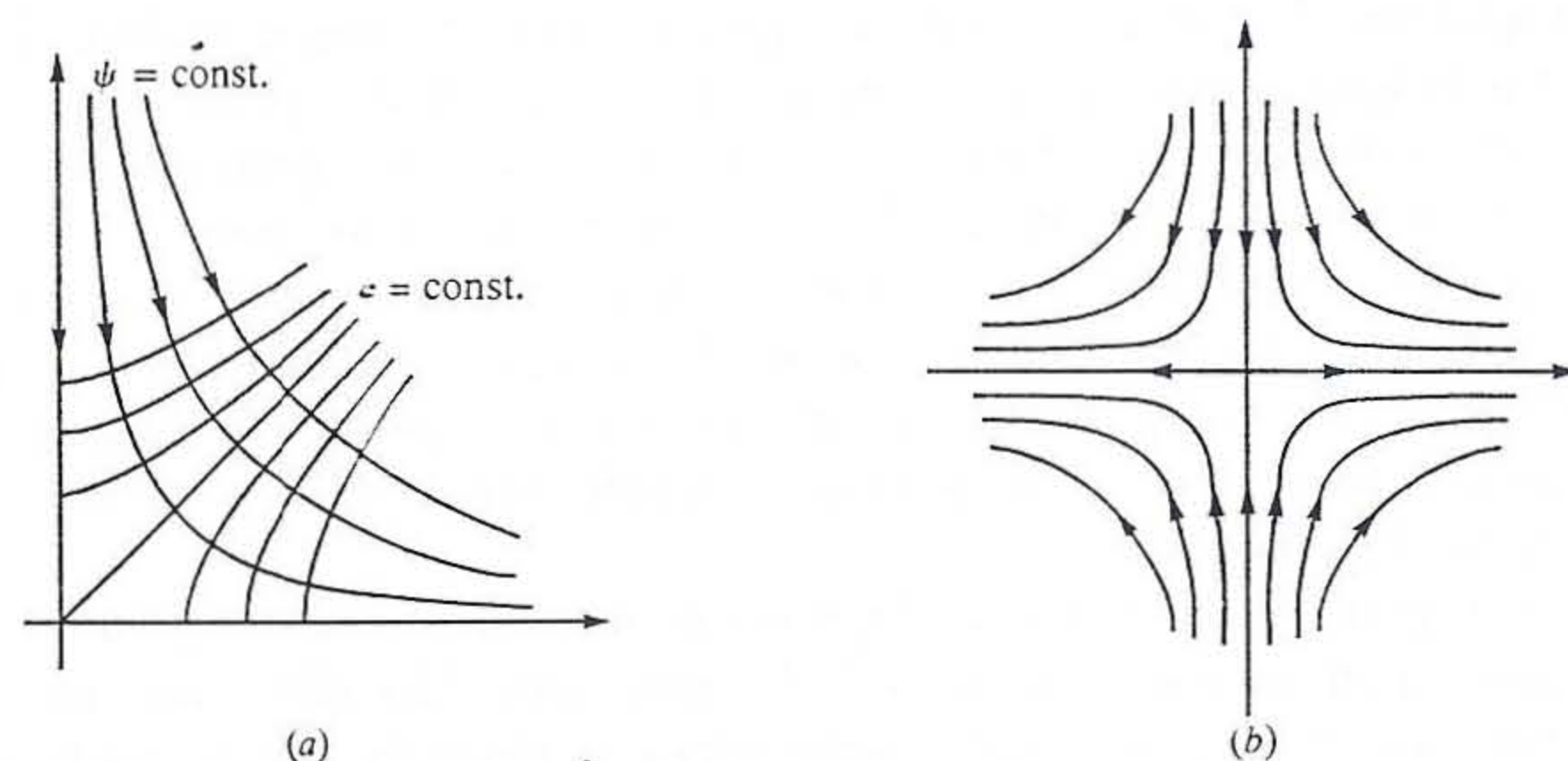


Fig. 7.7

EXERCÍCIOS

1. No Exemplo 2 atrás, prove que uma partícula que se desloca ao longo do eixo Oy tende para a origem sem nunca alcançá-la em tempo finito.
2. Faça um estudo completo do escoamento fluido associado ao potencial $F(z) =iaz^2$, onde $a > 0$, indicando as linhas de corrente, linhas eqüipotenciais, eventuais pontos de estagnação e velocidade. Faça um gráfico. Considere também o caso $a < 0$.
3. Mostre que o campo de velocidades dado por $\mathbf{q} = \alpha(x, 0)$ é irrotacional, mas não solenoidal. Explique por que ele não corresponde, fisicamente, ao escoamento de um fluido incompressível. Faça um gráfico.
4. Mostre que o campo de velocidades dado por $\mathbf{q} = \omega(-y, x)$ é solenoidal, mas não irrotacional. Mostre que ele corresponde a um movimento rígido, como o de um sólido em rotação, com velocidade angular ω em volta da origem. Faça um gráfico.

FONTES, SUMIDOUROS E VÓRTICES

Como vimos atrás, os escoamentos fluidos que estamos considerando são solenoidais. Para estes campos vale a Eq. 7.3, que exprime o fato de que o fluxo do campo de velocidades através de qualquer curva fechada C é zero. Mas isto deve ser entendido no pressuposto de que a curva C e seu interior estejam contidos no domínio de analiticidade do potencial complexo $F(z)$.

Esta função pode ter singularidades e a integral (7.3) pode não ser zero para uma curva C envolvendo singularidades.

Uma singularidade z_0 de $F(z)$ chama-se *fonte* ou *sumidouro*, conforme a integral em (7.3) seja positiva ou negativa, respectivamente, onde C é uma curva fechada simples envolvendo z_0 uma vez no sentido positivo.

Os nomes *fonte* e *sumidouro* correspondem às duas possíveis situações físicas: sendo positivo o fluxo (7.3), isto indica que existe massa saindo efetivamente através de C , o que revela ser z_0 uma “fonte”, onde a massa está sendo criada. Ao contrário, o fluxo sendo negativo, isto indica que a massa está sendo consumida em z_0 , e este ponto age como um “sumidouro” de massa. O valor absoluto desse fluxo é tomado como medida da *intensidade* da fonte ou sumidouro.

Um pouco atrás fizemos a hipótese de escoamentos irrotacionais, para os quais a circulação definida em (7.5), fosse zero. Mas nisto está implícito que a curva fechada C e seu interior estão no domínio de regularidade do movimento. Pode acontecer que parte do interior de C nem seja ocupado pelo fluido, como veremos adiante; ou o interior de C contenha uma ou mais singularidades do potencial complexo. (Veja o Exemplo 7.3 adiante.) Nesses casos a circulação Γ , definida em (7.5) pode não ser zero; ela representa então uma medida do que o escoamento tem de componente “circulatória”. Por isso mesmo uma singularidade z_0 em torno da qual $\Gamma \neq 0$ é chamada *vórtice* de intensidade Γ .

O fluxo e a circulação podem ser calculados, separadamente, efetuando-se as integrações em (7.3) e (7.5), respectivamente. Mas há um jeito mais fácil de se fazer isso, calculando uma única integral complexa. Basta notar que

$$\begin{aligned} \oint_C F'(z) dz &= \oint_C (u - iv)(dx + idy) \\ &= \oint_C u dx + v dy + i \oint_C u dy - v dx. \end{aligned}$$

Mas, pelo que vimos atrás, estas duas últimas integrais são, respectivamente, a circulação Γ e o fluxo Q do campo de velocidades relativos à curva C :

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{q} \cdot t ds \quad \text{e} \quad Q = \oint_C \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds. \quad (7.9)$$

Portanto,

$$\oint_C F'(z) dz = \Gamma + iQ$$

Observe que esta última integral é a própria variação de $F(z)$ em volta de C de forma que podemos escrever:

$$\Gamma + iQ = \oint_C F'(z) dz = [F(z)]_C. \quad (7.10)$$

7.3. Exemplo. O potencial complexo

$$F(z) = \frac{\kappa}{2\pi i} \log z$$

tem uma singularidade em $z = 0$, mais precisamente um *ponto de ramificação*. Sendo C qualquer curva fechada simples com $z = 0$ em seu interior, sabemos que $[\log z]_C = 2\pi i$. Daqui e de (7.10) segue-se que $z = 0$ é um vórtice de intensidade $\Gamma = \kappa$ e $Q = 0$.

Para visualizarmos o escoamento, introduzimos coordenadas polares, pondo $z = re^{i\theta}$:

$$F(z) = \frac{\kappa}{2\pi i} (\log r + i\theta),$$

de sorte que

$$\phi = \frac{\kappa\theta}{2\pi} \quad \text{e} \quad \psi = \frac{-\kappa \log r}{2\pi}.$$

Vemos assim que as linhas de corrente $\psi = \text{const.}$ são os círculos centrados na origem, $r = \text{const.}$; e as linhas eqüipotenciais $\phi = \text{const.}$ são os raios pela origem, $\theta = \text{const.}$ (Fig. 7.8).

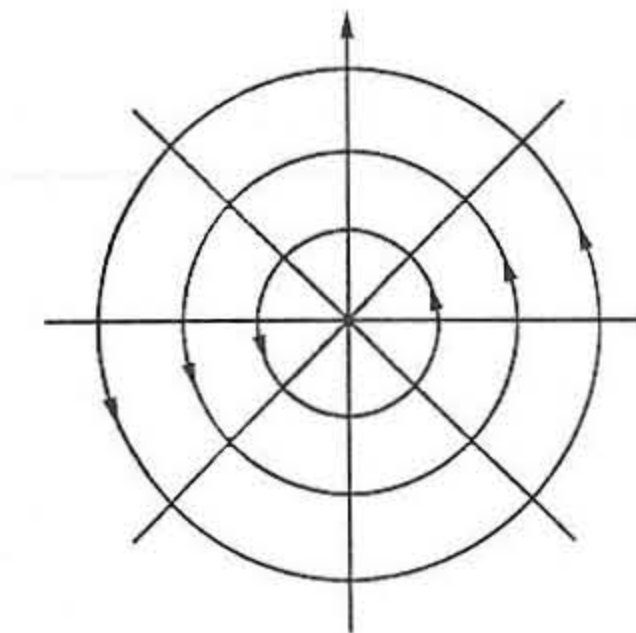


Fig. 7.8

A velocidade complexa é dada por

$$F'(z) = \frac{-i\kappa}{2\pi z} = \frac{-i\kappa \bar{z}}{2\pi r^2} = \frac{-\kappa(y + ix)}{2\pi r^2};$$

logo,

$$u = \frac{-\kappa y}{2\pi r^2} \quad \text{e} \quad v = \frac{\kappa x}{2\pi r^2}.$$

A velocidade num ponto $z_0 = re^{i\theta}$ é tangente ao círculo $r = \text{const.}$ e tem módulo $|\mathbf{q}| = \kappa/2\pi r$; ela está dirigida no sentido anti-horário se $\kappa > 0$ e no sentido horário se $\kappa < 0$. Observe que a intensidade da velocidade,

$$|\mathbf{q}| = |F'(z)| = \frac{\kappa}{2\pi r},$$

cai como $1/r$ com o crescer de r . (Compare este fato com o análogo do movimento rígido do Exerc. 4 atrás.) Este é o chamado escoamento de *rotação pura*.

7.4. Exemplo. Vamos estudar o escoamento fluido associado ao potencial complexo

$$F(z) = Vz + \frac{\kappa}{2\pi i} \log z, \tag{7.11}$$

onde $V > 0$ e $\kappa < 0$. Como se vê, este potencial é a superposição dos potenciais correspondentes a um escoamento paralelo e a uma rotação pura.

O escoamento tem um ponto de estagnação em $z_0 = i\kappa/2\pi V$, pois

$$F'(z) = V - \frac{i\kappa}{2\pi z} = V \left(1 - \frac{z_0}{z} \right) \tag{7.12}$$

Analisemos o comportamento desta função nas proximidades de $z = z_0$. Como

$$\frac{z_0}{z} = \frac{z_0}{(z - z_0) + z_0} = \frac{1}{1 - (z_0 - z)/z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z_0 - z}{z_0} \right)^n,$$

segue-se que

$$F'(z) = \frac{V(z - z_0)}{z_0} + O[(z - z_0)^2] = \frac{2\pi V^2}{i\kappa} (z - z_0) + O[(z - z_0)^2].$$

Vemos assim que, nas proximidades do ponto de estagnação $z = z_0$, o escoamento aproxima-se daquele correspondente ao potencial complexo

$$F_0(z) = \frac{i\pi V^2}{-\kappa} (z - z_0)^2.$$

Ora, este é do tipo estudado no Exerc. 2 atrás, onde a constante a deve ser tomada igual a $-\pi V^2/\kappa > 0$ e substituir z por $z - z_0$. Isto nos permite construir o gráfico das linhas de corrente do potencial (7.11) localmente nas proximidades do ponto $z = z_0$ (Fig. 7.9).

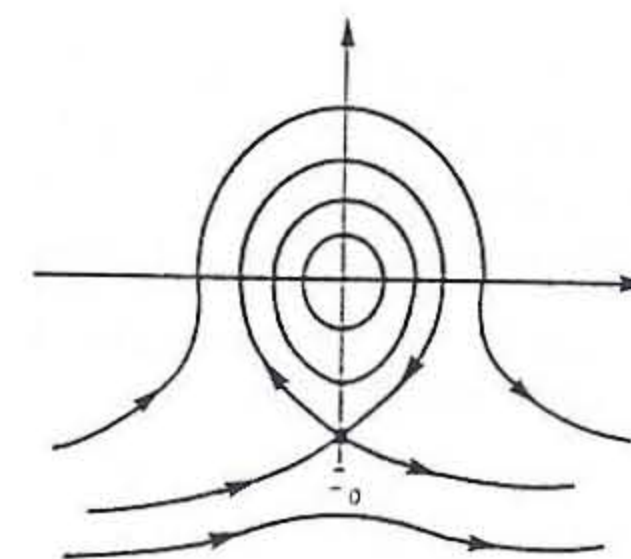


Fig. 7.9

Voltando à Eq. 7.12, vemos que o escoamento apresenta um vórtice na origem, em cujas proximidades ele se aproxima de uma rotação pura, no sentido anti-horário, pois $\kappa < 0$. Daí o aspecto das linhas de corrente nas proximidades da origem, como ilustra a Fig. 7.9.

Observemos agora que

$$F'(z) \rightarrow V \quad \text{com} \quad z \rightarrow \infty,$$

como vemos por (7.12). Isto significa que o escoamento se aproxima de um escoamento paralelo no infinito, com velocidade V , ao longo do eixo dos x . Finalmente notamos que

$$F(z) = \left(Vx + \frac{\kappa\theta}{2\pi} \right) - i \left(Vy - \frac{\kappa}{2\pi} \log r \right),$$

de sorte que

$$\psi = Vy - \frac{\kappa}{2\pi} \log r.$$

Ora, esta função é par na variável x :

$$\psi(-x, y) = \psi(x, y).$$

Isto significa que as linhas de corrente são curvas simétricas em relação ao eixo Oy , como ilustra a Fig. 7.9.

EXERCÍCIOS

- No Exemplo 7.3 atrás, calcule Γ e Q diretamente de (7.9), onde C é uma curva fechada simples, positivamente orientada e que: i) não envolve a origem; ii) envolve a origem.
- Estude o escoamento correspondente ao potencial complexo

$$F(z) = \frac{q}{2\pi} \log z, \quad q \text{ real}$$

Mostre que a origem é uma fonte de intensidade q (fonte genuína se $q > 0$, sumidouro se $q < 0$); que o escoamento não tem vórtices: que a velocidade é radial e comporta-se como $1/r$. Dê uma interpretação física a este fato, explicando por que, fisicamente, a velocidade não poderia variar como $\log r$ ou $1/r^\alpha$ com $\alpha \neq 1$.

- Estude o escoamento resultante da superposição de uma rotação pura [$F(z) = (q/2\pi i) \log z$] com o escoamento radial do exercício anterior, isto é, com potencial

$$F(z) = \frac{q}{2\pi} \log z - \frac{q}{2\pi i} \log z$$

Mostre que agora a origem é fonte e vórtice ao mesmo tempo, ambos com a mesma intensidade q . Mostre que as linhas de corrente são espirais logarítmicas centradas na origem (o que justifica a designação de *vórtice espiralado* que se dá a tal tipo de singularidade).

- Em continuação ao exercício anterior, estude o escoamento resultante do potencial

$$F(z) = \frac{q}{2\pi} \log z - \frac{\kappa}{2\pi i} \log z$$

sob as várias hipóteses de q e κ serem positivos ou negativos.

- Estude o escoamento correspondente ao potencial $F(z) = a/z$, $a > 0$. Mostre que ele não possui fontes ou vórtices. Faça um gráfico das linhas de corrente e das linhas equipotenciais. Estude a variação da velocidade ao longo de uma linha de corrente. Considere também o caso $a < 0$ e o caso $a = ib$ com b real.

- Estude o escoamento resultante do potencial

$$F(z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \log \frac{z+\varepsilon}{z-\varepsilon} = \frac{q}{2\pi} \frac{\log(z+\varepsilon) - \log(z-\varepsilon)}{2\varepsilon},$$

onde q e ε são positivos. Mostre que este escoamento possui uma fonte em $z = -\varepsilon$ e um sumidouro em $z = \varepsilon$, ambos de mesma intensidade. Observe que, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, o potencial aqui considerado tende ao potencial do exercício anterior com $a = q/2\pi$. Por causa disto o escoamento do exercício anterior é chamado de "doublet".

- Esboce as linhas de corrente e linhas equipotenciais do escoamento associado ao potencial

$$F(z) = \frac{\kappa}{2\pi i} \log \frac{z-z_1}{z-z_2}$$

Mostre que z_1 e z_2 são vórtices de intensidades κ e $-\kappa$ respectivamente.

- Estude os casos não considerados no Exemplo 7.4: $V > 0$ e $\kappa > 0$, $V < 0$ e $\kappa < 0$, $V < 0$ e $\kappa > 0$.
- Estude o escoamento associado ao potencial $F(z) = Vz + a \log z$, com $V > 0$ e $a > 0$, descrevendo o gráfico das linhas de corrente, velocidade, pontos de estagnação, etc.

