UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Departamento de Matemática Aplicada e Estatística

Introdução a Álgebra Linear e Equações Diferenciais

Luiz A. C. Ladeira

SÃO CARLOS - SP

2010

Sumário

Capítulo 1

Noções preliminares

Neste capítulo reunimos fatos básicos sobre vetores, matrizes, sistemas de equações lineares e números complexos, que serão usados nos capítulos seguintes. Assumiremos conhecido o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e suas propriedades algébricas elementares: suas operações de adição e multiplicação são associativas, comutativas, têm elemento neutro, cada número tem seu oposto aditivo e cada número não nulo tem seu inverso multiplicativo.

1.1 Espaço euclidiano $n-$ dimensional

As noções de par ordenado (x, y) e terna ordenada (x, y, z) de números reais têm uma extensão natural ao conceito de n**-upla** $(x_1, \ldots, x_n)$, que é uma sucessão ordenada de n números reais. Denotaremos as $n-$uplas por letras em negrito. Se $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, cada um dos números $x_1, \ldots, x_n$ é chamado uma **componente** (ou **coordenada**) de $\mathbf{x}$. Duas $n-$uplas $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(y_1, \ldots, y_n)$ são ditas **iguais** (indicamos $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$) se e somente se $x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$. O conjunto de todas $n-$uplas de números reais é denotado por $\mathbb{R}^n$, isto é,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \; : \; x_k \in \mathbb{R}, \; k = 1, \ldots, n\}.$$

Recordemos da Geometria Analítica que $\mathbb{R}^3$ pode ser identificado com o conjunto V_3 dos *vetores geométricos* (definidos pelos segmentos orientados) por meio da correspondência que a cada $\mathbf{v} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$ de V_3 associa a terna $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k} \in V_3 \;\longleftrightarrow\; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3. \tag{1.1}$$

É claro que ao vetor $\mathbf{i}$ corresponde a terna $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, ao vetor $\mathbf{j}$ corresponde a terna $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$ e a $\mathbf{k}$ corresponde $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$. O **módulo** (ou **comprimento**) do vetor $\mathbf{v}$ é $\|\mathbf{v}\| = (a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}$. A correspondência (1.1) é importante, pois permite caracterizar elementos geométricos, tais como reta, plano, etc, em termos de equações algébricas.

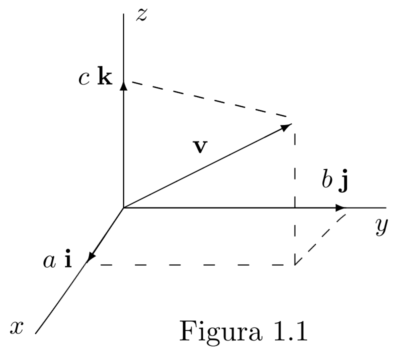


Figura 1.1

Por conta desta identificação, vamos escrever (com um pequeno abuso de notação) $\mathbf{v} = (a\,,b\,,c)$ e chamar ternas ordenadas de vetores. Por extensão, as $n-$uplas também são chamadas de **vetores**; neste contexto, os números reais serão chamados **escalares**. Lembremos também que, se $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $\alpha\,\mathbf{v} = \alpha\,a\,\mathbf{i} + \alpha\,b\,\mathbf{j} + \alpha\,c\,\mathbf{k}$, ou seja, ao vetor $\alpha\,\mathbf{v}$ associamos a terna $(\alpha\,a, \alpha\,b, \alpha\,c)$. Da mesma maneira, se $(a_1\,,\,b_1\,,\,c_1)$ e $(a_2\,,\,b_2\,,\,c_2)$ forem as ternas associadas aos vetores $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$, respectivamente (ou seja, $\mathbf{w}_1 = a_1\,\mathbf{i} + b_1\,\mathbf{j} + c_1\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{w}_2 = a_2\,\mathbf{i} + b_2\,\mathbf{j} + c_2\,\mathbf{k}$), então temos $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = (a_1 + a_2)\,\mathbf{i} + (b_1 + b_2)\,\mathbf{j} + (c_1 + c_2)\,\mathbf{k}$; assim, ao vetor $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ fica associado a terna $(a_1 + a_2\,,\,b_1 + b_2\,,\,c_1 + c_2\,)$.

Essas observações mostram a importância de se definir adição de ternas e multiplicação de ternas por números reais: dadas as ternas (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) e o número real α, definimos:

$$
\begin{aligned}
&(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)\\
&\alpha\,(a_1, b_1, c_1) = (\alpha\,a_1, \alpha\,b_1, \alpha\,c_1)
\end{aligned}
$$

Pode-se mostrar que, quaisquer que sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha\,,\ \beta \in \mathbb{R}$, temos:

A1) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$
A2) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$
A3) se $\mathbf{0}$ designa a terna $(0,0,0)$, então $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$.
A4) para qualquer $\mathbf{u}=(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, a terna $\mathbf{v}=(-a,-b,-c)$ satisfaz $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{0}$
M1) $\alpha\,(\beta\,\mathbf{u})=(\alpha\,\beta)\,\mathbf{u}$
M2) $(\alpha+\beta)\,\mathbf{u}=\alpha\,\mathbf{u}+\beta\,\mathbf{u}$
M3) $\alpha\,(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\alpha\,\mathbf{u}+\alpha\,\mathbf{v}$
M4) $1\,\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

As operações acima estendem-se de modo natural ao $\mathbb{R}^n$. Dados $\mathbf{u}=(a_1\,,\dots,a_n)$ e $\mathbf{v}=(b_1\,,\dots,b_n)$ em $\mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos a **soma** $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ e o **produto por escalar** $\alpha\,\mathbf{u}$ por

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(a_1\,,\dots,a_n)+(b_1\,,\dots,b_n)=(a_1+b_1\,,\dots,a_n+b_n) \tag{1.2}$$
$$\alpha\,\mathbf{u}=\alpha\,(a_1\,,\dots,a_n)=(\alpha\,a_1\,,\dots,\alpha\,a_n) \tag{1.3}$$

Como no caso das ternas ordenadas, pode-se verificar que em $\mathbb{R}^n$ estão satisfeitas as propriedades A1) a A4) e M1) a M4). Por estarem satisfeitas estas propriedades, dizemos que $\mathbb{R}^n$ é um **espaço vetorial**.

