Usando a transformação $z = e^{i\theta}$, obtemos:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta;$$

logo, a integral acima assume a forma:

$$\int_{|z|=1} f\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right)\frac{dz}{iz}.$$

Como exemplo, seja calcular $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos\theta - 2}$. Temos:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos\theta - 2} &= \int_{|z|=1} \frac{1}{(z + z^{-1})/2 - 2} \cdot \frac{dz}{iz} \\ &= \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 4z + 1} \\ &= \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z - 2 - \sqrt{3})(z - 2 + \sqrt{3})} \\ &= \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{-2\sqrt{3}};\end{aligned}$$

portanto,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos\theta - 2} = \frac{-2\pi}{\sqrt{3}}.$$

EXERCÍCIOS

Calcule as integrais dadas a seguir; nas de números 2 e 3, tome $|a| < 1$, e na de número 4, tome $a > b > 0$.

1. $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \operatorname{sen}^2\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{6}}$.
2. $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$.
3. $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\operatorname{sen}\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$.
4. $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$.

RESÍDUOS LOGARÍTMICOS E PRINCÍPIO DO ARGUMENTO

Entende-se por *resíduo logarítmico* de uma função f num certo ponto ao resíduo de f'/f nesse ponto, isto é, ao resíduo da derivada logarítmica de f. É claro que para isso estamos supondo que f seja regular no referido ponto.

Vamos supor que f tenha um zero de ordem r num ponto z_0, de sorte que

$$f(z) = (z - z_0)^r g(z),$$

onde g é regular e diferente de zero em z_0. Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{r(z - z_0)^{r-1}g(z) + (z - z_0)^r g'(z)}{(z - z_0)^r g(z)} \\ &= \frac{r}{z - z_0} + h(z),\end{aligned}$$

onde $h = g'/g$ é regular no ponto z_0. Vemos assim que *o resíduo logarítmico de uma função f num ponto que seja zero de ordem r da função é igual à ordem r desse zero.*

O raciocínio anterior pode ser repetido no caso em que z_0 seja pólo de ordem s, bastando substituir r por s (Exerc. 1 adiante), o que permite afirmar que *o resíduo logarítmico de uma função f num ponto que seja pólo de ordem s da função é igual a $-s$.*

Juntando esses dois resultados, demonstra-se facilmente o teorema que enunciamos a seguir.

5.12. Teorema. *Seja f uma função que, à exceção de pólos, é analítica numa região simplesmente conexa R. Seja $C \subset R$ um contorno fechado simples, orientado positivamente, e cujo interior contenha um número finito de zeros e pólos de f. Então,*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = Z - P,$$

onde Z e P denotam, respectivamente, os números de zeros e pólos de f no interior de C, contadas as multiplicidades.