ESCOAMENTO EM VOLTA DE UM CILINDRO CIRCULAR

O problema que vamos resolver agora é o de achar o potencial complexo de um escoamento fluido em volta de um cilindro circular de raio R , colocado perpendicularmente ao plano xy . Fisicamente, a situação corresponde a perturbar um escoamento paralelo, com a introdução do cilindro. O resultado será um escoamento com linhas de corrente que se aproximam de retas paralelas, tanto mais quanto mais nos afastarmos do cilindro. A velocidade do fluido também será tanto mais próxima da velocidade da corrente não-perturbada quanto mais longe do cilindro estiver o ponto considerado.

Suponhamos o cilindro centrado na origem, de forma que o movimento se passa no domínio $|z| > R$. Seja $w_\infty = u_\infty - iv_\infty$ o valor da velocidade complexa do escoamento não-perturbado. Com a inserção do cilindro vamos obter um escoamento regido por um potencial complexo $F(z)$ tal que a velocidade $F'(z)$ deverá ser uma função regular no domínio $|z| > R$, aproximando o valor $V > 0$ com $|z| \rightarrow \infty$. Então o desenvolvimento de Laurent de $F'(z)$ referente à origem deverá assumir a forma

$$F'(z) = V + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots, \quad |z| > R.$$

Portanto, a menos de uma constante aditiva (irrelevante na obtenção da velocidade, das linhas de corrente e das linhas equipotenciais), devemos ter:

$$F(z) = Vz + c_1 \log z - \frac{c_2}{z} - \frac{c_3}{2z^2} - \dots \quad (7.13)$$

Introduzindo coordenadas polares, pondo também

$$c_j = a_j + ib_j, \quad j = 1, 2, \dots,$$

teremos:

$$F(z) = Vre^{i\theta} + (a_1 + ib_1)(\log r + i\theta) - \frac{a_2 + ib_2}{r}e^{-i\theta} - \frac{a_3 - ib_3}{2r^2}e^{-2i\theta} - \dots$$

As funções φ e ψ podem agora ser obtidas facilmente. Esta última, em particular, sendo a parte imaginária de $F(z)$, é dada por:

$$\psi = Vr \sin \theta + a_1 \theta + b_1 \log r + \frac{a_2 \sin \theta - b_2 \cos \theta}{r} + \frac{a_3 \sin 2\theta - b_3 \cos 2\theta}{2r^2} + \dots$$

ou ainda,

$$\psi = a_1 \theta + b_1 \log r + \frac{a_2 + Vr^2}{r} \sin \theta - \frac{b_2}{r} \cos \theta + \frac{a_3}{2r^2} \sin 2\theta - \frac{b_3}{2r^2} \cos 2\theta + \dots$$

Observamos agora que o contorno do cilindro $r = R$ deve ser uma linha de corrente, logo $\psi = \text{const.}$ se $r = R$. Isto ocorrerá se tomarmos

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -VR^2, \quad b_2 = 0 \quad \text{e} \quad c_3 = c_4 = \dots = 0.$$

Com isto o potencial complexo passa a ser

$$F(z) = Vz + ib_1 \log z + \frac{R^2 V}{z}$$

onde b_1 é uma constante real.

A presença do logaritmo em $F(z)$ indica que o escoamento correspondente a esse potencial pode ter circulação. Sendo C uma curva orientada que envolva o cilindro $|z| = R$ uma vez no sentido anti-horário, teremos:

$$\oint_C F'(z) dz = [F(z)]_C = ib_1 [\log z]_C = -2\pi b_1.$$

Daqui e de (7.10) concluímos que o fluxo Q é zero e que a circulação tem intensidade $\kappa = 2\pi b_1$. É mais apropriado escrever $F(z)$ em termos deste parâmetro κ , da velocidade V no infinito e do raio R do cilindro:

$$F(z) = Vz + \frac{\kappa}{2\pi i} \log z + \frac{R^2 V}{z} \quad (7.14)$$

O caso em que $\kappa = 0$, isto é, sem circulação, é mais simples e fica para ser analisado pelo leitor como exercício. Vamos tratar o caso $\kappa < 0$, procurando

os possíveis pontos de estagnação. Para isso devemos achar os valores z que anulam a velocidade complexa $F'(z)$. Como

$$F'(z) = V + \frac{\kappa}{2\pi iz} - \frac{R^2 V}{z^2}$$

a equação $F'(z) = 0$ se escreve:

$$z^2 - \frac{i\kappa}{2\pi V} z - R^2 = 0,$$

cujas raízes são:

$$z_{\pm} = \frac{i\kappa}{4\pi V} \pm \sqrt{R^2 - (\kappa/4\pi V)^2} \quad (7.15)$$

O caso mais simples é aquele em que não há circulação: $\kappa = 0$ e os pontos de estagnação estão em $z = \pm R$ (Exerc. 1 adiante). Se $\kappa \neq 0$, temos três casos a considerar:

1º caso: $\kappa < -4\pi VR$. Então as duas raízes em (7.15) são distintas e imaginárias. Como seu produto é $-R^2$, somente uma delas estará no domínio do fluido, $|z| > R$. Neste caso o escoamento tem o aspecto indicado na Fig. 7.10.

2º caso: $\kappa = -4\pi VR$. Agora as raízes em (7.15) são coincidentes e seu valor comum é $z = iR$. O escoamento está ilustrado na Fig. 7.11.

3º caso: $-4\pi VR < \kappa < 0$. Neste caso as duas raízes estão simetricamente dispostas em relação ao eixo Oy , portanto seus módulos são iguais a R . Temos assim dois pontos de estagnação sobre o cilindro $|z| = R$ e o escoamento apresenta o aspecto ilustrado na Fig. 7.12.

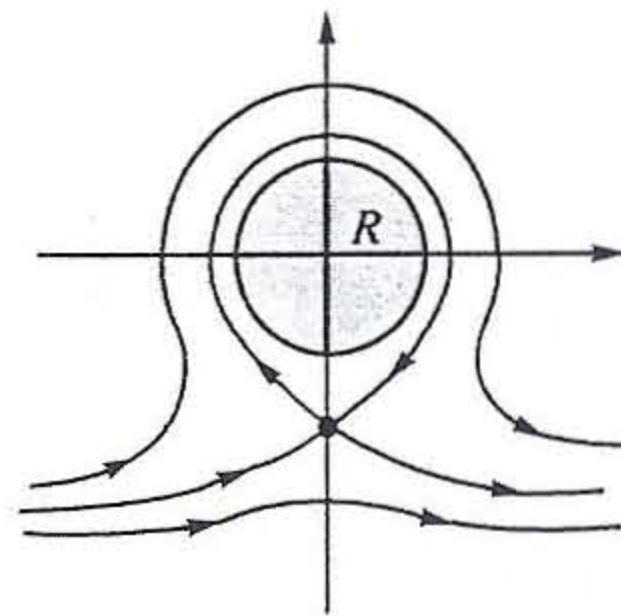


Fig. 7.10

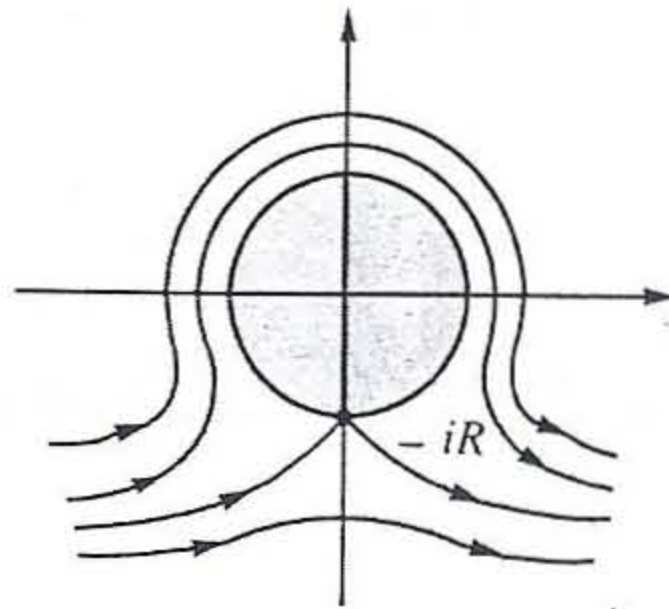


Fig. 7.11

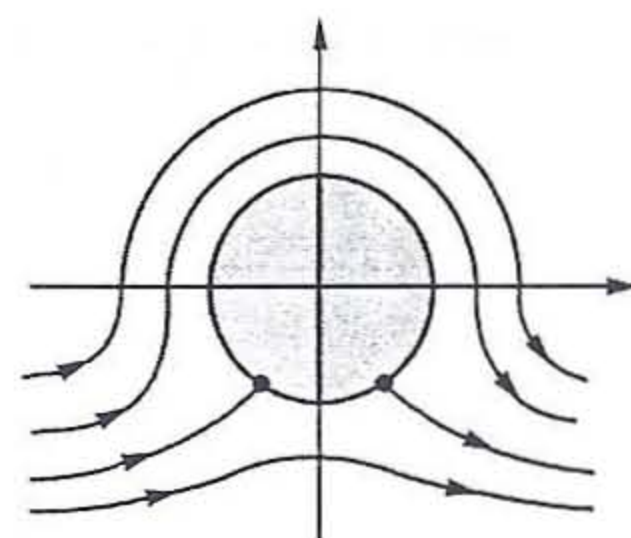


Fig. 7.12

EXERCÍCIOS

1. Discuta o escoamento resultante do potencial (7.14) com $\kappa = 0$. Analise a situação não somente no domínio exterior ao cilindro, mas também em $|z| < R$. Observe que nas proximidades de $z = 0$ o escoamento se aproxima daquele correspondente a um doublet (Exerc. 5 atrás). A Fig. 7.13 ilustra as linhas de corrente externamente ao cilindro.
2. Discuta o Exemplo (7.14) no caso $V > 0$ e $\kappa > 0$.
3. Considere o escoamento em volta de um cilindro circular de raio R , cuja velocidade complexa no infinito seja agora $w_\infty = Ve^{-i\alpha}$ e não V . Isto significa que a velocidade vetorial no infinito será o vetor $\mathbf{q}_\infty = V(\cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j})$, de módulo V , fazendo um ângulo α com o eixo Ox . Mostre que esse escoamento é dado pelo potencial complexo

$$F(z) = w_\infty z + \frac{\kappa}{2\pi i} \log z + \frac{R^2 w_\infty}{z}. \tag{7.16}$$

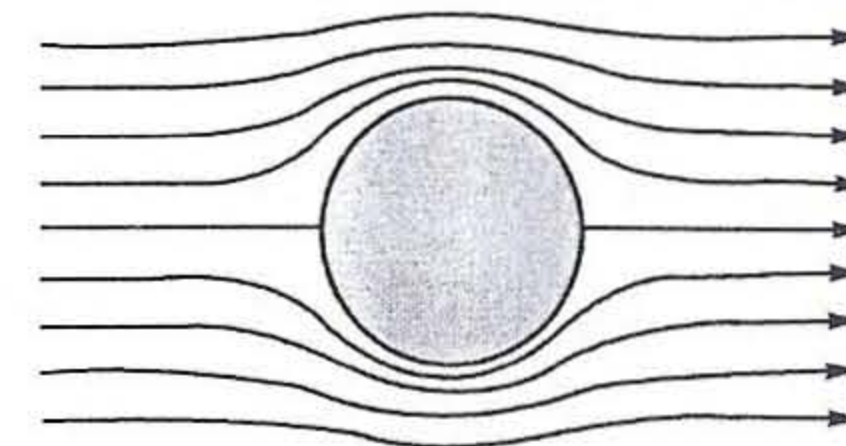


Fig. 7.13

ESCOAMENTO EM VOLTA DE UM CILINDRO QUALQUER

Na seção anterior a hipótese de que o cilindro fosse circular levou à determinação dos coeficientes em (7.13) e à obtenção do potencial (7.14). No caso de um cilindro qualquer, esse método já não é aplicável, e a determinação do potencial complexo tem de ser feita de outra maneira.

Todavia, mesmo com a forma genérica (7.13), podemos calcular a circulação e provar que o coeficiente c_1 deve ser um número imaginário. De fato, sendo C uma curva fechada simples envolvendo o perfil do cilindro no sentido positivo, de (7.13) obtemos:

$$[F(z)]_C = 2\pi i c_1.$$

Daqui e de (7.10), concluímos que

$$\Gamma = -2\pi \operatorname{Im} c_1 \quad \text{e} \quad Q = 2\pi \operatorname{Re} c_1.$$

Estas relações nos mostram que o número c_1 deve ser imaginário para que o fluxo Q seja nulo. Portanto, se κ é o valor da circulação, então $c_1 = \kappa/2\pi i$ e o potencial tem a seguinte forma:

$$F(z) = Vz + \frac{\kappa}{2\pi i} \log z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)z^{n-1}}. \quad (7.17)$$

esta última série sendo convergente para $|z| > R$, onde $|z| \leq R$ é qualquer disco que contenha o perfil do cilindro.

Resta esclarecer por que o fluxo Q é zero. Para isto basta lembrar que o perfil do cilindro é uma linha de corrente; logo, através dela, $Q = 0$. Como a integral de $F'(z)$ ao longo dessa curva tem o mesmo valor imaginário se efetuada ao longo de qualquer outra curva que o envolva, segue-se que $Q = 0$ através de qualquer dessas curvas.

A DINÂMICA DO MOVIMENTO

Até agora temos discutido escoamentos fluidos somente do ponto de vista cinemático, sem qualquer preocupação com as forças envolvidas. Vamos cuidar disto agora, analisando a força que se origina da pressão p .

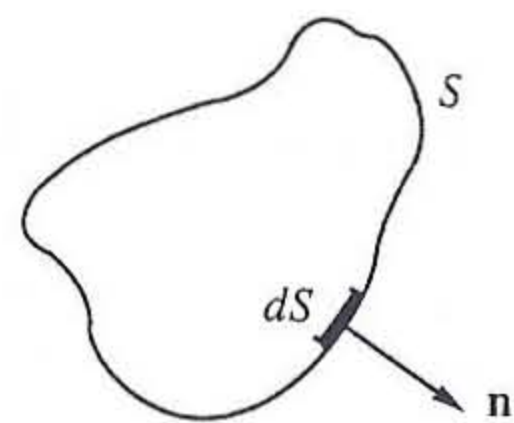


Fig. 7.14

Dada uma superfície fechada S , seja \mathbf{n} o vetor normal unitário externo, isto é, dirigido para fora de S (Fig. 7.14). Então, num elemento de superfície dS , a força de pressão que o fluido no interior de S exerce sobre o exterior é $(pds)\mathbf{n}$, enquanto que $-(pds)\mathbf{n}$ é a força, de fora para dentro, no mesmo

elemento de superfície dS . Em conseqüência, a força de pressão resultante, que o fluido exterior a S exerce sobre esta superfície, é dada por

$$-\iint_S p\mathbf{n} dS.$$

No caso bidimensional a que estamos restritos, S é uma superfície cilíndrica de altura unitária, levantada sobre uma curva fechada C , como na p. 205 (veja a Fig. 7.1). Então, $dS = 1 \cdot ds$, onde ds é o elemento de arco ao longo de C , e a integral anterior passa a ser

$$-\int_C p\mathbf{n} ds = -\int p(n_x, n_y) ds.$$

\mathbf{n} é agora a normal externa referente ao contorno C .

Vamos transformá-la em uma integral dupla sobre a região R , interior a C . Para isto basta notar que ([2], Seç. 6.5)

$$\int_C p n_x ds = \iint_R \frac{\partial p}{\partial x} dx dy \quad \text{e} \quad \int_C p n_y ds = \iint_R \frac{\partial p}{\partial y} dx dy;$$

portanto, a força sobre C devido à pressão externa, é dada por:

$$-\iint_S p\mathbf{n} ds = -\iint_R \nabla p dx dy.$$

Como se vê, a expressão $-\nabla p$ tem o significado de *força por unidade de volume*, pois produz a força resultante sobre R quando integrada sobre esta região (ou melhor, sobre uma região cilíndrica, correspondente à superfície cilíndrica S referida acima).

Vamos, em seguida, obter a *equação de conservação do momento linear*, correspondente à segunda lei de Newton (força = massa \times aceleração). Uma dedução dessa equação, numa situação geral, está feita em [A3], Seç. 7.2.2, Exemplo 3. Faremos aqui uma dedução apropriada às hipóteses em que estamos trabalhando.

Começamos por observar que ρ é a massa por unidade de volume e $-\nabla p$ a força de pressão, também por unidade de volume. Então, desprezando quaisquer outras forças, a equação

$$\rho \frac{d\mathbf{q}}{dt} = -\nabla p \quad (7.18)$$

exprime a segunda lei de Newton, pois $d\mathbf{q}/dt$ é a aceleração. Notando que

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(x, y) = (u(x, y), v(x, y)),$$

e usando também a Eq. 7.6, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{q}}{dt} &= \left(u_x \frac{dx}{dt} + u_y \frac{dy}{dt}, v_x \frac{dx}{dt} + v_y \frac{dy}{dt} \right) \\ &= (uu_x + vv_x, uu_y + vv_y). \end{aligned}$$

Com isto, a Eq. 7.18 se desdobra nas seguintes equações escalares:

$$\rho(uu_x + vv_x) = -p_x \quad \text{e} \quad \rho(uu_y + vv_y) = -p_y. \quad (7.19)$$

Destas equações obtemos facilmente uma importante equação, devida a Daniel Bernoulli. Para obtê-la, basta notar que as equações (7.19) significam que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho(u^2 + v^2)}{2} + p \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho(u^2 + v^2)}{2} + p \right) = 0.$$

Concluimos, pois, que

$$\frac{\rho q^2}{2} + p = A, \quad (7.20)$$

onde $q^2 = u^2 + v^2$ e A é uma constante. É esta a anunciada *equação de Bernoulli*.

Na seção seguinte usaremos a Eq. 7.20 para deduzir a célebre fórmula de Kutta e Joukovski, que permite calcular a força que um fluido em movimento exerce sobre um corpo nele imerso. Um caso típico dessa força é a chamada *força de levantamento*, responsável pela sustentação do voo de um avião.

Mesmo sem fazer qualquer cálculo, mas apenas com um simples exame da Eq. 7.20, podemos compreender o surgimento dessa força. Como preliminar a esse exame, notemos que o movimento uniforme de um avião na atmosfera é dinamicamente equivalente ao movimento contrário da atmosfera, com o avião parado. Isto resulta da observação do fenômeno de um referencial fixado no avião. (Aliás, é essa equivalência — consequência do princípio da relatividade da Mecânica Clássica — que permite o estudo do voo em túneis de vento, ou túneis aerodinâmicos.)