A igualdade (1.2) define a soma de dois vetores. Para somar três vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, podemos considerar as combinações $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ e $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$. A propriedade associativa afirma que estes vetores são iguais. Por causa desta propriedade, vamos omitir os parênteses. Mais geralmente, dados p vetores $\mathbf{u}_1\,,\,\mathbf{u}_2\dots,\mathbf{u}_p$ e p números reais $\alpha_1\,,\,\alpha_2\,,\dots,\alpha_p\,$, podemos definir o vetor

$$\alpha_1\,\mathbf{u}_1+\alpha_2\,\mathbf{u}_2+\cdots+\alpha_p\,\mathbf{u}_p\,,$$

que chamaremos **combinação linear** de $\mathbf{u}_1\,,\,\mathbf{u}_2\dots,\mathbf{u}_p$. Por exemplo, o vetor $(3,1,0,5)$ de $\mathbb{R}^4$ é combinação linear de $(6,3,1,7)$, $(3,2,1,2)$ e $(0,2,2,8)$ pois

$$1\cdot(6,3,1,7)+(-1)\cdot(3,2,1,2)+0\cdot(0,2,2,8)=(3,1,0,5).$$

Já o vetor $(6,1,0)$ de $\mathbb{R}^3$ não é combinação linear de $(6,0,0)$, $(3,6,4)$ e $(5,9,6)$; de fato, se $(6,1,0)$ fosse combinação linear de $(6,0,0)$, $(3,6,4)$ e $(5,9,6)$ existiriam números x,y,z tais que

$$x\,(6,0,0)+y\,(3,6,4)+z\,(5,9,6)=(6,1,0)\,,$$

ou seja,

$$(6\,x+3\,y+5\,z, 6\,y+9\,z, 4\,y+6\,z)=(6,1,0).$$

Desta igualdade vemos que x, y, z deveriam satisfazer o sistema de equações

$$\begin{cases} 6\,x+3\,y+5\,z=6 & (1) \\ \phantom{6\,x+{}}6\,y+9\,z=1 & (2) \\ \phantom{6\,x+{}}4\,y+6\,z=0 & (3) \end{cases}$$

As equações (2) e (3) mostram que não existem tais números x, y, z. Logo, $(6,1,0)$ não é combinação linear de $(6,0,0)$, $(3,6,4)$ e $(5,9,6)$.

Exemplo 1.1. *Mostrar que todo vetor* $\mathbf{x}=(x_1\,,\ldots,x_n)$ *se escreve, de modo único, como combinação linear dos vetores*

$$\mathbf{e}_1=(1,0,\ldots,0),\quad \mathbf{e}_2=(0,1,\ldots,0),\ \ldots\ ,\ \mathbf{e}_n=(0,0,\ldots,1)$$

(Por causa desta propriedade, diremos que os vetores $\mathbf{e}_1\,,\mathbf{e}_2\,,\ldots,\mathbf{e}_n$ *formam uma* base *de* $\mathbb{R}^n$*, chamada* **base canônica** *de* $\mathbb{R}^n$*).*

Podemos escrever

$$\begin{aligned}(x_1\,,\ldots,x_n) &= (x_1\,,0,\ldots,0)+\cdots+(0\,,\ldots,x_n)= \\ &= x_1\,(1\,,0,\ldots,0)+\cdots+x_n\,(0,0,\ldots,1)= \\ &= x_1\,\mathbf{e}_1\,+\cdots+x_n\,\mathbf{e}_n.\end{aligned}$$

Logo, $\mathbf{x}$ é combinação linear de $\mathbf{e}_1\,,\ldots,\mathbf{e}_n$. Para ver que esta é a única maneira de escrever $\mathbf{x}$ como combinação linear de $\mathbf{e}_1\,,\ldots,\mathbf{e}_n$, suponhamos que $\mathbf{x}$ também se escreva como $\mathbf{x}=t_1\,\mathbf{e}_1\,+\cdots+t_n\,\mathbf{e}_n$. Então

$$\begin{aligned}(x_1\,,\ldots,x_n) &= \mathbf{x}=t_1\,\mathbf{e}_1\,+\cdots+t_n\,\mathbf{e}_n= \\ &= t_1\,(1\,,0,\ldots,0)+\cdots+t_n\,(0,0,\ldots,1)= \\ &= (t_1\,,\ldots,t_n).\end{aligned}$$

Logo, $t_1=x_1\,,\ldots,t_n=x_n$. □

Exercício 1.1. *Determine se* $\mathbf{v}$ *é combinação linear de* $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ *e* $\mathbf{u}_3$*, sendo:*

