A fórmula (5.7) se generaliza para o caso de um pólo de ordem m qualquer. Deixamos ao leitor a tarefa de estabelecer o seguinte resultado geral:

Se z_0 é pólo de ordem m de uma função f, então

$$(\text{res.}\, f)(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z - z_0)^m f(z)]. \tag{5.8}$$

EXERCÍCIOS

1. Seja $f(z)$ uma função analítica e diferente de zero no ponto $z = z_0$. Mostre que a função $g(z) = f(z)/(z - z_0)$ tem pólo simples nesse ponto, com resíduo igual a $f(z_0)$.
2. Sejam $p(z)$ e $q(z)$ funções regulares no ponto z_0, $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$ e $q'(z_0) \neq 0$. Mostre que z_0 é pólo simples da função $f(z) = p(z)/q(z)$, com resíduo igual a $p(z_0)/q'(z_0)$.
3. Use a regra (5.8) para determinar o resíduo de
$$f(z) = \frac{e^{\pi i z}}{(z-\pi)^4}$$
no seu pólo $z = \pi$. Obtenha o mesmo resultado desenvolvendo $e^{i\pi z} = e^{i\pi^2} e^{i\pi(z-\pi)}$ em série de potências de $z - \pi$.

Determine os pólos, as ordens e os resíduos correspondentes de cada uma das funções dadas nos Exercs. 4 a 11.

4. $\dfrac{z - \operatorname{sen} z}{z^4}$. 5. $\dfrac{z - \operatorname{sen} z}{z^6}$. 6. $\coth z$. 7. $\dfrac{e^z}{4z^2 + \pi^2}$.

8. $\dfrac{e^{3z}}{z(z-1)^2}$. 9. $\dfrac{1}{z \operatorname{sen} z}$. 10. $\dfrac{e^z}{z \operatorname{sen} z}$. 11. $\dfrac{\log(1+z)}{z^2 \operatorname{sen} z}$.

Neste último exercício, considere o plano cortado ao longo do semi-eixo $(-\infty, -1]$.

12. Calcule a integral
$$\oint_C \frac{e^z}{(z-i)(z^2+4)} dz,$$
tomando para C, sucessivamente, os seguintes círculos, todos orientados positivamente:
a) de raio 3, centrado na origem;
b) de raio 3, centrado em $z = -3i$;
c) de raio 1/3, centrado em $z = 2i$;
d) de raio 2, centrado no ponto $z = 1$.

Calcule as integrais dadas nos Exercs. 13 a 15.

13. $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{\operatorname{sen} z} dz$. 14. $\displaystyle\oint_{|z-1|=1} \operatorname{tg} 3z \, dz$. 15. $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\cot z}{z} dz$.

RESPOSTAS E SUGESTÕES

6. Pólos simples em $z = k\pi i$, k inteiro.
7. Pólos simples em $z = \pm i\pi/2$.

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DE FUNÇÕES RACIONAIS

Veremos agora como o teorema do resíduo pode ser utilizado para calcular certas integrais impróprias de funções racionais. Começamos com um exemplo concreto.

5.6. Exemplo. Seja calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dz}{z^2+1}.$$

O integrando, $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1} = \dfrac{1}{(z-i)(z+i)}$, possui pólos simples nos pontos $z = \pm i$. Seja C_R o semicírculo do semiplano $\operatorname{Im} z \geq 0$, de raio R e centro na origem. Supondo $R > 1$, o contorno formado pelo segmento $[-R, R]$, seguido de C_R (Fig. 5.2), contém o pólo $z = i$, onde o resíduo de f é $1/2i$. Pelo teorema do resíduo,

$$\int_{-R}^{R} \frac{dz}{z^2+1} + \int_{C_R} \frac{dz}{z^2+1} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi. \tag{5.9}$$

Por outro lado, $|f(z)| \leq 1/(|z|^2 - 1)$, donde

$$\left| \int_{C_R} \frac{dz}{z^2+1} \right| \leq \frac{1}{R^2-1} \int_{C_R} |dz| = \frac{\pi R}{R^2-1}.$$

Isto mostra que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{dz}{z^2+1} = 0;$$