Consideremos, pois, uma asa de avião representada pelo seu perfil no plano xy (Fig. 7.15) e imaginemos um escoamento fluido com pontos de

estagnação em P e Q no referido perfil. O escoamento começa com velocidade V no infinito à esquerda, bifurca-se em P , voltando a reunificar-se em Q , para, finalmente, reassumir a velocidade V no infinito à direita. Invocamos agora a Eq. 7.20. Ela nos diz que a velocidade aumenta quando a pressão diminui e diminui se a pressão aumenta. Portanto, se os pontos de estagnação forem tais que o arco superior PAQ seja mais longo que o arco inferior PBQ , a velocidade do fluido ao longo do primeiro desses arcos terá de ser maior que a velocidade ao longo do segundo arco, pois as partículas que se bifurcam simultaneamente em P devem chegar no mesmo instante em Q . Assim, a pressão será maior na parte de baixo da asa do que na parte de cima, e, conseqüentemente, as forças de pressão terão uma resultante dirigida de baixo para cima, que é a força de levantamento ou sustentação.

Evidentemente, para se conseguir esse resultado é necessário produzir o escoamento descrito acima, com os pontos de estagnação P e Q convenientemente posicionados. Como conseguir isto é uma questão à parte, sobre a qual voltaremos a comentar mais adiante.

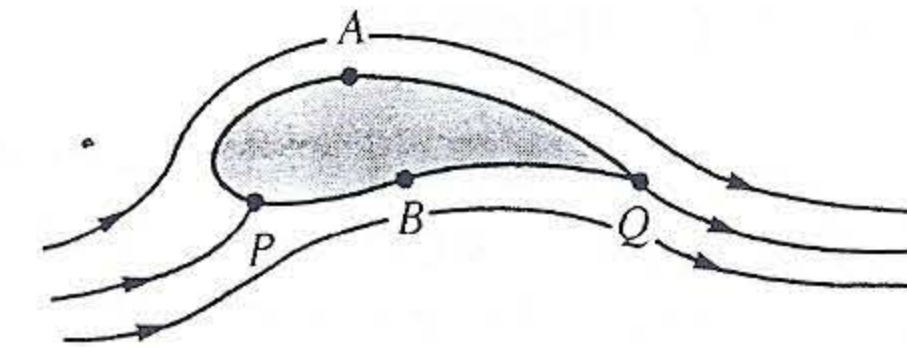


Fig. 7.15

Força sobre um cilindro e fórmula de Blasius

Calcularemos agora a resultante das forças de pressão sobre um cilindro de seção transversal arbitrária, imerso num fluido de escoamento dado por (7.17). Seja C o perfil do cilindro no plano xy , $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ sua normal externa e ds o elemento de arco sobre C . Então, pelo que vimos na seção anterior, essa resultante de forças será dada por

$$\mathbf{f} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} = - \int_C p\mathbf{n} ds.$$

Introduzindo a forma complexa $f = X - iY$, e levando em conta que

$$n_x ds = dy \quad \text{e} \quad n_y ds = -dx,$$

a expressão anterior é equivalente a

$$\begin{aligned} f &= X - iY = \int_C -p(n_x - in_y) ds = - \int_C p(dy + idx) \\ &= -i \int_C p(dx - idy) = -i \int_C p d\bar{z} \end{aligned}$$

Em seguida utilizamos a Eq. 7.20 para eliminar p . Notando que $q^2 = w\bar{w}$, onde $w = w(z) = F'(z)$ é a velocidade complexa, obtemos:

$$f = X - iY = \frac{i\rho}{2} \int_C \left(w\bar{w} + \frac{2A}{\rho} \right) d\bar{z}.$$

Ora, $2A/\rho$ é constante e a integral de $d\bar{z}$ é zero, como se verifica facilmente; logo,

$$\begin{aligned} f &= X - iY = \frac{i\rho}{2} \int_C w\bar{w} d\bar{z} \\ &= \frac{i\rho}{2} \int_C [w^2 dz + w(\bar{w} d\bar{z} - w dz)]. \end{aligned}$$

Como $w = u - iv$, temos:

$$\begin{aligned} \bar{w} d\bar{z} - w dz &= 2i \operatorname{Im}(\bar{w} d\bar{z}) \\ &= 2i \operatorname{Im}[(u + iv)(dx - idy)] \\ &= -2i(-udy + vdx) \\ &= -2i(un_x + vn_y) ds = -2i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) ds. \end{aligned}$$

Notamos agora que $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$ sobre o contorno C , pois este é uma linha de corrente. Em conseqüência, a força complexa assume a seguinte forma simples, conhecida como *fórmula de Blasius*:

$$f = X - iY = \frac{i\rho}{2} \int_C w(z)^2 dz. \quad (7.21)$$

Fórmula de Kutta-Joukowski

Em seguida usaremos esta fórmula para obter f em termos de V , κ e ρ . Notamos primeiramente, que, sendo $w(z)$ regular e univalente no exterior de C , este contorno pode ser substituído por um círculo $|z| = R$ que contenha C em seu interior, sem que isto modifique o valor da integral em (7.21). Esta substituição nos permite utilizar o desenvolvimento (7.17) para obter $w(z) = F'(z)$. Com esse procedimento a expressão da força em (7.21) assume a forma

$$\begin{aligned} f = X - iY &= \frac{i\rho}{2} \int_{|z|=R} \left(V + \frac{\kappa}{2\pi iz} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \dots \right)^2 dz \\ &= \frac{i\rho}{2} \int_{|z|=R} \left(V^2 + \frac{V\kappa}{\pi iz} + \dots \right) dz, \end{aligned}$$

onde os pontos substituem termos em z^{-2} , z^{-3} , ... Ora, as integrais destes termos são todas nulas, bem assim a integral de V^2 . Então, fica apenas o termo em $1/z$ a ser integrado, o que nos dá:

$$f = X - iY = V\kappa\rho i.$$

Esta expressão nos diz que a força só tem componente vertical,

$$Y = -V\kappa\rho,$$

e estará dirigida para cima se a circulação κ for negativa, e para baixo se $\kappa > 0$. Na verdade, pelo que dissemos na p. 227, estamos lidando apenas com a força por superfície cilíndrica de comprimento unitário na direção perpendicular ao plano xy . A força numa superfície cilíndrica de comprimento L é dada por

$$Y = -V\kappa\rho L.$$

Mais geralmente, suponhamos que a velocidade complexa no infinito seja $w_\infty = Ve^{-i\alpha}$ e não V . Então, como no Exerc. 3 atrás, é fácil verificar que o potencial complexo adequado a este caso é o mesmo de (7.17), com w_∞ em lugar de V , isto é,

$$F(z) = w_\infty z + \frac{\kappa}{2\pi i} \log z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)z^{n-1}}. \quad (7.22)$$

A expressão da força, por sua vez, passa a ser

$$f = X - iY = Ve^{-i\alpha} \kappa \rho L i = ie^{-i\alpha} (V \kappa \rho L).$$

Portanto,

$$\bar{f} = X + iY = -ie^{i\alpha} (V \kappa \rho L), \tag{7.23}$$

o que significa que a força $\mathbf{f} = Xi + Yj$ é perpendicular à velocidade \mathbf{q}_∞ no infinito (Fig. 7.16). Além disso, a direção de \mathbf{f} é obtida por rotação da velocidade de um ângulo de 90° , no sentido positivo se $\kappa < 0$ e no sentido negativo se $\kappa > 0$.

A expressão (7.23) da força é conhecida como *fórmula de Kutta-Joukowski*, obtida independentemente por W. Kutta em 1902 e por N. Joukowski em 1906. O ângulo α , que supomos estar compreendido entre zero e 90° , é chamado *ângulo de ataque*.

A análise feita até aqui deixa em aberto várias questões, dentre elas a determinação do potencial complexo (7.22) e do perfil da asa que sofre ação da força (7.23). Estas questões serão resolvidas adiante, para o que temos de estudar algumas transformações especiais nas seções seguintes.

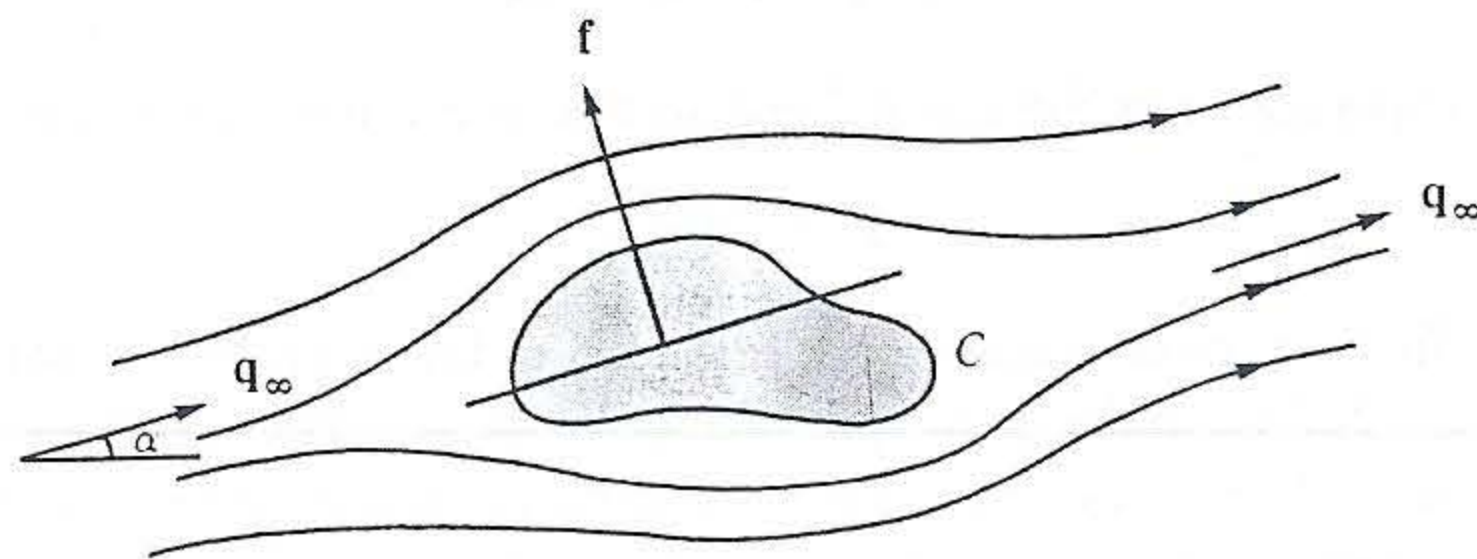


Fig. 7.16

A transformação de Möbius

O objetivo desta seção é provar que toda função do tipo

$$w = \frac{az + b}{cz + d},$$

chamada *transformação de Möbius*, tem a propriedade de levar qualquer reta numa reta ou círculo e também qualquer círculo numa reta ou círculo.

Posto de maneira mais sucinta, ela transforma retas e círculos em retas e/ou círculos.

A transformação de Möbius é também chamada *transformação fracionária linear*, por ser o quociente de dois polinômios do primeiro grau.

Começemos com o caso particular em que $a = d = 0$ e $b = c = 1$, isto é, com a transformação $w = 1/z$.

A equação de uma reta ou círculo é

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0 \tag{7.24}$$

Trata-se de uma reta se $a = 0$ e pelo menos um dos números b ou c é diferente de zero; trata-se de um círculo se $a \neq 0$ e $b^2 + c^2 - 4ad > 0$.

Com a notação usual $z = x + iy$, $w = u + iv$, e lembrando que $w = 1/z$, portanto, $z = 1/w$, a Eq. 7.24 se escreve, sucessivamente:

$$az\bar{z} + b\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) + c\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + d = 0;$$

$$\frac{a}{w\bar{w}} + \frac{b}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}}\right) + \frac{c}{2i}\left(\frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}}\right) + d = 0;$$

$$a + \frac{b}{2}(w + \bar{w}) - \frac{c}{2i}(w - \bar{w}) + dw\bar{w} = 0;$$

$$d(u^2 + v^2) + bu - cv + a = 0. \tag{7.25}$$

Ora, se (7.24) representa uma reta, teremos $a = 0$, $b \neq 0$ ou $c \neq 0$; e (7.25) representará uma reta (pela origem) se $d = 0$, e um círculo (também pela origem) se $d \neq 0$. Se (7.24) representa um círculo, então $a \neq 0$ e $b^2 + c^2 - 4ad > 0$; portanto, (7.25) representará uma reta se $d = 0$ e um círculo se $d \neq 0$. Isto completa a demonstração da propriedade já mencionada e aqui enunciada em destaque:

A função $w = 1/z$ transforma qualquer reta e qualquer círculo numa reta ou num círculo.

Vamos estabelecer esta mesma propriedade para a transformação geral

$$w = \frac{az + b}{cz + d}. \tag{7.26}$$

Se $c = 0$, teremos $w = \frac{a}{d}z + b$, e esta transformação leva retas em retas e círculos em círculos (Exercs. 1 a 3 adiante). Se $c \neq 0$, podemos escrever:

$$w = \frac{a(cz + d) + bc - ad}{c(cz + d)} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cz + d}$$

Escrita nesta forma, visível que a transformação (7.26) é a composição de três transformações, L_1 , L_2 , L_3 :

$$w = L_3 L_2 L_1(z),$$

onde

$$L_1 : z \mapsto z_1 = cz + d;$$

$$L_2 : z_1 \mapsto z_2 = 1/z_1;$$

$$L_3 : z_2 \mapsto w = \alpha z_2 + \beta,$$

sendo $\alpha = (bc - ad)/c$ e $\beta = a/c$. Ora, como já vimos, cada uma das transformações L_1 , L_2 , L_3 , tem a propriedade de levar retas e círculos em retas e/ou círculos. Em conseqüência, o mesmo é verdade da transformação $L_3 L_2 L_1$, ou seja, da transformação (7.26).

EXERCÍCIOS

1. Prove que a transformação $w = z + b$ leva círculos em círculos.
2. Prove que a transformação $w = az$ leva círculos em círculos.
3. Prove que a transformação $w = az - b$ leva retas em retas e círculos em círculos.
4. Verifique que a transformação $w = 1/z$ leva: a) reta pela origem em reta pela origem; b) reta que não passa pela origem em círculo pela origem; c) círculo pela origem em reta que não passa pela origem; e) círculo que não passa pela origem em círculo que não passa pela origem.
5. Prove que a composta de duas transformações de Möbius é novamente uma transformação de Möbius.
6. Prove que a composição de transformações de Möbius é associativa, isto é, $A(BC) = (AB)C$, quaisquer que sejam as transformações de Möbius A , B e C .
7. Mostre que a transformação $w = z^2$ leva qualquer reta pela origem num raio com início na origem; e que $w = z^3$ leva retas pela origem em retas pela origem. Generalize para $w = z^n$, n inteiro positivo.

SUGESTÕES

5. Para lidar com o produto de transformações é conveniente introduzir a notação

$$z = z_1/z_2, \quad w = w_1/w_2, \quad w_1 = az_1 - bz_2 \quad \text{e} \quad w_2 = cz_1 + dz_2.$$

Assim a transformação $w = \frac{az + b}{cz + d}$ passa a ser representada na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

6. Utilize a notação anterior.

A TRANSFORMAÇÃO DE JOUKOVSKI

Vamos estudar agora a seguinte transformação:

$$w = J(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{a^2}{z} \right) = \frac{z^2 + a^2}{2z}, \quad (7.27)$$

onde $a > 0$. Ela é conhecida como *transformação de Joukowski*, já que foi utilizada pelo cientista russo Nicolai Joukowski (1847-1921) em seus estudos de Aerodinâmica, como veremos adiante.

Observe que J leva cada ponto z num ponto w ; e cada ponto w é imagem de dois pontos z_1 e z_2 , raízes da equação

$$z^2 - 2uz + a^2 = 0.$$

Como estas raízes satisfazem a relação $z_1 z_2 = a^2$, vemos que, ou ambas estão no círculo $|z| = a^2$, ou uma é interna e a outra externa a esse círculo. Somente os pontos $w = a$ e $w = -a$ provêm de raízes duplas, $z = a$ e $z = -a$ respectivamente. Os pontos do segmento $[-a, +a]$ são imagens de pontos conjugados $z = ae^{\pm i\theta}$ do círculo $|z| = a$, pois $J(ae^{\pm i\theta}) = \cos \theta$. Vemos então que J transforma, bijectivamente, tanto o interior quanto o exterior do círculo $|z| = a$, em todo o plano w , excetuado o segmento $[-a, a]$.

Esta propriedade de J se generaliza quando consideramos um círculo U passando pelos pontos $z = \pm a$, não necessariamente o círculo $|z| = a$. Para

isso notamos que (7.27) permite escrever:

$$w - a = \frac{(z - a)^2}{2z} \quad \text{e} \quad w + a = \frac{(z + a)^2}{2z};$$

logo,

$$\frac{w - a}{w + a} = \left(\frac{z - a}{z + a} \right). \quad (7.28)$$

Por outro lado, ponho

$$z_1 = \frac{z - a}{z + a} = Sz, \quad w_1 = z_1^2 = Tz_1, \quad w_1 = \frac{w - a}{w + a} = Sw.$$

obtemos

$$w = a \left(\frac{1 + w_1}{1 - w_1} \right) = S^{-1}w_1;$$

e se substituirmos, nesta equação, w_1 pelo segundo membro de (7.28), obtemos exatamente a transformação de Joukowski (7.27). Esta transformação é, portanto, a composição de três transformações:

$$w = J(z) = S^{-1}TS(z)$$

Dado um círculo qualquer U pelos pontos $z = \pm a$, de centro no semi-plano superior $y > 0$. S leva U numa reta r_U pela origem (pois $S(a) = 0$). Se θ é o ângulo que U faz com o eixo dos x no ponto $z = a$ (Fig. 7.17), então θ será também o ângulo que r_U fará com o eixo dos x no plano de z_1 . De fato, se z é um ponto sobre U que aproxima $z = a$ pelo semiplano $y > 0$, teremos:

$$z - a \approx \varepsilon e^{i\theta}, \quad z + a \approx 2a. \quad z_1 = \frac{z - a}{z + a} \approx \frac{\varepsilon}{2a} e^{i\theta},$$

com aproximação tanto melhor quanto menor for $\varepsilon > 0$. Isso prova o que afirmamos sobre a reta r_U .