(a) $\mathbf{v}=(2,-5,-1)$, $\mathbf{u}_1=(1,0,0)$, $\mathbf{u}_2=(0,1,1)$ *e* $\mathbf{u}_3=(-1,1,1)$*;*
(b) $\mathbf{v}=(2,3,-1)$, $\mathbf{u}_1=(1,0,0)$, $\mathbf{u}_2=(0,1,1)$ *e* $\mathbf{u}_3=(-1,1,1)$*;*
(c) $\mathbf{v}=(-1,-1,2)$, $\mathbf{u}_1=(1,1,1)$, $\mathbf{u}_2=(1,1,0)$ *e* $\mathbf{u}_3=(0,0,1)$*;*
(d) $\mathbf{v}=(1,-1,4)$, $\mathbf{u}_1=(1,1,1)$, $\mathbf{u}_2=(1,1,0)$ *e* $\mathbf{u}_3=(0,0,1)$*;*

Além das operações de adição de $n-$upla e multiplicação de $n-$upla por número real, podemos definir em $\mathbb{R}^n$ o chamado *produto interno* de $n-$uplas, que estende a noção de produto escalar visto nos cursos de Física e Geometria Analítica. Lembremos que o produto escalar dos vetores (não nulos) $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, de módulos $\|\mathbf{u}\|$ e $\|\mathbf{v}\|$, respectivamente, que formam entre si um ângulo θ é definido por

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta. \tag{1.4}$$

É conveniente escrever o produto escalar em termos das componentes dos vetores $\mathbf{u}=(a,b,c)$ e $\mathbf{v}=(x,y,z)$. Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo cujos lados são $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ (Figura 1.2), temos

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\,\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\,\cos\theta\,. \tag{1.5}$$

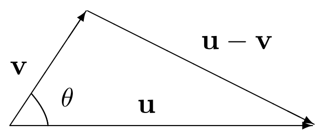


Figura 1.2

Substituindo em (1.5): $\|\mathbf{u}\|^2 = a^2+b^2+c^2$, $\|\mathbf{v}\|^2 = x^2+y^2+z^2$, $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = \|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2-2\,(a\,x+b\,y+c\,z)$ e $\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\,\cos\theta = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, obtemos

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = a\,x + b\,y + c\,z \tag{1.6}$$

Uma vantagem da igualdade (1.6) em relação a (1.4) é que ela (a relação (1.6)) não depende do apelo geométrico e portanto permite estender a $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 4$, esta noção de produto escalar, que chamaremos produto interno.

Dados $\mathbf{u}=(x_1,\ldots,x_n)$, $\mathbf{v}=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, definimos o **produto interno** de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, denotado por $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ (ou $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle$), como sendo

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = x_1\,y_1 \;+\;\ldots\;+\; x_n\,y_n \tag{1.7}$$

(notemos que o produto interno de dois vetores de $\mathbb{R}^n$ é um número real). O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, munido do produto interno, é chamado **espaço**

euclidiano. É fácil ver que $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} > 0$, $\forall u \neq \mathbf{0}$. Definimos a **norma** de um vetor $\mathbf{u}$ como sendo $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}$. O produto interno tem as seguintes propriedades

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} \tag{1.8}$$

$$(\mathbf{u} + \alpha\,\mathbf{w})\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \alpha\,(\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}) \tag{1.9}$$

Exemplo 1.2. *Se* $\mathbf{u} = (1, \sqrt{3}, 0)$, $\mathbf{v} = (3, -1, 5)$, $\mathbf{w} = (-3, 1, 2)$, *então* $\|\mathbf{u}\| = 2$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{35}$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 3(1) + \sqrt{3}(-1) = 3 - \sqrt{3}$ *e* $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 3(-3) + 1(-1) + 5\cdot 2 = 0$.

Existe uma importante desigualdade relacionando norma e produto interno, conhecida como *desigualdade de Cauchy-Schwarz*

$$\big|\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\big| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\,. \tag{1.10}$$

Se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, temos $\langle\,\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$, e a desigualdade (1.10) é trivial. Para mostrar esta desigualdade quando $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, notemos que, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, temos $\|\mathbf{u} + t\,\mathbf{v}\| \geq 0$. Usando as propriedades (1.8) e (1.9), temos

$$\begin{aligned}0 \leq \|\mathbf{u} + t\,\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u} + t\,\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u} + t\,\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + 2\,t\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + t^2\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\,t\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + t^2\,\|\mathbf{v}\|^2\end{aligned}$$

donde

$$\|\mathbf{v}\|^2\,t^2 + 2\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,t + \|\mathbf{u}\|^2 \geq 0\,. \tag{1.11}$$

O primeiro membro desta desigualdade é uma função quadrática em t. Para que esta função quadrática seja sempre não negativa, seu discriminante não pode ser positivo, isto é,

$$4\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 - 4\,\|\mathbf{v}\|^2\,\|\mathbf{u}\|^2 \leq 0\,. \tag{1.12}$$

A desigualdade (1.12) implica (1.10). $\square$

Dois vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ são ditos **ortogonais** quando $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$. Por exemplo, os vetores $\mathbf{u} = (1, 0, 9, -6)$ e $\mathbf{v} = (0, -1, 2, 3)$ são ortogonais, pois $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 1\times 0 + 0\times(-1) + 9\times 2 + (-6)\times 3 = 0$. Um conjunto de vetores $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ é dito um **conjunto ortogonal** se os seus vetores são dois a dois ortogonais, isto é, $\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{u}_j = 0$, quaisquer que sejam i, j com $1 \leq i, j \leq m$ e $i \neq j$; se, além disso, $\|\mathbf{u}_1\| = \cdots = \|\mathbf{u}_m\| = 1$, dizemos que esse conjunto é **ortonormal**. A base canônica $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ é um conjunto ortonormal em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.3. *Encontrar todos os vetores de* $\mathbb{R}^2$ *que são ortogonais a* $\mathbf{v} = (2, -1)$.

