menor ou maior do que 1, respectivamente.

EXERCÍCIOS

Nos Exercs. 1 a 5, obtenha os desenvolvimentos em séries de potências, conforme especificação em cada caso. Determine os respectivos discos de convergência e represente-os graficamente.

1. $f(z) = 1/z$ em potências de $z + i$.
2. $f(z) = 1/z$ em potências de $z - i$.
3. $f(z) = i/(z + i)$ em potências de $z - 1$.
4. $f(z) = 1/(2z - 3)$ em potências de z.
5. $f(z) = 1/(2z - 3)$ em potências de $z + i$.
6. $f(z) = 1/z^2$ em potências de $z - 1$.
7. $f(z) = 1/z^3$ em potências de $z + 2$.

Determine os raios de convergência das séries dadas nos Exercs. 8 a 16.

8. $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$.
9. $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$.
10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!}$.
11. $\sum_{n=0}^{\infty} \log(3n^2+5)(z+i)^n$.
12. $\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{senh} n)z^n$.
13. $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2})^{3n} z^n$.
14. $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n})^n z^n$.
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n} z^{2n}$.
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} z^{n^2}$.
17. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, onde $a_{2n} = 2^{2n}$ e $a_{2n+1} = 5^{2n+1}$.
18. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, onde $a_n = n^2$ se n é primo e $a_n = 0$ se n não é primo.

RESPOSTAS E SUGESTÕES

1. $\frac{1}{z} = \frac{1}{-i + (z+i)} =$ etc. O disco de convergencia é $|z + i| < 1$.

3. $\frac{i}{z+i} = \frac{i}{1 + i + (z-1)} = \frac{i}{1+i} \cdot \frac{1}{1 + (z-1)/(1+i)} =$ etc. O disco de convergência é $|z - 1| < \sqrt{2}$.

6. Obtenha primeiro a série de $1/z$, depois derive.

8. $r = 1$. 11. $r = 1$. 12. $r = 1/e$. 14. $r = 0$.

15. Trata-se de uma série de potências de $w = z^2$.

16. Observe que $a_{n^2} = n/3n$.

17. $r = 1/5$. 18. $r = 1$.

SÉRIES DE POTÊNCIAS, SÉRIE DE TAYLOR

Vamos estabelecer agora uma caracterização das funções analíticas como aquelas que podem ser desenvolvidas em séries de potências.

4.13. Teorema. *Toda série de potências*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{4.11}$$

representa uma função analítica no seu disco de convergência $|z - z_0| < r$. Ela pode ser derivada termo a termo um número arbitrário de vezes; e as séries assim obtidas possuem o mesmo raio de convergência r da série original, e representam as derivadas da função f.

Demonstração. Dado z qualquer no disco $|z - z_0| < r$, é claro que existe $r_1 < r$ tal que $|z - z_0| < r_1$ (Fig. 4.3a). Neste disco a série (4.11) converge uniformemente (Teorema 4.11) e pode, então, ser derivada termo a termo (Teorema 4.6). A série de derivadas

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z - z_0)^n \tag{4.12}$$

converge pelo menos no disco $|z - z_0| < r$, de forma que seu raio de convergência r' é pelo menos r.

Suponhamos que r' pudesse ser maior do que r. Seja então r'' tal que $r < r'' < r'$ e seja z tal que $r < |z - z_0| < r''$ [Fig. 4.3(b)]. A série (4.12) converge uniformemente em $|z - z_0| < r''$ (Teorema 4.11); logo, pode ser integrada termo a termo ao longo de um caminho C, ligando z_0 a z (Teorema