A transformação T leva r_U num raio $R_{2\theta}$, que se inicia na origem e faz ângulo 2θ com o eixo dos x no plano de w_1 . Finalmente, S^{-1} leva $R_{2\theta}$ num arco circular L de extremos $w = \pm a$ e que jaz no semiplano superior $\text{Im } w > 0$ (Fig. 7.17). Observe que este arco faz com o eixo dos x no plano de w , no ponto $w = a$, o mesmo ângulo 2θ que o raio $R_{2\theta}$.

Voltando a cada uma das transformações S , T , S^{-1} , vemos que S leva o exterior do círculo U num dos semiplanos da reta r_U ; T leva este semiplano

num plano cortado que exclui o raio $R_{2\theta}$; e S^{-1} leva este plano cortado no plano w , excluindo o arco L , cujos extremos $w = a$ e $w = -a$ são imagens de $w_1 = 0$ e $w_1 = \infty$, respectivamente. Portanto, a transformação de Joukowski $J = S^{-1}TS$ transforma, bijectivamente, o exterior do círculo U no plano w sem o arco circular L . Esta é a anunciada generalização do caso em que U é o círculo $|z| = a$ e o arco L é o segmento $[-a, a]$.

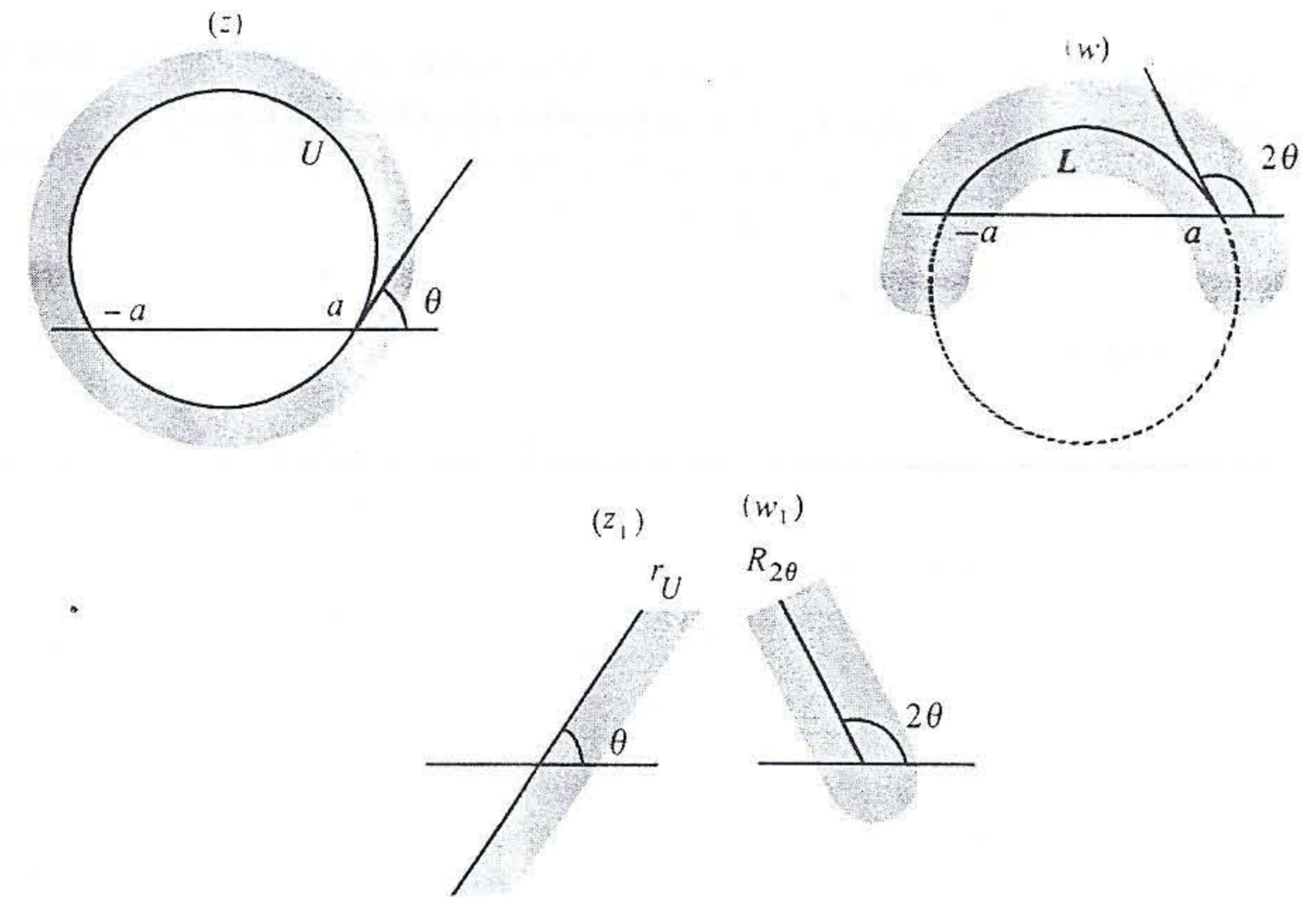


Fig. 7.17

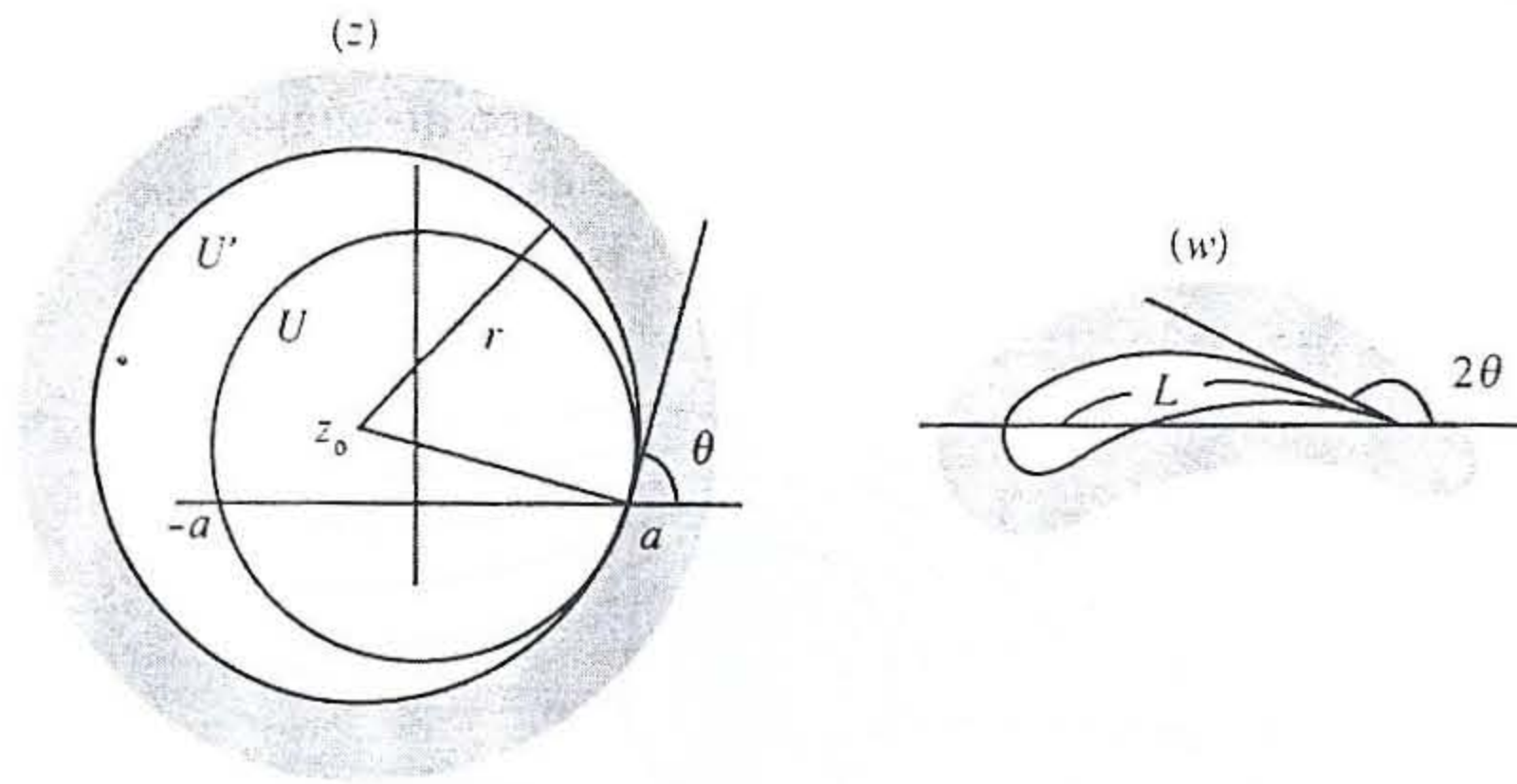


Fig. 7.18

Vamos considerar agora, além do círculo U , um outro círculo U' , de centro z_0 e raio r , tangenciando U no ponto $z = a$. A transformação J leva U' numa curva fechada C (Fig. 7.18); como U e U' se tangenciam em $z = a$, pode-se mostrar que C tem uma cúspide no ponto $z = a$. J transforma bijetivamente o exterior do círculo U' no exterior da curva C . Esta curva C é chamada *perfil de Joukovski*. Observe que há toda uma família de tais perfis, dependendo dos parâmetros a , z_0 e θ .

O potencial complexo apropriado ao perfil de Joukovski

Pouco atrás calculamos a força de levantamento (7.23), no pressuposto de que o potencial complexo do escoamento em volta do perfil C tivesse a forma (7.22). Vamos agora construir esse potencial a partir de um potencial do tipo (7.16), correspondente ao escoamento em volta de um cilindro circular. Começemos com a transformação

$$z = z_0 + r\zeta,$$

que leva o exterior do círculo unitário $|\zeta| = 1$ no exterior do círculo U' (Fig.

7.18). Então,

$$w = J(z_0 + r\zeta) = \frac{1}{2} \left(z_0 + r\zeta + \frac{a^2}{z_0 + r\zeta} \right) \tag{7.29}$$

transforma o exterior do círculo unitário $|\zeta| = 1$ no exterior do perfil C , levando $\zeta = \infty$ em $w = \infty$ e tal que

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{r}{2} \text{ em } \zeta = \infty \tag{7.30}$$

De (7.29) obtemos:

$$\zeta = f(w) = \frac{1}{r}(w - z_0 + \sqrt{w^2 - a^2}) \tag{7.31}$$

como a transformação que leva o exterior do perfil C no exterior do círculo unitário $|\zeta| = 1$. Evidentemente, temos de escolher o ramo da raiz quadrada de forma que $f(\infty) = \infty$ e $f'(w) > 0$ em $w = \infty$, em virtude de (7.30). Assim, para valores grandes de $|w|$, teremos:

$$\sqrt{w^2 - a^2} = w \sqrt{1 - \frac{a^2}{w^2}} = w - \frac{a^2}{2w} + \frac{3a^2}{8w^3} - \dots$$

Isto faz com que

$$\frac{d\zeta}{dw} = f'(w) = \frac{2}{r} \text{ em } w = \infty. \tag{7.32}$$

Seja $F_0(\zeta)$ o potencial complexo referente ao círculo unitário, com velocidade complexa $ve^{-i\alpha}$ no infinito. Então (veja (7.16) na p. 225)

$$F_0(\zeta) = ve^{-i\alpha}\zeta + \frac{\kappa}{2\pi i} \log \zeta + \frac{ve^{i\alpha}}{\zeta}.$$

Pela transformação (7.31), este potencial vai no potencial complexo $F(w) = F_0(f(w))$ referente ao perfil C :

$$F(w) = ve^{-i\alpha}f(w) + \frac{\kappa}{2\pi i} \log f(w) + \frac{ve^{i\alpha}}{f(w)}.$$

Em vista de (7.32),

$$F'(\infty) = F'_0(\infty)f'(\infty) = \frac{2}{r}ve^{-i\alpha},$$

que é a velocidade no infinito do escoamento em volta do perfil C , digamos, $Ve^{-i\alpha}$, de sorte que $v = rV/2$. Assim,

$$\begin{aligned}
 F(w) &= \frac{Ve^{-i\alpha}}{2}(w - z_0 + \sqrt{w^2 - a^2}) \\
 &+ \frac{\kappa}{2\pi i} \log \frac{w - z_0 + \sqrt{w^2 - a^2}}{r} \\
 &+ \frac{r^2Ve^{i\alpha}}{2(w - z_0 + \sqrt{w^2 - a^2})}. \tag{7.33}
 \end{aligned}$$

Este potencial é exatamente da forma (7.22), com w em lugar de z (prove este fato). Qual então sua utilidade, se antes mesmo de conhecê-lo completamente já havíamos calculado a força de levantamento (fórmula (7.23) da p. 232). Como veremos, a seguir, o potencial (7.33) nos permitirá determinar a relação que deve existir entre a circulação κ , a velocidade no infinito e os parâmetros r e θ .

Começamos derivando (7.33):

$$\begin{aligned}
 F'(w) &= \left(\frac{Ve^{-i\alpha}}{2} + \frac{\kappa/2\pi i}{w - z_0 + \sqrt{w^2 - a^2}} - \frac{r^2Ve^{i\alpha}}{2(w - z_0 + \sqrt{w^2 - a^2})^2} \right) \\
 &\times \left(1 + \frac{w}{\sqrt{w^2 - a^2}} \right)
 \end{aligned}$$

Observamos agora que a Eq. 7.20 (p. 228) não permite que a velocidade cresça sem limites, pois A é constante e a pressão p é não negativa. Assim, quando w aproxima o valor $w = a$, a derivada $F'(w)$ deve permanecer limitada. Mas isto só é possível, como é fácil ver, se a expressão em colchetes acima for zero para $w = a$, isto é.

$$\frac{Ve^{-i\alpha}}{2} + \frac{\kappa}{2\pi i(a - z_0)} - \frac{r^2Ve^{i\alpha}}{2(a - z_0)^2} = 0$$

Daqui obtemos, com $a - z_0 = re^{-i\theta}$,

$$\kappa = -2\pi rV \operatorname{sen}(\alpha + \theta).$$

Esta é a relação que procurávamos, entre a circulação κ , a velocidade no infinito $Ve^{-i\alpha}$ e os parâmetros r e θ . Geometricamente ela significa que um

dos pontos de estagnação do escoamento (7.33) cai no vértice da cúspide de C (Fig. 7.19). Se tal ponto fosse outro que não esse vértice (Fig. 7.20), a velocidade no vértice seria infinita, o que não é aceitável.

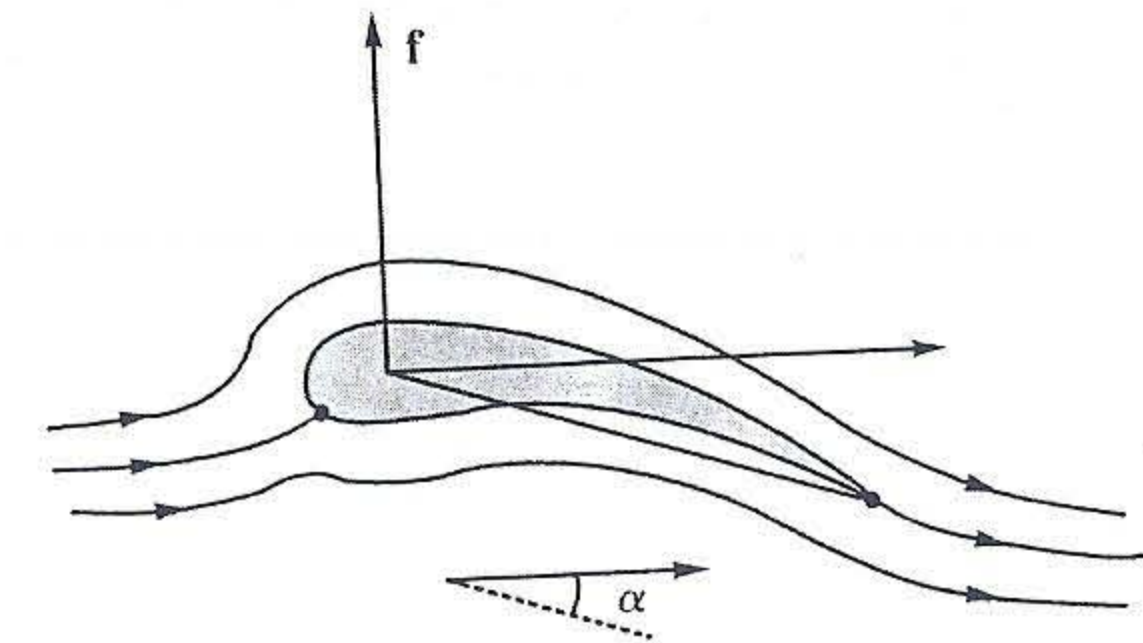
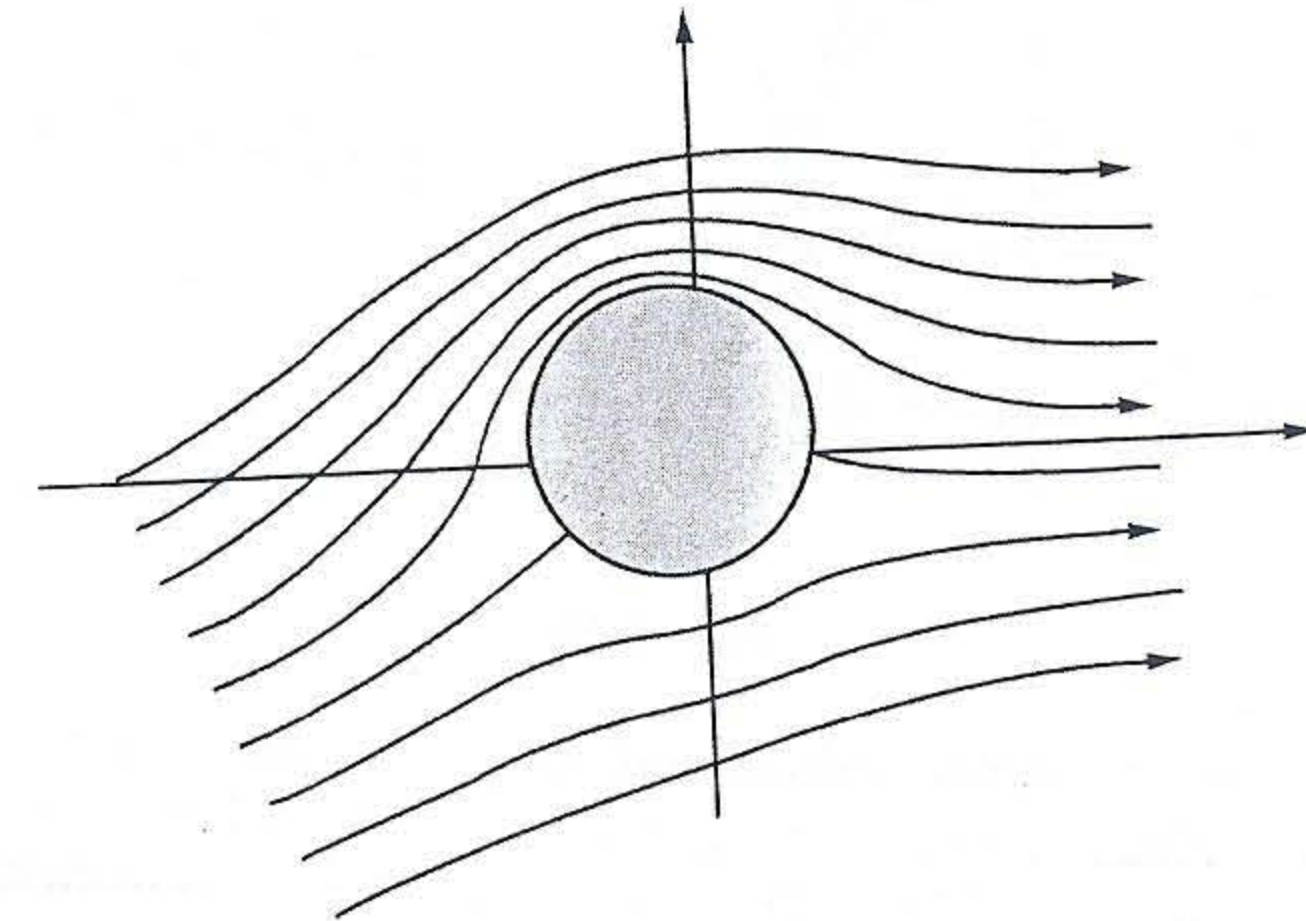