Procuramos os vetores $\mathbf{u} = (x, y)$ tais que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, isto é, $2\,x - y = 0$. Logo, $\mathbf{u} = (x, 2\,x)$. Notemos que $y = 2\,x$ é a equação da reta que passa pela origem e tem $\mathbf{v}$ como vetor normal. (Figura 1.3).

Exemplo 1.4. *Encontrar todos os vetores de* $\mathbb{R}^3$ *que são ortogonais a* $\mathbf{n} = (2, -1, 0)$.

Procuramos os vetores $\mathbf{u} = (x, y, z)$ tais que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, ou seja, $y = 2\,x$. Logo, $\mathbf{u} = (x, 2\,x, z) = x\,(2, 1, 0) + z\,(0, 0, 1)$. Notemos que $y = 2\,x$ é equação do plano que contém a origem e tem $\mathbf{n}$ como vetor normal (Figura 1.4). $\square$

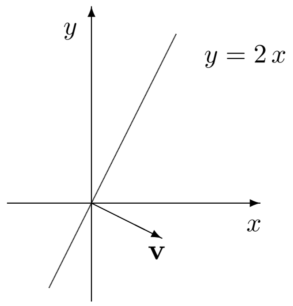


Figura 1.3

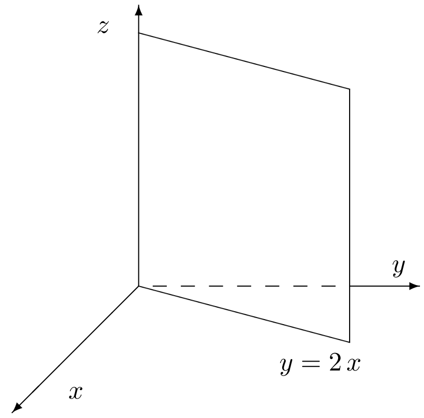


Figura 1.4

Exemplo 1.5. *Encontrar todos os vetores de* $\mathbb{R}^3$ *que são ortogonais a* $\mathbf{v} = (2, 1, 1)$ *e* $\mathbf{w} = (0, 1, -1)$.

Procuramos os vetores $\mathbf{u} = (x, y, z)$ tais que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$, ou seja, $2\,x + y + z = 0$ e $y - z = 0$. Da última destas igualdades, tiramos $y = z$; substituindo na anterior, obtemos $x = -y$. Portanto $\mathbf{u} = (-y, y, y) = y(-1, 1, 1)$.

Exercício 1.2. (a) *Encontre* x *de modo que os vetores* $\mathbf{u} = (3, 5, x)$ *e* $\mathbf{v} = (-4, 2, 4)$ *sejam ortogonais.*

(*b*) *Encontre x e y de modo que $\{(3, x, 2),\ (-4, 2, 1),\ (1, -11, y)\}$ seja um conjunto ortogonal.*

Exercício 1.3. *Determine quais dos conjuntos abaixo são ortogonais:*
(*a*) $\{(2, 3),\ (6, -4)\}$
(*b*) $\{(0, 2, 3),\ (1, 6, -4), (1, 1, 1), (1, -3, 1)\}$
(*c*) $\{(1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1), (0, 0, 1, 0),\ (0, 0, 0, 1)\}$
(*d*) $\{(2, 1, -1, 1), (1, 1, 3, 0), (1, -1, 0, 1),\ (2, 1, 1, 1)\}$.

Exercício 1.4. *Prove a desigualdade* $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ *(conhecida como* desigualdade triangular*).*

Exercício 1.5. *Prove que:* $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2)$ *e* $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 4\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

Exercício 1.6. *Prove o Teorema de Pitágoras em $\mathbb{R}^n$: os vetores* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *são ortogonais se e somente se* $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.

Exercício 1.7. *Sejam* $\mathbf{u},\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$*. Mostre que* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *são ortogonais se e somente se* $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.

1.2 Matrizes

Sejam $m, n \geq 1$ números inteiros. Uma **matriz** de **ordem** $m \times n$ é um arranjo de $m\,n$ números distribuídos em m linhas e n colunas, do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Denotaremos esta matriz por $A = (a_{ij})$. Cada número a_{ij} chama-se um **elemento** (ou **entrada**) da matriz: i indica a **linha** e j a **coluna** onde se localiza a_{ij}. Duas matrizes de mesma ordem $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são ditas **iguais** quando seus elementos correspondentes são iguais, isto é, $a_{ij} = b_{ij},\ \forall i, j$.

Exemplo 1.6. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & 2 & z \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$

Denotaremos por $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes de ordem $m\times n$ de números reais; quando $m=n$, denotaremos tal conjunto por $M_n(\mathbb{R})$; neste caso, cada elemento de $M_n(\mathbb{R})$ é dito uma **matriz quadrada** de **ordem** n. A matriz $O \in M_{m\times n}$ cujos elementos são todos iguais a zero é chamada **matriz nula**. Uma matriz com m linhas e 1 coluna é chamada **matriz coluna** e uma matriz com 1 linha e n colunas é chamada **matriz linha**.

Exemplo 1.7. *Se* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ *e* $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$, *então* A *é matriz linha,* B *é matriz coluna e* C *é matriz quadrada de ordem 2.*

Existe uma correspondência natural entre matrizes $1\times m$ e vetores de $\mathbb{R}^m$. A cada vetor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ de $\mathbb{R}^m$ associamos a matriz linha $X = [\,x_1 \ \cdots \ x_m\,]$ e reciprocamente, a cada matriz $m\times 1$, X, associamos um vetor $\mathbf{x}$ como acima. Da mesma maneira, existe uma correspondência natural entre matrizes colunas $m\times 1$ e vetores de $\mathbb{R}^m$. Sempre que for conveniente, identificaremos vetores de $\mathbb{R}^m$ com matrizes linhas ou matrizes colunas, por meio das correspondências

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \quad \longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad [\,x_1 \ \cdots \ x_m\,]. \tag{1.13}$$

Em uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$, os elementos $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ constituem a **diagonal principal** de A. Uma matriz quadrada (a_{ij}) chama-se **matriz diagonal** quando $a_{ij} = 0$, $\forall\, i \neq j$, isto é, todo elemento fora da diagonal principal é nulo; ela será denotada por $\operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$, isto é,

$$\operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn}) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Uma importante matriz diagonal é a **matriz identidade** de ordem n:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ é dita **triangular superior**, quando $a_{ij} = 0$, para todo $i > j$, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

De modo análogo define-se matriz **triangular inferior**.

Dada uma matriz $A = (a_{i\,j})_{m\times n}$, sua **transposta**, denotada por A^T, é a matriz $B = (b_{j\,i})_{n\times m}$, em que $b_{j\,i} = a_{i\,j}$, $\forall i, j$. Uma matriz quadrada é dita **simétrica** se $A^T = A$, isto é, $a_{j\,i} = a_{i\,j}$, $\forall i, j$. Uma matriz é dita **anti-simétrica** se $A^T = -A$, isto é, $a_{j\,i} = -a_{i\,j}$, para todo i, j: em particular, como para $i = j$ devemos ter $a_{i\,i} = -a_{i\,i}$, os elementos de sua diagonal principal são nulos.

Exemplo 1.8. *A matriz* $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 5 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ *é simétrica e* $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ *é anti-simétrica.*

Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

as n matrizes $m \times 1$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \quad \dots \quad \mathbf{v}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

chamam-se **vetores colunas** de A e as n matrizes $1 \times n$

$$\mathbf{u}^1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \quad \cdots \quad \mathbf{u}^m = \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

são os **vetores linhas** de A. Em muitas situações, é conveniente escrever A em termos de seus vetores linhas ou de seus vetores colunas:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A = [\, \mathbf{v}^1\,,\ \mathbf{v}^2\,,\ \ldots,\ \mathbf{v}^m\,]\,.$$

Sejam $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. A **soma** de A com B, indicada por $A + B$ é a matriz cujo termos geral é $a_{ij} + b_{ij}$, ou seja,

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \ldots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \ldots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \ldots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

Verifique como exercício que a adição de matrizes tem as propriedades A1 a A4 (página 7).

Exemplo 1.9. *Se* $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & \sqrt{7} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ *então* $A + B = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 4 & 4 + \sqrt{7} \end{bmatrix}$ *e não estão definidas as somas de* B *com* C *e de* A *com* C.

Sejam $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. O **produto de A pelo número** α é a matriz $\alpha\, A = (\alpha\, a_{i\,j})$, isto é,

$$\alpha\, A = \begin{bmatrix} \alpha\, a_{11} & \alpha\, a_{12} & \ldots & \alpha\, a_{1n} \\ \alpha\, a_{21} & \alpha\, a_{22} & \ldots & \alpha\, a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha\, a_{m1} & \alpha\, a_{m2} & \ldots & \alpha\, a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

Mostre que são válidas as propriedades M1 a M4 (página 7).

Exemplo 1.10. *Se* $\alpha = 3$, $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, *então* $\alpha\, A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 9 & 3 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$.

Sejam $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B = (b_{jk}) \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$. O **produto** de A por B, denotado por $A\,B$, é a matriz $C = (c_{i\,k})$, de ordem $m \times p$, cujo termo geral c_{ik} é dado por

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}\, b_{j\,k} = a_{i\,1}\, b_{1\,k} + a_{i\,2}\, b_{2\,k} + \cdots + a_{i\,n}\, b_{n\,k}\,.$$

Exemplo 1.11. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 10 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

A definição acima permite multiplicar uma matriz $A = (a_{i\,j})_{m\times n}$ por uma matriz $n \times 1$, $X = \begin{bmatrix} x_1 & \dots, & x_n \end{bmatrix}^T$ e o produto é uma matriz $m \times 1$, $Y = [\,y_1 \;\dots\; y_m\,]^T$. Sempre que for conveniente, usaremos a identificação (1.13) e diremos que estamos multiplicando a matriz A pelo vetor $\mathbf{x} = (x_1\,, \dots, x_n)$, resultando no vetor $\mathbf{y} = (y_1\,, \dots, y_m)$.