Fig. 7.19

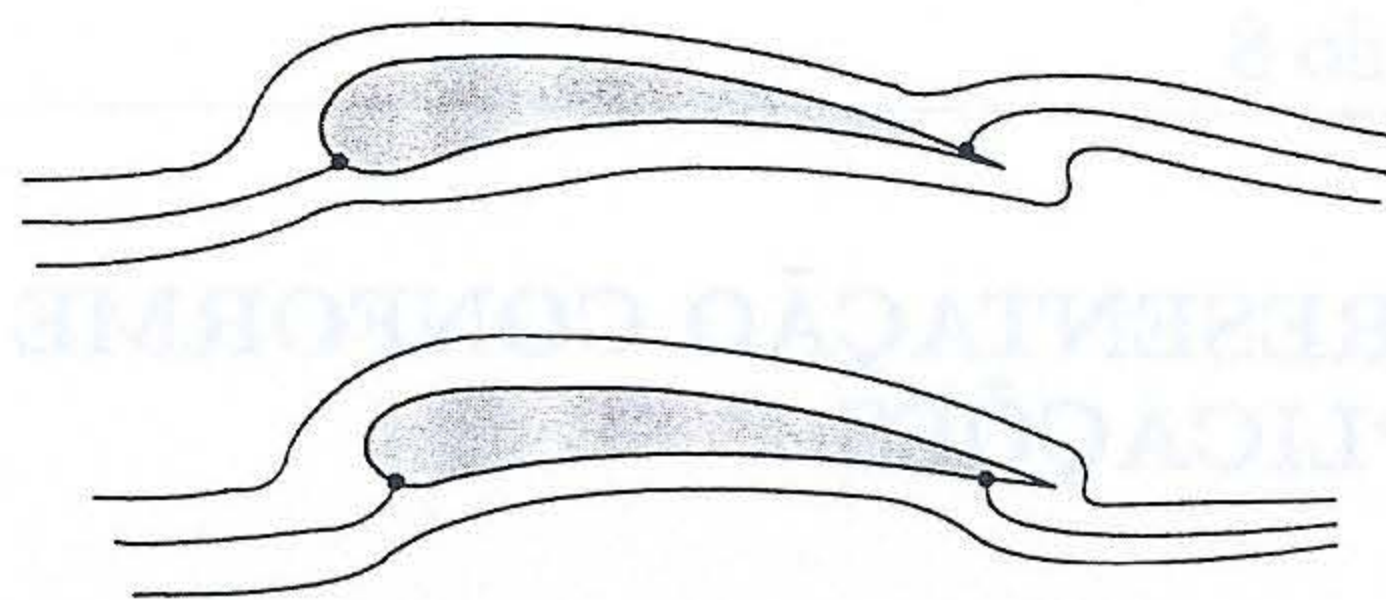


Fig. 7.20

OS PARADOXOS DA TEORIA

O que acontece quando um cilindro circular de raio R é colocado num escoamento paralelo? É de se esperar, por razões de simetria, que o escoamento resultante seja aquele associado ao potencial (7.14) com $\kappa = 0$, proposto para estudo no Exerc. 1 da p. 225, e que tem o aspecto ilustrado na Fig. 7.13. Ao contrário, se $\kappa \neq 0$, o escoamento pode ter os aspectos assimétricos (relativamente ao eixo dos x ilustrados nas Figs. 7.10 a 7.12. Mas mesmo nestes casos o escoamento no infinito continua paralelo, sendo, pois, de se perguntar como, fisicamente, se originam esses escoamentos com circulação não-nula em volta do cilindro.

Essa questão torna-se mais paradoxal ainda quando lembramos o resultado de Lord Kelvin, citado na p. 209, segundo o qual a circulação permanece constante durante o movimento. Ora, é claro que a circulação é zero quando o fluido se encontra em repouso. Como, então, pode surgir um escoamento com circulação não-nula?

A resposta a essas questões encontra-se num elemento que não foi incluído em nossas equações de movimento: a *viscosidade*. De fato, no momento em que introduzimos a pressão como responsável única pelas forças que uma parte do fluido exerce sobre a parte adjacente, a partir daí fica excluída a viscosidade, que é responsável por forças tangenciais à superfície de separação entre duas partes do fluido.

A teoria apresentada no presente capítulo, como dissemos no início, está restrita a fluidos ideais, sem viscosidade. Os escoamentos que encontramos

na Natureza são todos eles viscosos. Em última análise, portanto, os paradoxos da teoria são devidos à idealização feita desde o início. Como vimos, essa idealização permite uma descrição simplificada e elegante dos escoamentos fluidos. E os estudiosos do assunto sabem, desde longa data, que líquidos como a água ou gases como o ar, agem mesmo como fluidos ideais e incompressíveis em muitos dos escoamentos observados. Como então explicar os paradoxos da teoria?

O primeiro e decisivo lance para uma resposta satisfatória a essa pergunta foi dado pelo cientista alemão L. Prandtl. No 3º Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Heidelberg em 1904, Prandtl apresentou um trabalho de fundamental importância, inaugurando um novo campo de pesquisas, que passaria a ser conhecido como “teoria da camada de contorno” (boundary layer theory, em inglês). Segundo essa teoria, a viscosidade é de fato praticamente desprezível, exceto numa fina camada envolvendo os corpos imersos no fluido. Assim, as partículas do fluido que estão em contato direto com esses corpos ficam neles fixadas; elas vão-se envolvendo mais e mais com o escoamento do fluido quanto mais afastadas estiverem do corpo nele imerso.

Agora é possível entender, por exemplo, como surge a força que age num cilindro que se desloca num fluido. Com referência à Fig. 7.13, imaginemos que o cilindro se desloque para a esquerda no fluido em repouso, e ao mesmo tempo esteja girando em torno de seu eixo no sentido horário. A viscosidade do fluido nas proximidades do cilindro fará com que esse fluido próximo ao cilindro seja arrastado no movimento de rotação. Isto provoca a deformação das linhas de corrente, que passam do aspecto ilustrado na Fig. 7.13 para aquele da Fig. 7.12; e os pontos de estagnação também passam do que eram na Fig. 7.13 para as posições ilustradas na Fig. 7.12. É esse atrito que faz o fluido aderir ao cilindro o responsável pela origem da circulação e, em última análise, da força lateral sobre o cilindro.

O que acabamos de explicar no caso de um cilindro ocorre também com uma bola que se desloca num fluido e ao mesmo tempo descreve uma rotação. Isto origina uma força sobre a bola, perpendicularmente à sua trajetória. Jogadores de bilhar, golfe e futebol conhecem esse fenômeno e exploram suas vantagens para imprimir trajetórias curvilíneas às bolas usadas em seus jogos.

No início deste século o homem já estava prestes a voar, embora não houvesse ainda uma explicação matemática para o vôo. A idéia de fluido

ideal e o Teorema de Lord Kelvin eram uma barreira ao surgimento de circulação e, conseqüentemente, da força de levantamento. Com a teoria de Prandtl as coisas se esclareceram: o avião começa a se deslocar num fluido em repouso e o atrito da asa com o ar gera a circulação, que vai aumentando com a velocidade. Esta tem de atingir um certo valor mínimo para que a força originada com a circulação possa levantar o aparelho.

Capítulo 8

REPRESENTAÇÃO CONFORME E APLICAÇÕES

Considerações preliminares

Vimos, no Capítulo 3 (pp. 110 e seguintes), que as partes real e imaginária de uma função analítica satisfazem a equação de Laplace; e que, se uma função de duas variáveis reais satisfaz a equação de Laplace, essa função pode ser interpretada como a parte real de uma função analítica. Isso permite utilizar a teoria das funções analíticas para tratar problemas que envolvem a equação de Laplace no plano.

Como dissemos no final do Capítulo 3, problemas de contorno, como os de Dirichlet e Neumann, ocorrem freqüentemente em Física Matemática. E uma das dificuldades que esses problemas oferecem se deve ao tipo de região R onde são considerados. Assim, conquanto seja relativamente fácil resolver explicitamente certos problemas num disco ou semiplano, a situação complica-se enormemente em regiões mais gerais. Um procedimento para contornar tal dificuldade consiste em transformar a região R em regiões mais simples, como discos ou semiplanos. Quando a função que faz uma tal transformação é analítica, o problema torna-se perfeitamente tratável, pois, como veremos, a equação de Laplace permanece invariante por esse tipo de transformação.

Representação conforme

Consideremos uma função $w = f(z)$, analítica num certo ponto z_0 , com

$f'(z_0) \neq 0$, e seja γ uma curva regular passando pelo ponto z_0 , dada por $z = z(t)$, com $z(0) = z_0$. Essa curva transforma-se numa curva Γ do plano w , dada parametricamente por $w(t) = f(z(t))$, tal que $w_0 = f(z_0) = w(0)$ (Fig. 8.1). Observe que

$$w'(t) = f'(z)z'(t).$$

de sorte que o ângulo Θ que a tangente à curva Γ no ponto w_0 faz com o eixo real assim se expressa:

$$\Theta = \arg w'(0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(0).$$

Ora, $\arg z'(0) = \theta$ é o ângulo que a tangente à curva γ no ponto z_0 faz com o eixo real, de sorte que a equação anterior também se escreve:

$$\Theta = \theta + \arg f'(z_0).$$

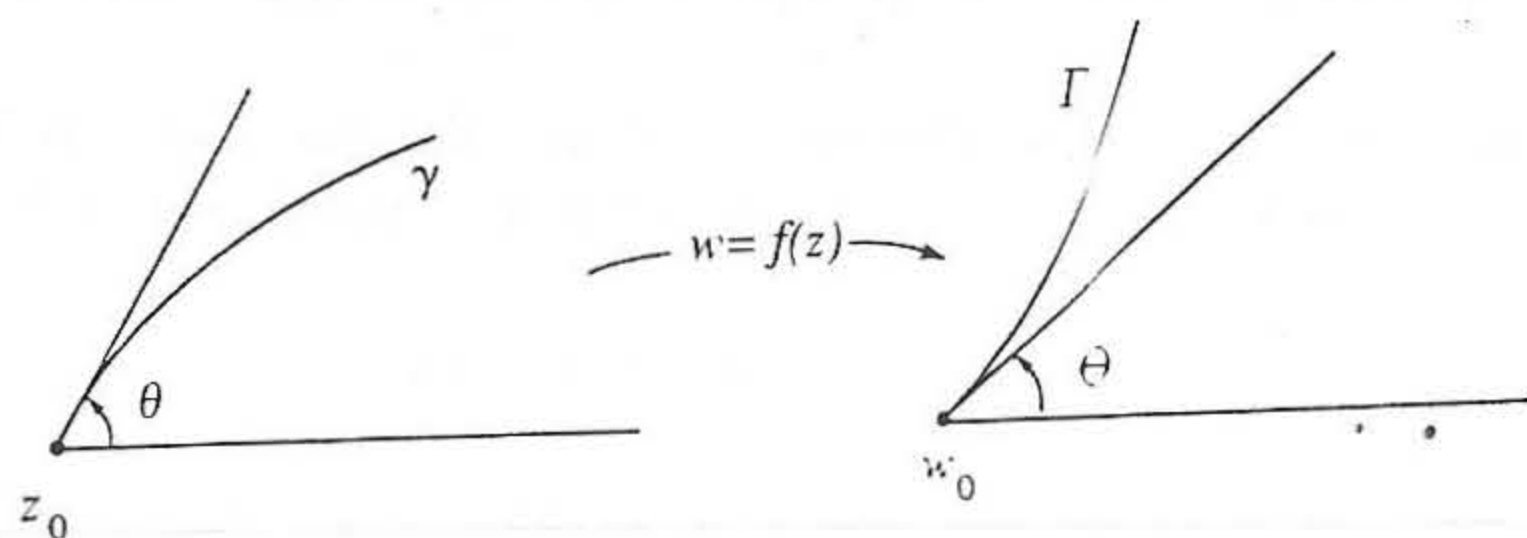


Fig. 8.1

Sejam agora γ' uma nova curva por z_0 . Γ' sua imagem passando por w_0 . θ' e Θ' os ângulos dessas curvas com os eixos reais dos planos z e w , respectivamente. Como anteriormente,

$$\Theta' = \theta' + \arg f'(z_0).$$

Subtraindo esta última equação da anterior, obtemos:

$$\Theta' - \Theta = \theta' - \theta,$$

isto é, o ângulo $\theta' - \theta$ entre as curvas γ' e γ é preservado pela transformação

f , tanto em valor como em sentido de orientação (Fig. 8.2).

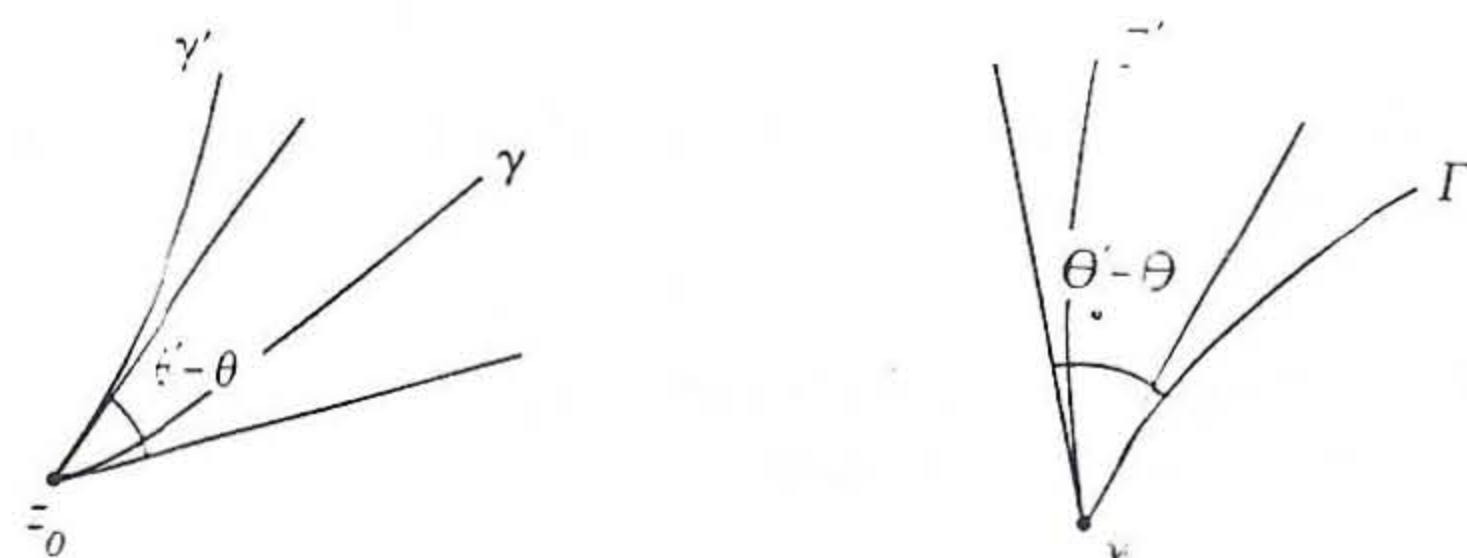


Fig. 8.2

Mas, além de preservar ângulos, a transformação f tem outra propriedade interessante. Lembremos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = |f'(z_0)|$$

Isto significa que pequenos segmentos com uma extremidade em z_0 são contraídos ou expandidos na razão $|f'(z_0)|$, independentemente das direções desses segmentos. Deste fato e da preservação de ângulos decorre que a função f transforma figuras nas proximidades de z_0 em figuras semelhantes nas proximidades de w_0 . Por causa disso, f é chamada de transformação conforme ou representação conforme de uma vizinhança de z_0 numa vizinhança de w_0 .

Não é difícil demonstrar — embora não o façamos aqui — que a hipótese de que uma transformação f preserve ângulos e as derivadas f_x e f_y sejam contínuas implica f ser analítica ([A1, pp 74-75]). E por causa disso que o conceito de “representação conforme” costuma ser identificado com o conceito de preservação de ângulos e suas orientações.

Observe que a hipótese $f'(z_0) \neq 0$ é essencial no raciocínio que fizemos anteriormente. Quando $f'(z_0) = 0$, o ponto z_0 é chamado ponto crítico da transformação f .