O produto de matrizes tem as seguintes propriedades:

P1: $A(BC) = (AB)C, \quad \forall A \in M_{m\times n},\ B \in M_{n\times p},\ C \in M_{p\times q}$

P2: $A(B + C) = AB + AC, \quad \forall A \in M_{m\times n},\ B,\ C \in M_{n\times p}$

P3: $(A + B)C = AC + BC, \quad \forall A,\ B \in M_{m\times n},\ C \in M_{n\times p}$

Observando a definição acima, vemos que o produto de matrizes pode ser escrito em termos das colunas de B da seguinte forma: se $B = [\mathbf{v}_1\,, \dots,\ \mathbf{v}_p\,]$, então

$$A\,B = [A\,\mathbf{v}_1\,, \dots,\ A\,\mathbf{v}_p\,]\,. \tag{1.16}$$

Teorema 1.1. *Sejam A,B e C matrizes quadradas de ordem n, com* $A = \operatorname{diag}(a_1\,, \cdots, a_n)$, *e* $B = \operatorname{diag}(b_1\,, \cdots, b_n)$. *Sejam* $\mathbf{u}^1\,, \dots,\ \mathbf{u}^n$ *as linhas de* C *e* $\mathbf{v}_1\,, \dots,\ \mathbf{v}_n$ *as colunas de* C. *Então*

$$A\,C = \begin{bmatrix} a_1\,\mathbf{u}^1 \\ a_2\,\mathbf{u}^2 \\ \vdots \\ a_n\mathbf{u}^n \end{bmatrix} \quad e \quad C\,B = [b_1\,\mathbf{v}_1\,, \dots,\ b_n\,\mathbf{v}_n\,]\,. \tag{1.17}$$

A demonstração do teorema fica como exercício.

Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é dita **invertível** quando existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ tal que

$$A\,B = B\,A = I_n.$$

A matriz B chama-se **inversa** de A e é denotada por A^{-1}. Por exemplo, a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ é invertível e sua inversa é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na próxima seção apresentaremos um método para calcular a inversa de uma matriz.

Exercício 1.8. *Mostre que se A e B forem invertíveis, então AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Exercício 1.9. *Mostre que $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(A\,B)^T = B^T\,A^T$ e $(A^T)^T = A$.*

Exercício 1.10. *Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $X\,,\,Y \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Mostre que $X^T\,A\,Y = Y^T\,A^T\,X$.*

Exercício 1.11. *Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Mostre que a matriz $B = A + A^T$ é simétrica e que a matriz $C = A - A^T$ é anti-simétrica.*

Exercício 1.12. *Mostre que toda matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ se escreve como soma de uma matriz simétrica e uma matriz anti-simétrica. (Sugestão: escreva $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$).*

1.3 Sistemas lineares

Nesta seção, estudamos sistemas de equações algébricas lineares. Um sistema de m equações lineares nas n variáveis $x_1\,,\ldots,x_n$ tem a forma:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}\;x_1 + \;a_{12}\,x_2 + \cdots + \;a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\;x_1 + \;a_{22}\,x_2 + \cdots + \;a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n = b_m\,. \end{array}\right. \tag{1.18}$$

Os números $a_{i\,j}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, chamados **coeficientes** e os b_i, $1 \le i \le m$, chamados **termos constantes**, são dados. Quando $b_1 = \cdots = b_m = 0$, o sistema (1.18) é chamado **homogêneo**; caso contrário ele é dito **não homogêneo**. Uma **solução** da equação (1.18) é uma $n-$upla $(z_1\,,\,z_2\,,\ldots,z_n)$ que satisfaz todas as equações do sistema, isto é, $a_{i\,1}\,z_1 + a_{i\,2}\,z_2 + \ldots + a_{i\,n}\,z_n = b_i\,,$ para todo $i = 1,\ldots,m$. O conjunto de todas soluções de (1.18) é chamado **conjunto solução** de (1.18). Por exemplo, a terna $(0,1,1)$ é solução do sistema

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 - \ \ x_3 = 0 \end{array}\right. \tag{1.19}$$

Destas equações, temos $x_2 = x_3$ e $x_1 = 1 - x_3$. Atribuindo valores arbitrários $x_3 = t$, obtemos $x_1 = 1 - t$, $x_2 = t$; portanto, este sistema tem infinitas soluções. O conjunto solução de (1.19) é

$$S = \big\{\,(1-t,t,t)\ :\ t \text{ arbitrário}\,\big\}.$$

Um sistema linear que admite uma única solução é dito **possível e determinado**. Um sistema linear com mais de uma solução é chamado **indeterminado**. Um sistema linear que não admite solução é dito **impossível**. Sejam

$$S_1\ :\left\{\begin{array}{l} x+y=2 \\ x-y=0 \end{array}\right. \qquad S_2\ :\left\{\begin{array}{l} 4\,x+6\,y=0 \\ 6\,x+9\,y=0 \end{array}\right. \qquad S_3\ :\left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ 2x+2y=1 \end{array}\right.$$

É fácil ver que o sistema S_1 é possível e determinado: $(1,1)$ é sua única solução), o sistema S_2 é indeterminado: $(3,-2)$ e $(-3,2)$ são soluções de S_2, e que S_3 é impossível.

É fácil ver que, se o sistema (1.18) é homogêneo, então a $n-$upla $(0,\ldots,0)$ é solução desse sistema, chamada **solução trivial**. Assim, um sistema homogêneo é sempre possível; pode-se mostrar que, se $m < n$, ele tem soluções não triviais.

Definindo as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

podemos escrever o sistema (1.18) na forma matricial

$$A\,X = B \tag{1.20}$$

A matriz A chama-se **matriz dos coeficientes** do sistema (1.18). A matriz

$$[A:B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

chama-se **matriz aumentada** do sistema (1.18).

Uma classe especial de sistema sistemas lineares que podem ser facilmente resolvidos é a dos **sistemas escalonados**: são sistemas da forma

$$\begin{cases} a_{1\,1}\,x_1 + \dots + a_{1\,j_1}\,x_{j_1} + \dots + a_{1\,j_k}\,x_{j_k} + \dots + \; a_{1\,n}\,x_n \; = b_1 \\ \qquad\qquad a_{2\,j_1}\,x_{j_1} + \dots + a_{2\,j_k}\,x_{j_k} + \dots + \; a_{2\,n}\,x_n \; = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{k\,j_k}\,x_{j_k} + \dots + a_{k\,n}\,x_n = b_k. \end{cases} \tag{1.21}$$

com $a_{11} \neq 0$, $a_{2\,j_1} \neq 0, \dots, a_{k\,j_k} \neq 0$. Consideremos, por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y + 2\,z = \;\;\, 3 \\ \quad\;\; y + \;\;\, z = \;\;\, 1 \\ \qquad\;\; 2\,z = -4. \end{cases} \tag{1.22}$$

Da terceira equação, temos $z = -2$; substituindo este valor na segunda equação, tiramos $y = 3$ e, substituindo estes valores na primeira equação, obtemos $x = 4$. Assim, sua única solução é $(4, 3, -2)$.

Dois sistemas lineares S_1 e S_2 são ditos **equivalentes** (e indicamos $S_1 \sim S_2$) quando eles têm as mesmas soluções. Por exemplo, os sistemas

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

são equivalentes, pois sua única solução é $(1, 1)$.

Vamos agora introduzir, por meio de exemplos, os método de eliminação de **Gauss** e de **Gauss-Jordan** para resolver sistemas lineares. Tais métodos consistem em transformar o sistema dado em um sistema equivalente na forma escalonada, efetuando as seguintes operações, chamadas **operações elementares**:

(i) multiplicar uma das equações de S por um número real $k \neq 0$.

(ii) substituir uma equação de S pela soma daquela equação com outra equação de S.

Exemplo 1.12. *Resolver o sistema* $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - 4z = -1 \\ x - 3y + 3z = 5. \end{cases}$

Temos

$$\begin{cases} x - y + z = 1 & (A) \\ 2x + y - 4z = -1 & (B) \\ x - 3y + 3z = 5 & (C) \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + z = 1 & (A) \\ \phantom{x -{}} 3y - 6z = -3 & (D) \\ -2y + 2z = 4 & (E) \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} x - y + z = 1 & (A) \\ \phantom{x -{}} y - 2z = -1 & (F) \\ -y + z = 2 & (G) \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + z = 1 & (A) \\ \phantom{x -{}} y - 2z = -1 & (F) \\ -z = 1 & (H) \end{cases}$$

Agora fica fácil resolver o sistema. Da última equação tiramos $z = -1$; substituindo na segunda, obtemos $y = -3$ e levando estes valores na primeira, temos $x = -1$; logo, a solução do sistema é $(-1, -3, -1)$. Este é basicamente o **método de Gauss**. Uma outra maneira de resolver o sistema é continuar com as operações elementares e eliminar z nas duas primeiras equações e, em seguida, eliminar y na primeira: este é o **método de Gauss-Jordan**.

$$\begin{cases} x - y \phantom{{}+z} = 2 & (K) \\ \phantom{x - {}} y \phantom{{}+z} = -3 & (J) \\ \phantom{x - y + {}} z = -1 & (I) \end{cases} \sim \begin{cases} x \phantom{{}+y+z} = -1 & (L) \\ \phantom{x + {}} y \phantom{{}+z} = -3 & (J) \\ \phantom{x + y + {}} z = -1 & (I) \end{cases}$$

Na resolução, efetuamos as operações: $D = (-2)\,A + B$, $E = C - A$, $F = D/3$, $G = E/2$, $H = F + G$, $I = (-1)H$, $J = F - 2H$, $K = A + H$ e $L = J + K$.

Exemplo 1.13. *Analisar o sistema* $\begin{cases} x + 2y - z = 7 \\ x + y + 2z = 3 \\ 2x + 3y + z = k \end{cases}$ *para diversos valores de* k.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 7 \\ x + y + 2z = 3 \\ 2x + 3y + z = k \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = 7 \\ \phantom{x + 2{}} y - 3z = 4 \\ \phantom{x + 2{}} y - 3z = 14 - k \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = 7 \\ \phantom{x + 2{}} y - 3z = 4 \\ 0 = 10 - k \end{cases}$$

Portanto, o sistema não tem solução, se $k \neq 10$. Se $k = 10$, ele é equivalente ao sistema indeterminado

$$\begin{cases} x + 2y - \ \ z = 7 \\ \qquad\ y - 3z = 4, \end{cases}$$

que tem as (infinitas) soluções $(-1-5z, 4+3\,z, z)$, em que z é arbitrário.

Podemos simplificar a notação ao resolver sistemas lineares, omitindo as incógnitas e concentrando nossa atenção na matriz aumentada. Por exemplo, a resolução do sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y - \ \ z = 1 \\ 2x + 4y - 6z = 0 \\ x - \ \ y + 2z = 4 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - \ \ z = \ \ 1 \\ \qquad\qquad 4z = \ \ 2 \\ \qquad 3y - 3z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = \ \ 1 \\ \qquad y - z = -1 \\ \qquad\quad\ z = 1/2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y \quad = \ \ 3/2 \\ \qquad y \quad = -1/2 \\ \qquad\quad z = \ \ 1/2 \end{cases} \sim \begin{cases} x = \ \ 5/2 \\ y = -1/2 \\ z = \ \ 1/2 \end{cases}$$

pode ser escrita de maneira resumida do seguinte modo (a barra vertical em cada uma das matrizes abaixo tem como única finalidade separar os coeficientes dos termos constantes):

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right]$$

Agora, é só observar que a primeira coluna da matriz A estava associada à variável x, a segunda coluna associada à variável y e a terceira coluna à variável z para concluir que $x = 5/2,\ y = -1/2$ e $z = 1/2$.