Invariância da equação de Laplace

Seja $\phi(x, y)$ uma função real de classe C^2 e

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

uma função analítica que transforma a região R do plano z numa região D do plano w . Seja

$$\Phi(u, v) = \phi(x, y)$$

isto é, Φ é a imagem de ϕ pela transformação f . Calculando as derivadas de ϕ pela regra da cadeia, obtemos:

$$\phi_x = \Phi_u u_x + \Phi_v v_x, \quad \phi_y = \Phi_u u_y + \Phi_v v_y;$$

$$\phi_{xx} = \Phi_{uu}(u_x)^2 - \Phi_{uv}u_x v_x + \Phi_u u_{xx} + \Phi_{vv}(v_x)^2 + \Phi_{vu}v_x u_x + \Phi_v v_{xx};$$

$$\phi_{yy} = \Phi_{uu}(u_y)^2 - \Phi_{uv}u_y v_y + \Phi_u u_{yy} + \Phi_{vv}(v_y)^2 + \Phi_{vu}v_y u_y + \Phi_v v_{yy}.$$

Somando estas duas últimas expressões membro a membro, levando em conta as equações de Cauchy-Riemann e o fato de que u e v são funções harmônicas, obtemos:

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = (\Phi_{uu} + \Phi_{vv})(u_x^2 - v_x^2);$$

ou ainda, no pressuposto de que $|f'(z)|^2 = (u_x^2 + v_x^2)$ seja diferente de zero.

$$\Delta\phi = |f'(z)|^{-2} \Delta\Phi.$$

É claro, então, que $\Delta\phi = 0 \Leftrightarrow \Delta\Phi = 0$, isto é, a equação de Laplace é invariante por transformações conformes f nas vizinhanças de pontos onde $f'(z) \neq 0$.

EXERCÍCIOS

1. A transformação $w = z^2$ tem derivada diferente de zero, exceto na origem; portanto, ela é conforme, exceto nesse ponto. Prove que ela duplica os ângulos de retas que se cruzam na origem.
2. Generalize o resultado do exercício anterior para $w = z_0 + (z - z_0)^n$, isto é, prove que essa transformação leva retas pelo ponto z_0 , que fazem entre si um ângulo α , em retas pelo ponto w_0 , que fazem entre si um ângulo $n\alpha$.

3. O resultado anterior se generaliza ainda mais. Seja $w = f(z)$ uma transformação com as primeiras $n - 1$ derivadas nulas em $z = z_0$ e $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Prove que as retas que se cruzam no ponto z_0 fazendo um ângulo α são levadas em curvas que se cruzam em $w_0 = f(z_0)$ fazendo um ângulo $n\alpha$.
4. Mostre que se $w = f(z)$ é uma representação conforme num ponto z_0 , então $w = \overline{f(z)}$ preserva ângulos, mas muda sua orientação, vale dizer, duas curvas que se cruzam num ângulo α são levadas em curvas que se cruzam em ângulo $-\alpha$.

INVERSÃO LOCAL E INVERSÃO GLOBAL

Já tivemos oportunidade de considerar funções inversas em casos concretos do logaritmo (p. 68) e das funções trigonométricas (p. 72). Vamos tratar agora o problema na sua generalidade.

8.1. Teorema. *Seja $f(z)$ uma função analítica e não-constante num ponto z_0 , o qual supomos que seja zero de ordem $n \geq 1$ de $f(z) - w_0$, onde $w_0 = f(z_0)$. Então, dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\delta > 0$ tal que cada $w' \in V_\varepsilon(w_0)$ é imagem pela f de exatamente n valores em $V_\delta(z_0)$.*

Demonstração. Escolhemos $\varepsilon > 0$ de tal modo que f seja definida e analítica em $\overline{V_\varepsilon(z_0)}$, e $f(z) - w_0$ não tenha aí outro zero além de $z = z_0$. Seja

$$\delta = \min_{|z-z_0|=\varepsilon} |f(z) - w_0|,$$

de sorte que, qualquer que seja $w' \in V_\delta(w_0)$, $|f(z) - w_0| > |w_0 - w'|$ para $|z - z_0| = \varepsilon$. Podemos, pois, aplicar o teorema de Rouché (p. 177) às funções

$$F(z) = f(z) - w_0 \quad \text{e} \quad G(z) = w_0 - w',$$

e concluir que $F(z)$ e $F(z) - G(z) = f(z) - w'$ têm o mesmo número de zeros em $V_\varepsilon(z_0)$. Em outras palavras, $f(z) - w'$ tem n zeros em $V_\varepsilon(z_0)$. Isto é o mesmo que dizer que o valor w' é imagem pela f de exatamente n valores em $V_\varepsilon(z_0)$, como queríamos demonstrar.

8.2. Corolário. *Uma função analítica não-constante transforma conjuntos abertos em conjuntos abertos.*

De fato, se A é um conjunto aberto no domínio de f , devemos provar que qualquer $w_0 \in f(A)$ pertence a uma vizinhança contida em $f(A)$. Para isto, basta tomar $z_0 \in A$ tal que $f(z_0) = w_0$ e observar, pelo teorema anterior, que existem ε e δ positivos tais que $V_\delta(w_0) \subset f(V_\varepsilon(z_0)) \subset f(A)$.

8.3. Corolário. *Uma função analítica não-constante transforma regiões em regiões.*

Com a mesma notação que vimos usando, resta provar que $f(A)$ é conexo. Sejam w_0 e w' em $f(A)$, de sorte que $w_0 = f(z_0)$ e $w' = f(z')$, com z_0 e z' em A . Mas A é conexo, de sorte que z_0 e z' podem ser ligados por uma curva C toda contida em A . Então, $C' = f(C)$ é uma curva em $f(A)$ ligando w_0 e w' .

8.4. Corolário. *Seja f uma função analítica num ponto z_0 e $w_0 = f(z_0)$. Suponhamos que z_0 seja zero simples de $f(z) - w_0$, vale dizer, $f'(z_0) \neq 0$. Então, $w = f(z)$ transforma uma vizinhança $V(z_0)$ de z_0 numa vizinhança $V_\delta(w_0)$ de maneira conforme, biunívoca e bicontínua, isto é, f é uma "aplicação topológica" ou "homeomorfismo" de uma vizinhança na outra.*

Quando $n = 1$ no Teorema 8.1, existe uma correspondência biunívoca entre uma vizinhança $V_\delta(w_0)$ e sua imagem pela função inversa de f , denotada por $f^{-1} = g$. Claramente, essa imagem $V(z_0) = g(V_\delta(w_0))$ é um subconjunto aberto de $V_\varepsilon(z_0)$, e g é contínua (pela própria maneira como o δ foi obtido a partir de ε).

8.5. Corolário. *Seja f uma função analítica num ponto z_0 , e $f'(z_0) \neq 0$. Então, a inversa g de f é analítica em $w_0 = f(z_0)$ e $g'(w_0) = 1/f'(z_0)$.*

Como g é contínua, $w - w_0 = f(z) - f(z_0)$ tende a zero se e somente se $z \rightarrow z_0$. Assim,

$$\frac{z - z_0}{w - w_0} = \frac{1}{(w - w_0)/(z - z_0)}$$

tem limite com $w \rightarrow w_0$, o qual é dado por

$$\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{z - z_0}{w - w_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(w - w_0)/(z - z_0)}$$

Inversão global

Pelo que vimos até agora, se uma transformação f é analítica num ponto z_0 , com $f'(z_0) \neq 0$, então, numa vizinhança de z_0 , essa transformação é conforme; além disso, numa vizinhança de $w_0 = f(z_0)$ a inversa g de f também é conforme, com $g'(w_0) \neq 0$.

Esses resultados são de caráter local e não permitem concluir que a inversa existe em toda a imagem do domínio de f . Por exemplo, a função $w = z^2$ está definida em todo o plano; e, excluída a origem, $w' = 2z \neq 0$. No entanto, f não tem uma inversa única, já que $z^2 = (-z)^2$. Para a inversão global, devemos introduzir a noção de "função simples", dada a seguir.

8.6. Definição. *Diz-se que uma função f é simples numa região R se ela é analítica e injetiva em R .*

É fácil provar, como corolário do Teorema 8.1, que a derivada de uma função simples é diferente de zero em todos os pontos de seu domínio. (Veja o Exerc. 6 adiante.) Então, uma função simples é uma transformação conforme. Além disso, ela é invertível, e sua inversa também é uma função simples. O teorema seguinte dá uma condição suficiente para que uma função seja simples.

8.7. Teorema. *Sejam C um contorno fechado simples, orientado positivamente, com interior R e f uma função analítica em R e nos pontos de C , e injetiva em C . Então f é função simples em R .*

Demonstração. A função $w = f(z)$ transforma o contorno C num contorno fechado simples C' do plano w . Seja w_0 um ponto qualquer deste plano, $w_0 \notin C'$. Como vimos na p. 175, o número de zeros de $f(z) - w_0$ em R é dado pela expressão

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{dw}{w - w_0} dw.$$

Este segundo membro é zero se w_0 estiver no exterior de C' . Se w_0 estiver no interior de C' , o valor do referido segundo membro é $+1$ se C' tiver orientação positiva e -1 se a orientação de C' for negativa. Mas este valor -1 tem de ser descartado, pois o número de zeros da função $f(z) - w_0$ em R é um número inteiro ≥ 0 . Concluimos, pois, que $f(z) - w_0$ efetivamente tem apenas um zero em R quando w_0 está em R . Isto conclui a demonstração.

Como dissemos no início do capítulo, o tratamento de certos problemas de contorno para a equação de Laplace pode ser viabilizado quando é possível transformar, de maneira conforme, certas regiões do plano em outras. O teorema seguinte, devido a Riemann, é um resultado muito geral e de largo alcance, que diz respeito a essa possibilidade.

8.8. Teorema (da aplicação de Riemann). *Dada uma região simplesmente conexa R , que não seja o plano todo, existe uma função simples f que transforma R no disco unitário $|z| < 1$. Além disso, f é única se especificarmos, para um ponto qualquer $z_0 \in R$, que $f(z_0) = 0$ e $f'(z_0) > 0$.*

Não faremos uma demonstração deste teorema, apenas alguns comentários. Como uma função simples é invertível e a inversa também é uma função simples, o teorema garante que qualquer região simplesmente conexa que não coincide com o plano todo pode ser transformada em qualquer outra região do mesmo tipo por uma função simples. Então, o fato de sabermos resolver o problema de Dirichlet em certos domínios particulares, como um disco ou semiplano, nos permite saber, por esse teorema, que o problema de Dirichlet é solúvel para qualquer região do tipo descrito. Às vezes podemos também achar a solução explicitamente, desde que tenhamos uma fórmula de transformação que não seja muito complicada.

Mas é bom lembrar que o teorema de Riemann não nos oferece qualquer fórmula de transformação de uma região em outra. Existe uma fórmula, chamada *transformação de Schwarz-Christoffel*, que leva semiplanos em regiões poligonais; mas, na prática, ela é de aplicabilidade muito limitada, por isso mesmo não vamos tratar dela aqui. Mais proveitoso num primeiro curso é estudar vários exemplos particulares de transformações. Já fizemos isso em alguns casos no capítulo anterior, no estudo de escoamentos fluidos. Analisaremos aqui outras transformações interessantes e práticas. a começar, na próxima seção, com a transformação de Möbius.

EXERCÍCIOS

1. Determine o maior disco centrado na origem, onde a função $w = e^z$ seja simples.
2. Mostre que $w = z^2 + z$ é função simples no semiplano $\operatorname{Re} z > -1/2$, mas não em regiões que contenham o ponto $z = -1/2$. *Sugestão:* Toda região que contenha o ponto $z = -1/2$ conterá uma vizinhança desse ponto.
3. Mostre que $f(z) = (1 - iz)^2$ é função simples no semiplano $\operatorname{Im} z > -i$, mas não em regiões que contenham o ponto $z = -i$.
4. Mostre que $f(z) = (1 - iz)^3$ não é função simples no semiplano $\operatorname{Im} z > 0$.
5. Mostre que

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$
 é função simples em $0 < |z| < 1$ e em $|z| > 1$, mas não em regiões que contenham o ponto $z = 1$. (Veja a transformação de Joukowski na p. 235.)
6. Prove que uma função simples tem derivada não-nula em todo o seu domínio de definição.
7. Prove que a composta de funções simples é uma função simples.
8. Mostre que $w = u + iv = \operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x + iy)$ é função simples na região $|x| < \pi/2$, $y > 0$; e que a imagem desta região é o semiplano $v > 0$. Faça gráficos e estude as imagens do segmento $|x| < \pi/2$ do eixo dos x e dos raios $x = \pm\pi/2$, $y > 0$.

A TRANSFORMAÇÃO DE MÖBIUS

Vimos, no Capítulo 7 (pp. 232-34), algumas propriedades da *transformação de Möbius*, assim definida:

$$w = M(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (8.1)$$

onde $ad - bc \neq 0$. (O caso $ad - bc = 0$ é trivial, pois $M(z)$ fica constantemente igual a $a/b = c/d$. Para vermos isso, basta notar que $dw/dz = (ad - bc)/(cz + d)^2$.)

No caso que estamos considerando, $M(z)$ é uma função simples que transforma o plano todo, exceto $z = -d/c$, em todo o plano, tendo por inversa a função

$$z = M^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Introduzindo os valores $M(\infty) = a/c$ e $M(-d/c) = \infty$ como os limites de $M(z)$ com $z \rightarrow \infty$ e $z \rightarrow -d/c$, respectivamente, $M(z)$ passa a ser uma transformação biunívoca e bicontínua (um homeomorfismo) de todo o plano estendido em si mesmo.

Como vimos, no Capítulo 7, $M(z)$ leva retas e círculos em retas e/ou círculos. Considerando as retas como círculos com centros no infinito, podemos resumir dizendo que *toda transformação de Möbius leva círculos em círculos*.

8.9. Exemplo. Vamos achar uma transformação de Möbius que leve o semiplano superior $\text{Im } z > 0$ no interior do disco unitário centrado na origem.

Como a fronteira do semiplano é uma reta, devemos achar uma transformação que leve essa reta no círculo que é a fronteira do disco. Ora, esse círculo é determinado por três pontos; vamos, pois, escolher três pontos na reta (eixo dos x) e três pontos correspondentes no círculo, digamos,

$$z_1 = -1 \mapsto w_1 = -i; \quad z_2 = 0 \mapsto w_2 = 1; \quad z_3 = 1 \mapsto w_3 = i.$$

Substituindo esses valores em (8.1), obtemos:

$$-i = \frac{-a+b}{-c+d} = \frac{-a/d+b/d}{-c/d+1}; \quad 1 = \frac{b}{d}; \quad i = \frac{a+b}{c+d} = \frac{a/d+b/d}{c/d+1}.$$

Estas equações determinam os três coeficientes a/d , c/d , b/d , que, substituídos em (8.1), produzem a transformação procurada:

$$w = -\frac{z-i}{z+i}.$$

Observe que $|z-i|$ e $|z+i|$ são as distâncias de z a i e $-i$, respectivamente. Assim, sendo $\text{Im } z > 0$, teremos $|w| < 1$ (veja o Exerc. 6 adiante), ou seja, a transformação realmente leva o semiplano superior no interior do disco unitário de centro na origem. Vê-se também que o semiplano inferior é levado no exterior do disco.

8.10. Exemplo. Vamos achar a transformação de Möbius mais geral que leva o semiplano superior no interior do disco unitário centrado na origem. Como o eixo real deve ser levado no círculo unitário, fazendo $z = x$

real em (8.1), devemos ter $|ax+b|/|cx+d| = 1$. Com $x = 0$, $x = 1$ e $x = \infty$, isto nos dá, respectivamente:

$$\left| \frac{b}{d} \right| = 1; \quad \left| \frac{a-b}{c-d} \right| = 1; \quad \left| \frac{a}{c} \right| = 1.$$

Substituindo em (8.1), obtemos:

$$w = \frac{a}{c} \cdot \frac{z-b/a}{z-d/c} = e^{i\alpha} \frac{z+\beta}{z+\gamma},$$

onde α , β e γ são parâmetros complexos, com α real; além disso,

$$\left| \frac{c+b}{c+d} \right| = \left| \frac{a}{c} \cdot \frac{1+\beta}{1+\gamma} \right| = \left| \frac{1+\beta}{1+\gamma} \right| = 1,$$

de sorte que $|\beta+1| = |\gamma+1|$, significando que β e γ estão num mesmo círculo centrado em -1 . Observe ainda que

$$\left| \frac{\beta}{\gamma} \right| = \left| \frac{b/a}{d/c} \right| = \left| \frac{b/d}{a/c} \right| = 1,$$

mostrando que $|\beta| = |\gamma|$, isto é, β e γ estão no mesmo círculo centrado na origem. Esses dois últimos resultados nos levam a concluir que $\gamma = \bar{\beta}$ (Fig. 8.3). Por fim, $z = -\beta$ deve estar no semiplano superior, já que sua imagem $w = 0$ está no interior do disco unitário centrado na origem. Concluimos, pois, que a transformação de Möbius mais geral que leva o semiplano superior no interior do disco unitário centrado na origem é dada por

$$w = e^{i\alpha} \frac{z+\beta}{z+\bar{\beta}},$$

onde α é real e $\text{Im } \beta < 0$.

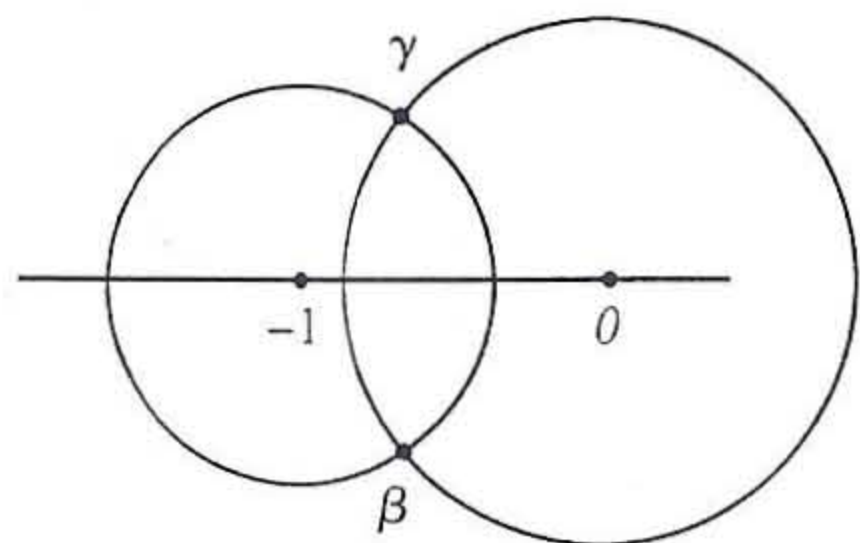


Fig. 8.3

A razão cruzada

Vimos, no Exemplo 8.9, que o conhecimento das imagens de três pontos levou à completa determinação da correspondente transformação de Möbius. Esse fato é de caráter geral, como veremos agora. Tomemos a transformação de Möbius (8.1) na decomposição que dela fizemos na p. 234:

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cz + d}$$

Suponhamos que três pontos distintos z_1, z_2 e z_3 sejam levados em w_1, w_2 e w_3 , respectivamente. Então,

$$w_i = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cz_i + d}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Daqui obtemos, por simples manipulação algébrica:

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_2)(w_1 - w_3)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_2)(z_1 - z_3)}. \quad (8.2)$$

Esta última expressão envolvendo os z é chamada a *razão cruzada* dos números z, z_1, z_2 e z_3 . Como se vê, ela permanece a mesma quando passamos dos z para os w , vale dizer, a *razão cruzada é invariante por uma transformação de Möbius*. Essa invariância prova, de um modo geral, que *uma transformação de Möbius fica completamente determinada pelo conhecimento das imagens de três pontos distintos*, bastando resolver (8.2) para se obter w em função de z .

8.11. Exemplo. Vamos achar a transformação de Möbius que leva $-1, -i$ e i em zero, 2 e $1 + i$, respectivamente.

Antes mesmo de fazer os cálculos, observe que o círculo $|z| = 1$ (onde estão os valores dados de z) será levado no círculo $|w - 1| = 1$ (onde estão os valores dados de w). (O leitor deve desenhar os dois discos para acompanhar o raciocínio.) Substituindo os dados em (8.2) e fazendo os cálculos, obtemos:

$$w = \frac{4z + 4}{(1 - i)z + (3 - i)}.$$

Para ver que esta transformação leva o interior do primeiro disco no interior do segundo, basta substituir $z = 0$ (que está no interior do primeiro disco) e verificar que a imagem $w = 2(3 + i)/5$ está no interior do segundo.

Outro modo de fazer essa constatação seria o seguinte: percorrendo-se o primeiro círculo no sentido anti-horário, os pontos $z = -1, -i, i$ são encontrados nesta ordem, e o sentido de percurso deixa o interior do disco à esquerda do círculo: o mesmo acontece com o segundo círculo e os pontos imagens. Uma inversão de ordem, digamos, $-1, -i$ e i sendo levados em zero, $1 + i$ e 2 , respectivamente, faria com que o interior do primeiro disco fosse levado no exterior do segundo. (Faça o Exerc. 7 adiante.)

8.12. Exemplo. Vamos achar a solução do seguinte problema de Dirichlet no disco unitário centrado na origem (do plano $w = u + iv$):

$$\Delta \Phi = 0 \text{ em } |w| < 1,$$

Φ sendo igual a 1 no semicírculo superior $\text{Im } w > 0$ e igual a zero no semicírculo inferior $\text{Im } w < 0$.

Ora, $\Delta \phi(x, y)$ em coordenadas polares r, θ de $z = re^{i\theta}$ (Exerc. 9 adiante) se escreve:

$$\phi_{rr} + \frac{\phi_r}{r} + \frac{\phi_{\theta\theta}}{r^2},$$

de sorte que $\theta = \arg z$ é solução da equação de Laplace no semiplano superior $\text{Im } z > 0$, onde θ varia de zero a π . Portanto, $\phi = \theta/\pi$ é a solução que é igual a zero para $\theta = 0$ e igual a 1 para $\theta = \pi$. Isto sugere que façamos uma transformação do semiplano no disco unitário $|w| < 1$, de forma que o semi-eixo positivo $x > 0$ seja levado no semicírculo do semiplano inferior

Im $w < 0$ e o semi-eixo negativo $x < 0$ no semicírculo do semiplano superior
Im $w > 0$. Por exemplo, uma transformação que leve

$$\infty, -1, 0, 1 \text{ em } 1, i, -1, -i,$$

respectivamente, resolve o nosso problema. (Faça uma figura representando o eixo real e o círculo $|w| = 1$ para acompanhar o raciocínio. Observe que o semiplano é como um disco de centro em $+i\infty$.)

Mas não podemos especificar mais que três pares de pontos z_i, w_i ; de fato, basta especificar quaisquer três pares, como

$$\{\infty, -1, 0\} \mapsto \{1, i, -1\},$$

para que o último par necessariamente apareça na transformação. (Faça o Exerc. 10 adiante.) Para lidar com $z_1 = \infty$, basta reescrever a razão cruzada convenientemente e fazer $z_1 \rightarrow \infty$, assim:

$$\frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_2)(z_1 - z_3)} = \frac{(z/z_1 - 1)(z_2 - z_3)}{(z - z_2)(1 - z_3/z_1)} \rightarrow -\frac{z_2 - z_3}{z - z_2}.$$

Daqui e de (8.2), obtemos:

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_2)(w_1 - w_3)} = -\frac{z_2 - z_3}{z - z_2}.$$

Fazendo as substituições numéricas e o cálculo algébrico, encontramos a transformação procurada:

$$w = \frac{z - i}{z + i}. \quad (8.3)$$

cuja inversa é $z = \frac{iw + i}{1 - w}$.

Com a notação $z = x - iy$, $\theta = \arctg y/x$ e $w = u + iv$, um pouco de manipulação algébrica nos conduz a

$$x = \frac{-2v}{(u-1)^2 + v^2}, \quad y = \frac{1 - u^2 - v^2}{(u-1)^2 + v^2}$$

e, conseqüentemente,

$$\phi = \frac{1}{\pi}\theta = \Phi = \frac{1}{\pi} \arctg \left(\frac{u^2 + v^2 - 1}{2v} \right),$$

que é o resultado procurado.

EXERCÍCIOS

- Vimos que a transformação $w = M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ tem como inversa a transformação $z = M^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}$. Multiplique as matrizes de M e M^{-1} (conforme notação sugerida no Exerc. 5 da p. 235) e observe que se obtém uma matriz diagonal com elemento $ad - bc$ na diagonal. Explique por que tal elemento não precisa ser 1.
- Dadas as transformações

$$M_1(z) = \frac{z+2}{3z-1} \text{ e } M_2(z) = \frac{1-3z}{z+2},$$
 calcule M_1M_2 , M_2M_1 , M_1^{-1} e M_2^{-1} .
- Verifique que a transformação $z \mapsto \bar{z}$ leva retas em retas e círculos em círculos, mas não é uma transformação de Möbius.
- Prove que uma transformação de Möbius que leva o eixo real em si mesmo pode ser escrita com coeficientes reais.
- Prove que $\left| \frac{z-i}{z+i} \right| < 1$ se $\text{Im } z > 0$; e $\left| \frac{z-i}{z+i} \right| > 1$ se $\text{Im } z < 0$.
- Ache a transformação de Möbius que leva os pontos $-1, -i$ em zero, $1+i$ e 2 , respectivamente e verifique que ela leva o interior do disco $|z| = 1$ no exterior do disco $|z-1| = 1$.
- Ache a transformação de Möbius que leva os pontos 1 , zero e -1 em $-i, 1$ e i , respectivamente. Antes mesmo de fazer qualquer cálculo, explique por que essa transformação leva o semiplano $\text{Im } z < 0$ no interior do disco $|z| = 1$.
- Obtenha a expressão do laplaciano em coordenadas polares dada no Exemplo 8.12.
- Obtenha a transformação do Exemplo 8.12 valendo-se de qualquer outra tripla de pares de pontos correspondentes.
- Faça uma interpretação geométrica da transformação (8.3), representando graficamente $z-i, z+i$ e o quociente nela indicado, à medida que $z = x$ varia de $-\infty$ a -1 , zero, -1 e $+\infty$. Construa as imagens dos semi-eixos imaginários positivo e negativo.
- Ache a transformação de Möbius que leva os pontos $z_1 = -i, z_2 = 0$ e $z_3 = i$ em $w_1 = i, w_2 = -i$ e $w_3 = 1$, respectivamente. Verifique que ela leva o semiplano $\text{Re } z < 0$ no disco unitário $|z| < 1$.
- Ache a transformação linear que leva 1 em $1, i$ em -1 e -1 em ∞ , respectivamente. Verifique que ela leva o disco $|z| < 1$ no semiplano inferior $\text{Im } z < 0$.
- Ache a transformação conforme que leva o 1º quadrante no disco unitário centrado na origem, de forma que os pontos $z_1 = i, z_2 = 0$ e $z_3 = 1$ são levados em $w_1 = -1, w_2 = -i$ e $w_3 = 1$, respectivamente. (Lembre-se de que $z \mapsto z^2$ leva o 1º quadrante no semiplano superior.)

15. Use o exercício anterior para achar a função harmônica no 1º quadrante, que assume o valor zero no semi-eixo real positivo e o valor 1 no semi-eixo imaginário positivo.

POTENCIAL ELETROSTÁTICO

Vamos considerar uma distribuição *estática* de cargas elétricas numa certa região do espaço, isto é, uma configuração de cargas que permanece a mesma com o correr do tempo. Como é sabido, cargas elétricas exercem forças umas sobre as outras, de forma que uma tal distribuição de cargas origina um campo de vetores, o chamado *campo elétrico*, que consiste no seguinte: se colocarmos uma carga de valor unitário em qualquer ponto do espaço, ela sofrerá ação de uma força, que é a resultante das forças sobre ela exercidas por todas as cargas da distribuição original; essa força é, por definição, o *campo elétrico* da referida distribuição de cargas. Esse campo também será estático, isto é, será uma função vetorial apenas do ponto do espaço onde ele é considerado, e não do tempo.

Particularizando ainda mais, supomos que o campo seja paralelo a um plano, que pode ser tomado como o plano xy . Isto acontece apenas em situações idealizadas; por exemplo, quando temos uma distribuição de cargas cuja densidade permanece constante ao longo de retas paralelas a uma dada direção, digamos, a direção do eixo Oz . Nessas condições, o campo elétrico é representado por um vetor \mathbf{E} de duas componentes E_x e E_y .

O campo elétrico satisfaz as duas equações seguintes:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0; \quad (8.4)$$

e

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad (8.5)$$

Estas duas equações correspondem exatamente às Eqs. 7.1 e 7.6 para fluidos (pp. 205 e 210). É como se substituíssemos o vetor velocidade \mathbf{q} pelo vetor campo elétrico \mathbf{E} . Assim, (8.4) significa que o campo elétrico é *solenoidal*, vale dizer, seu fluxo através de qualquer curva fechada é zero, o que é verdade desde que no interior dessa curva não haja cargas elétricas. A Eq. 8.5, por sua vez, significa que o trabalho do campo elétrico ao longo de um contorno fechado é zero.

Como no caso de fluidos, as Eqs. 8.4 e 8.5 são as equações de Cauchy-Riemann para as funções E_x e $-E_y$, de sorte que a função $E_x - iE_y$ é analítica, e isto estabelece ligação entre a teoria das funções analíticas e os campos eletrostáticos.

Os potenciais escalares

Exatamente como no caso de fluidos, introduzimos aqui os potenciais escalares ϕ e ψ . ϕ é a função escalar a partir da qual obtemos o campo elétrico mediante $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi$.

Observe a presença do sinal negativo, que não existia no caso de fluidos (quando escrevemos $\mathbf{q} = \operatorname{grad} \phi$). Ele é uma conveniência não-essencial, apenas para que ϕ , e não $-\phi$, represente a energia potencial de uma carga unitária no teorema de conservação da energia.

O potencial ψ , como no caso de fluidos, pode ser definido como função conjugada harmônica de $-\phi$.

As curvas $\phi(x, y) = \text{const.}$ e $\psi(x, y) = \text{const.}$ são as *curvas equipotenciais* e as *linhas de força*, respectivamente. Como se vê, claramente, em cada ponto o campo elétrico é tangente à linha de força e perpendicular à curva de potencial constante por esse ponto.

Dizer que ψ é conjugada harmônica de $-\phi$ é o mesmo que dizer que ϕ é conjugada harmônica de ψ (Exerc. 1 da p. 116), ou seja, que a função

$$f(z) = \psi + i\phi$$

é analítica. Do conhecimento dessa função, obtemos não somente os potenciais escalares e o campo elétrico, visto que

$$E_x - iE_y = -\phi_x - i\psi_x = -i(\psi_x - i\phi_x) = \overline{f'(z)}. \quad (8.6)$$

Lembremos que uma distribuição de cargas na superfície de um corpo metálico dá origem a um campo elétrico que, nos pontos dessa superfície, é perpendicular a ela. Como estamos lidando apenas com problemas planos, o corpo é cilíndrico, e sua superfície é substituída pela sua interseção com o plano xy (tomado perpendicular ao eixo do cilindro). Essa interseção é uma curva equipotencial, já que o campo elétrico é perpendicular a ela.

Estudaremos, a seguir, uma importante transformação, que nos permitirá descrever detalhadamente as linhas de força do campo elétrico originado

por um condensador carregado (Exemplo 8.4 adiante).

A transformação $w = z + e^z$

Vamos estudar a transformação $w = z + e^z = u + iv$, restrita à seguinte faixa F do plano $z = x + iy$ (Fig. 8.4a):

$$F : -\infty < x < \infty; \quad -\pi \leq y \leq \pi.$$

Escrevendo a transformação na forma

$$u = x + e^x \cos y, \quad v = y + e^x \sin y, \quad (8.7)$$

temos mais facilidade de visualizar as imagens das retas horizontais $y = \text{const.}$ Assim, a imagem de $y = 0$ é $u = x + e^x, v = 0$, que é o próprio eixo real do plano u , percorrido no mesmo sentido que sua pré-imagem, isto é, quando x varia de $-\infty$ a $+\infty$, o mesmo acontece com u .

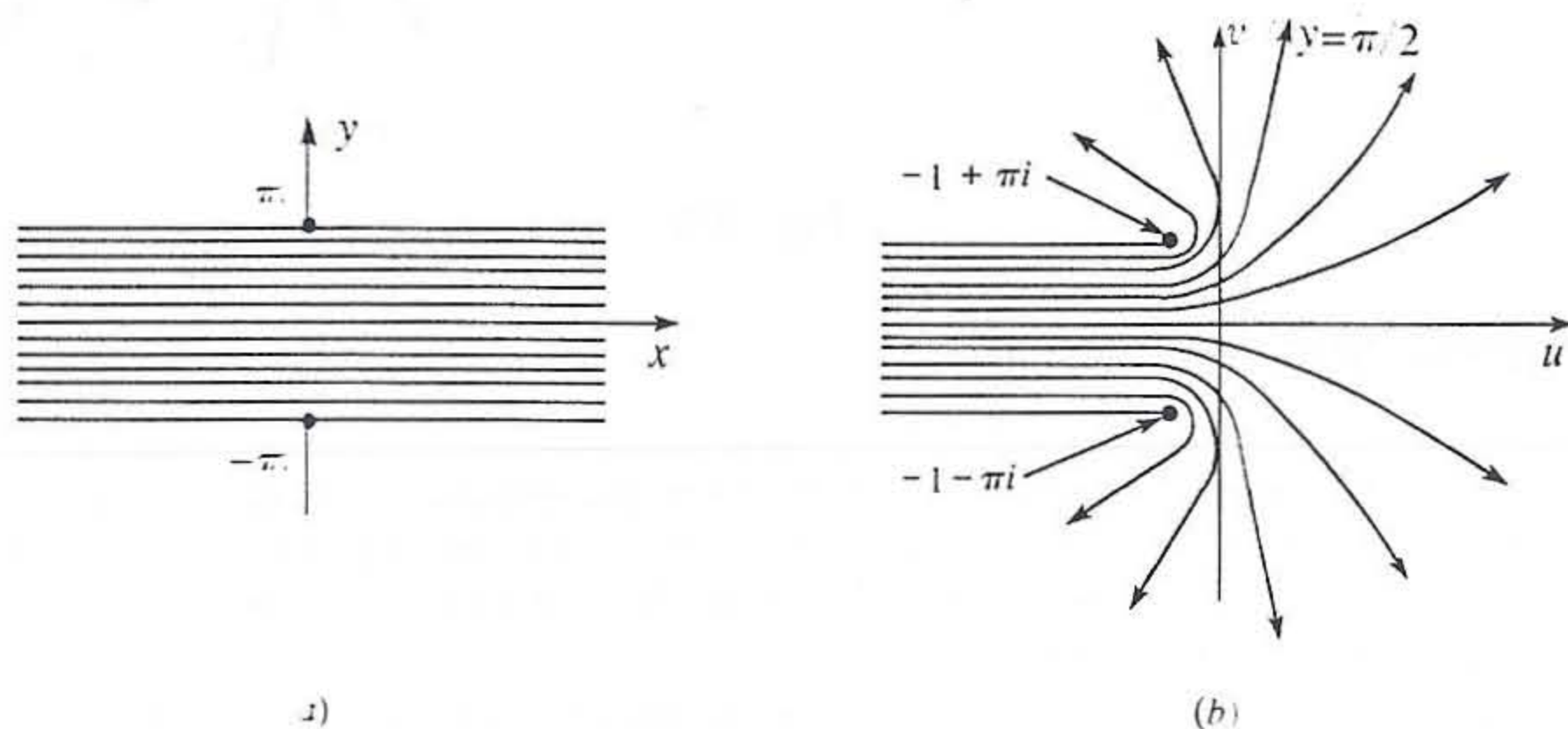


Fig. 8.4

Quando $y = \pi/2$, podemos eliminar x em (8.7), obtendo a equação da curva na forma $v = \pi/2 + e^u$, que pode ser facilmente esboçada (Fig. 8.4b).

Para estudarmos a imagem de qualquer outra reta $y = \text{const.}$, é conveniente considerar o declive do vetor tangente, dado por

$$\frac{v_x}{u_x} = \frac{e^x \sin y}{1 + e^x \cos y}.$$

Observe que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{v_x}{u_x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{v_x}{u_x} = \text{tg } y$$

Quando $0 < y \leq \pi/2$, a imagem da reta $y = \text{const.}$ é uma curva com declive positivo, o qual cresce do valor nulo em $x = -\infty$ ao valor $\text{tg } y$ em $x = +\infty$ (calcule e estude a derivada do declive); e, para cada x , esse declive vai crescendo à medida que y vai-se aproximando de $\pi/2$.

Quando y ultrapassa o valor $\pi/2$, isto é, $\pi/2 < y < \pi$, o declive começa com o valor nulo em $x = -\infty$ e vai crescendo e tendendo a $+\infty$ à medida que x se aproxima do valor $x = -\log(-\cos y)$, onde a derivada u_x se anula. Neste valor de x a curva tem tangente vertical; e, para $x > -\log(-\cos y)$, o declive é negativo.

Quando $y = \pi$, a curva é simplesmente o raio $v = \pi$ percorrido uma vez de $u = -\infty$ a $u = -1$ quando x varia de $-\infty$ a $x = 0$ (note que $u = x - e^x$), e outra vez de $u = -1$ a $u = -\infty$ quando x varia de $x = 0$ a $x = +\infty$.

Como v é função ímpar de y , para obtermos as imagens das retas com y negativo, basta refletir no eixo dos u as imagens obtidas com y positivo.

O condensador de placas paralelas

Vamos considerar dois exemplos interessantes da Eletrostática, o primeiro deles ilustrando um condensador de placas planas e paralelas, infinitas em todas as direções; e o segundo, um condensador cujas placas são semiplanos paralelos.

8.13. Exemplo. Seja a um número positivo qualquer. De acordo com (8.6), a função

$$f(z) = az = ax + iay,$$

definida em todo o plano, dá origem ao campo elétrico

$$E_x + iE_y = \overline{if'(z)} = -ia,$$

isto é,

$$E_x = 0 \quad \text{e} \quad E_y = -a.$$

Além disso, $\psi = ax$ e $\phi = ay$, de sorte que as linhas de força são as retas verticais $x = \text{const.}$, enquanto as retas horizontais $y = \text{const.}$ são as curvas (no presente caso, retas) equipotenciais.

Quando nos restringimos à faixa $-h < y < h$, a situação que acabamos de descrever corresponde a um condensador de placas paralelas $y = h$ e $y = -h$, respectivamente. Se designarmos por V e $-V$ os potenciais nessas placas, devemos tomar $a = V/h$ para que o potencial no interior do condensador ($-h < y < h$ seja $\phi = Vy/h$; e o campo elétrico será dado pela única componente (da direção vertical) $E_y = -V/h$. Faça a figura correspondente.

8.14. Exemplo. Vamos agora considerar o caso de um condensador cujas placas são dois semiplanos paralelos, as quais estão separadas por uma distância $2h$ e são mantidas a potenciais V e $-V$, respectivamente. Para isso, vamos nos valer da transformação estudada há pouco, $w = z + e^z$. Como vimos, ela transforma a faixa $-\pi < y < \pi$ do plano z em todo o plano w , excetuados os raios $w = u \pm i\pi$, u variando de $-\infty$ a -1 . Portanto, se substituirmos z por $\pi z/V$ e w por $\pi w/h$, obteremos a transformação

$$\frac{\pi w}{h} = \frac{\pi z}{V} + e^{\pi z/V}$$

que leva a faixa $-V < y < V$ do plano z em todo o plano w , excetuados os raios $u \pm ih$, u variando de $-\infty$ a -1 . Finalmente, trocamos os papéis de z e w , obtendo a transformação

$$z \longmapsto w = g(w) = \frac{h}{\pi} \left(\frac{\pi w}{V} - e^{\pi w/V} \right),$$

que agora leva a faixa $-V < v < V$ do plano w em todo o plano z , excetuados os raios $x = ih$, x variando de $-\infty$ a -1 (Fig. 8.5). São estes raios no plano z que representam as placas do condensador.

Observe que g é a inversa da função $z \longmapsto w = f(z)$, que produz o campo elétrico e os potenciais $\psi = u$ e $\phi = v$. Desdobrando a função g em suas partes real e imaginária, obtemos:

$$x = \frac{h}{\pi} \left(\frac{\pi u}{V} - e^{\pi u/V} \cos \frac{\pi v}{V} \right), \quad y = \frac{h}{\pi} \left(\frac{\pi v}{V} + e^{\pi u/V} \sin \frac{\pi v}{V} \right).$$

Estas são as equações paramétricas das linhas de força $u = \text{const.}$ e das curvas equipotenciais $v = \text{const.}$ O campo elétrico, em sua representação complexa, é dado por

$$E = E_x - iE_y = \overline{if'(z)} = \frac{-i}{dz/du} = -i \frac{V}{h} \cdot \frac{1}{1 + e^{\pi w/V}}$$

A Fig. 8.5b ilustra as linhas de força, que se aproximam de retas nas partes mais internas ao condensador e se curvam nas proximidades das bordas. O campo elétrico, por sua vez, aproxima-se do valor $-iV/h$ (do exemplo anterior) nos pontos mais internos ao condensador ($u \rightarrow -\infty$). Observe também que $\bar{w} \rightarrow \pm iV$ nas proximidades das bordas, e, em conseqüência, aí o campo tende a infinito. Isto não corresponde à realidade, apenas traduz as limitações do modelo matemático.

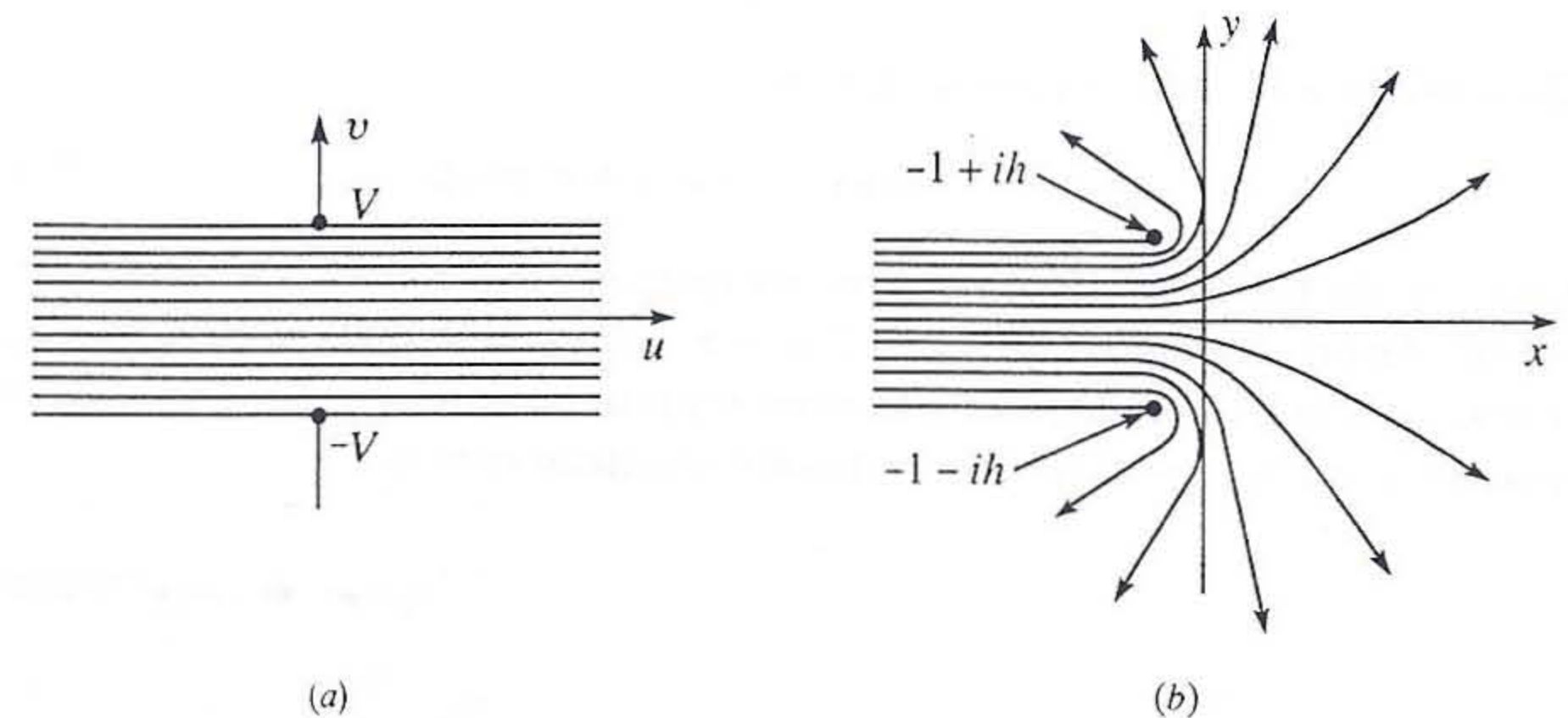


Fig. 8.5

EXERCÍCIOS

1. A Fig. 8.5 pode ser considerada ilustrativa de um escoamento fluido ao longo de um canal de largura $2h$, que se abre em $x = -1$. Escreva a função potencial $F(z) = \phi + i\psi$ adequada a essa situação, e descreva o campo de velocidades do escoamento, conforme a notação do capítulo anterior.
2. Determine o potencial ϕ no interior de um condensador formado por dois cilindros coaxiais, um de raio R , onde o potencial é mantido em um valor constante V e o outro de raio $a < R$, mantido a potencial zero.
3. Determine o potencial eletrostático ϕ no semicilindro $x^2 + y^2 < 1, y > 0$, tal que $\phi = 0$ em $y = 0$ e $\phi = 1$ em $x^2 + y^2 = 1$. *Sugestão:* A inversa da transformação obtida no Exemplo 8.9 leva o disco unitário no semiplano superior, e o diâmetro desse disco no semi-eixo $[0, +i\infty]$. Observe, então, que a referida inversa leva o semidisco superior no primeiro quadrante. Finalmente, $z \longmapsto z^2$ leva este quadrante no semiplano superior.

REFERÊNCIAS E BIBLIOGRAFIA

Existem muitos livros bons de variáveis complexas recomendáveis ao estudante que deseje prosseguir seus estudos nessa área. Em português temos a citar o livro de Alcides Lins Neto [L], mais avançado que o nosso e que já se encontra em sua 2ª edição.

O livro de Conway [C] é um texto muito utilizado nos cursos. Seu Apêndice B é uma coletânea de referências bibliográficas bem selecionadas e comentadas, dando uma orientação bastante útil ao estudante.

O livro de Ahlfors [A1], vinte anos mais antigo que o de Conway, continua um clássico consagrado, muito usado nos cursos, e vai além do texto de Conway no material apresentado. Mais extenso ainda, de feição enciclopédica, é o livro de Markushevich [M1].

Ao estudante interessado em Dinâmica dos Fluidos recomendamos, além dos títulos [C1] e [M2], o livro de Batchelor [B], cujas seções 6.6 e 6.7 contêm tópicos relacionados ao material tratado em nosso capítulo 7.

- [A1] L. AHLFORS. *Complex Analysis*, McGraw-Hill.
- [A2] G. ÁVILA. *Introdução à Análise Matemática*. Editora Edgard Blücher Ltda., 2ª edição, 1998.
- [A3] G. ÁVILA, *Cálculo 3 — Funções de Várias Variáveis*, LTC Editora. 5ª edição impressa em 1998.
- [B] G. K. BATCHELOR. *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press.
- [C1] A. J. CHORIN E J. E. MARSDEN. *A Mathematical Introduction to Fluid Dynamics*, Springer-Verlag.
- [C2] J. B. CONWAY, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag.
- [L] A. LINS-NETO, *Funções de uma variável complexa*, Projeto Euclides. IMPA.
- [M1] A. I. MARKUSHEVICH, *Theory of Functions*, Chelsea Publishing Company.
- [M2] R. MEYER. *An Introduction to Mathematical Fluid Mechanics*, Wiley Interscience.

ÍNDICE ALFABÉTICO

A

Ângulo de ataque, 232
Aplicação topológica, 250
Arco
 contínuo, 75
 de Jordan, 75
 regular, 78
 simples, 75

B

Boundary layer, 243

C

Cálculo de integrais
 de funções trigonométricas, 173-74
 impróprias
 de funções multivalentes, 169-73
 por resíduos, 161ss
Camada de contorno, 243
Caminho, 78
Campo elétrico, 260-61
 solenoidal, 260
Campo irrotacional, 210
Circulação, 209
Complementar de um conjunto, 27
Complexo conjugado, 6
Condensador, 263-64
Conectividade
 múltipla, 77
 simples, 77
Conjunto
 aberto, 26
 compacto, 28
 conexo, 28
 fechado, 27
 limitado, 28
Constante de Euler, 21, 137
Continuação analítica, 179-81
 ao longo de caminhos, 188
 da função gama, 201-02
 direta de elementos funcionais, 188
 por cadeias, 192-93
 por reflexão, 183
 unicidade da, 179
Continuidade, 37
Contorno, 78
Convergência
 pontual, 120
 simples, 120
 uniforme, 120ss

Corte, 66
Curva de Jordan, 76
 fechada, 76
 regular, 78
Curvas equipotenciais, 261

D

Derivada, 49ss
 direcional, 50
Desenvolvimento
 binomial, 137
 de Laurent, 144-46
 de MacLaurin, 134
 de Taylor, 134
Desigualdade do triângulo, 13-14
Disco, 26
 de convergência, 129
Distância de dois pontos, 29
Divisão de séries de potências, 139-40
Doublet, 220

E

Elemento funcional, 187
Equação
 de Bernoulli, 228
 de Cauchy-Riemann, 53-54
 na forma polar, 57
 de conservação da massa, 205
 de continuidade, 205
 de Laplace, 109
 invariância por representação conforme, 248
 de Poisson, 114
Escoamento paralelo, 213
Estabilidade do problema de Dirichlet, 117
Estacionário, 204
Exponencial, 21ss, 61, 68
Exponencial z^n , 70

F

Fluido
 homogêneo, 204
 incompressível, 204
 perfeito, 204
Fluxo, 205, 212
Fonte, 215-16
Força de levantamento, 228
Fórmula(s)
 de Blasius, 229-30
 de Euler, 24, 63
 integral da derivada enésima, 103

- integral de Cauchy. 101
de De Moivre. 11, 24
de Kutta-Joukovski. 231-32
- Fronteira. 27
natural. 191
- Função(ões). 34-35
analítica. 49ss
contínua. 37
de corrente. 212
definida por integral. 198ss
exponencial. 21-22, 61, 68
exponencial z^n . 70
gama. 200ss
harmônica. 109
harmônica conjugada. 111
hiperbólicas. 64
holomorfa. 51
ímpar. 143
inteira. 52
inversa. 250
logarítmica. 65ss
multivalente. 65, 70ss
par. 143
potenciais. 210-11
regular. 51
simples. 251
trigonométricas. 63-64
trigonométricas inversas. 72
univalente. 65
- G**
- Germe de função analítica. 187
- H**
- Homeomorfismo. 250
- I**
- Identidade de séries de potências. 136
- Integral(is)
curvilínea. 81ss
de contorno. 81ss
de Fresnel. 168
- Inversão global. 251
local. 250
- L**
- Lema de Jordan. 164-65
- Limite. 36-37, 40
- Linhas
de corrente. 212
de força. 261
- Logaritmo. 65ss
determinação principal. 66
ramo. 66
valor principal. 66
- M**
- Módulo. 6
máximo. 114
mínimo. 117
- Movimento estacionário. 204
- Multiplicação
de números complexos. 3, 4, 9
de séries de potências. 138-39

N

- Norma. 6
- Número complexo. 2ss
adição. 3
argumento. 8
módulo. 6
multiplicação. 3, 4
oposto. 3
parte imaginária. 2
parte real. 2
produto. 3, 4, 9
quociente. 6, 10
representação gráfica. 4
representação polar. 7, 8
subtração. 3
- Números de Bernoulli. 143
- P**
- Perfil de Joukovski. 238
- Permanência das relações funcionais. 181-82
- Plano
complexo. 4
cortado. 66
estendido. 29
- Pólo. 153
- Ponto
de acumulação. 28
de estagnação. 212
de ramificação. 66, 193
interior. 26
isolado. 28
múltiplo. 76
- Potencial(is)
complexo. 212
de velocidade. 211
eletrostático. 260
escalares. 210-11, 261
- Primitiva. 93
- Princípio
de reflexão. 183
do argumento. 176
do máximo. 117
do mínimo. 116
do módulo máximo. 114
do módulo mínimo. 116
- Problema
de Dirichlet. 114
de Neumann. 114
- Produto
de números complexos. 3, 4, 9
de séries de potências. 138-39
- Prolongamento analítico. 179-81
unicidade do. 179

Q

- Quociente
de números complexos. 6, 10
de séries de potências. 138-39

R

- Raio de convergência. 129, 131
- Raiz
da unidade. 16
enésima. 15
primitiva. 18
- Ramo. 66

- Razão cruzada. 256
- Região. 28
multiplicamente conexa. 77
simplesmente conexa. 77
- Regra da cadeia. 52
- Regularidade no infinito. 147
- Representação
conforme. 245ss
paramétrica. 75
- Resíduos. 157
- Rotação pura. 218

S

- Série
binomial. 137
de funções. 97ss
de Laurent. 144
de MacLaurin. 134
de potências. 103ss
de Taylor. 134
dupla de Weierstrass. 141
- Singularidade. 189
do tipo pólo. 153
essencial. 154
isolada. 151
na fronteira do disco de convergência. 190
removível. 152
- Sumidouro. 215-16
- Superfície de Riemann. 193ss

T

- Teorema
da aplicação de Riemann. 252
da divergência. 90
da série dupla de Weierstrass. 141
da unicidade da extensão analítica. 179
de Casorati-Weierstrass. 155
de Cauchy (Cauchy-Goursat). 91-92

- de Green. 89-90
de Jordan. 77
de Liouville. 106, 150
de Morera. 106
de Rouché. 177
do resíduo. 157
fundamental da Álgebra. 107, 177
- Teste M de Weierstrass. 122
- Transformação
conforme. 245ss
de Joukovski. 235
de Möbius. 232-34, 253ss
de Schwarz-Christoffel. 252

U

- Unicidade
da continuação analítica. 179
do problema de Dirichlet. 155
do problema de Neumann. 117
do prolongamento analítico. 179
- Unidade imaginária. 2

V

- Valor
absoluto. 6
propriedades do. 13
principal. 66, 70
- Velocidade complexa. 212
- Viscosidade. 242
- Vizinhança. 28
do infinito. 29
perfurada. 26
- Vórtice. 215-16

Z

- Zero de ordem m . 148