Por analogia com os sistemas lineares, diremos que uma matriz está na **forma escalonada** quando a quantidade inicial de zeros da primeira linha é menor do que a da segunda linha, que é menor de que a da terceira linha e assim por diante, ou seja, a matriz é da forma

$$\begin{bmatrix} a_{1\,1} & \dots & a_{1\,j_1} & \dots & a_{1\,j_m} & \dots & a_{1\,n} \\ 0 & \dots & a_{2\,j_1} & \dots & a_{2\,j_m} & \dots & a_{2\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{m\,j_m} & \dots & a_{m\,n} \end{bmatrix}.$$

Além de simplificar a notação, o procedimento acima permite resolver simultameamente diversos sistemas lineares que tenham a mesma matriz dos coeficientes. Por exemplo, para resolver os sistemas

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} u + v = 0 \\ -u + v = 1 \end{cases}$$

escrevemos

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right].$$

Logo, $x = 1/2,\ y = 1/2,\ u = 1/2,\ v = 1/2$. Notemos que as soluções $(x, y) = (1/2, 1/2)^T$ e $(u, v) = (-1/2, 1/2)^T$ são as colunas da inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, isto é,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

O procedimento acima é válido em geral. Se $A = (a_{i\,j})$ é uma matriz $n \times n$ invertível, sua inversa, A^{-1}, é caracterizada pela igualdade $A\,A^{-1} = I$. Escrevendo

$$\mathbf{e}_1 = [1, 0, \dots, 0]^T,\ \dots,\ \mathbf{e}_n = [0, \dots, 0, 1]^T \quad \text{e} \quad A^{-1} = [X_1\,, \dots, X_n]\,,$$

a igualdade $A\,A^{-1} = I$ é equivalente a $A\,X_1 = \mathbf{e}_1\,, \dots,\ A\,X_n = \mathbf{e}_n$. Logo, as colunas $X_1\,, \dots, X_n$ são soluções dos respectivos sistemas

$$A\,X = \mathbf{e}_1\,, \dots,\ A\,X = \mathbf{e}_n\,.$$

Deste modo, para encontrar a inversa de $A = (a_{i\,j})$, escalonamos a matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right].$$

A matriz que resultar à direita da linha será A^{-1}.

Exemplo 1.14. *Calcular a inversa da matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right].$$

Logo, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Exercício 1.13. *Resolver cada um dos sistemas abaixo:*

$$a)\ \begin{cases} -2x + 3y - 8z = 7 \\ 3x + y + z = 8 \\ 5x + 4y - 3z = 17 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 3x + y + z = 8 \\ 5x - 3y + 4z = 17 \\ -2x - 8y + 3z = 7 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x + 3y + z = 8 \\ 8x + 2y - 2z = -7 \\ -3x + 5y + 4z = 17 \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} x + 3\,y + z = 8 \\ x + y - 2\,z = 4 \\ -x - 5\,y + k\,z = -12 \end{cases}$$

Exercício 1.14. *Calcule a inversa de cada uma das matrizes abaixo:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1.4 Determinante

Nesta seção definimos o determinante de uma matriz $n \times n$, $A = (a_{i\,j})$, que denotaremos por $\det(A)$ (ou por $|A|$, de acordo com a conveniência). Lembremos que os determinantes de matrizes 2×2 e 3×3 são dados por

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c \tag{1.23}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\,e\,i + b\,f\,g + c\,d\,h - g\,e\,c - h\,f\,a - i\,b\,d. \tag{1.24}$$

Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 6 \qquad \text{(confira!)}$$

Para matrizes quadradas de ordem $n \geq 3$, definimos o determinante de modo recursivo, isto é, o determinante de uma matriz de ordem n é dada em termos do determinante de uma matriz de ordem $n-1$. Para a definição geral, precisamos da noção de cofator de um elemento. Dada uma matriz A de ordem n,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.25}$$

para cada $i, j,\ 1 \leq i, j \leq n$ seja A_{ij} a matriz de ordem $n-1$ obtida retirando-se a $i-$ésima linha e a $j-$ésima coluna de A. O determinante de A_{ij} chama-se **menor** associado ao elemento a_{ij}. O número $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ chama-se **cofator** do elemento a_{ij}. Por exemplo, se

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 6 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

então:

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 8 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \ M_{24} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } M_{32} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

O **determinante** da matriz A, dada em (1.25), é definido por

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, a_{1j} \det A_{1j} \tag{1.26}$$

Exemplo 1.15. *Calcular o determinante da matriz* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Como $a_{11} = 1,\ a_{12} = 0,\ a_{13} = -1,\ a_{14} = 0$, pela definição acima temos

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\, 1 \begin{vmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 8 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-1) \begin{vmatrix} -1 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -151 + 14 = -137$$

A definição acima expressa o determinante em termos dos elementos da primeira linha e seus cofatores: é a chamada *expansão do determinante pela primeira linha*. É possível mostrar que obtemos o mesmo valor quando fazemos a expansão usando qualquer linha ou coluna, isto é, para cada i fixado,

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij} \det A_{ij}$$

ou, para cada j fixado,

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, \det A_{ij}$$

O próximo teorema dá algumas propriedades do determinante que decorrem diretamente de sua definição. A demonstração não é difícil, mas é trabalhosa e, por esta razão, será omitida.

Teorema 1.2. *O determinante tem as seguintes propriedades:*
1) $\det I_n = 1$.
2) *Se* A *tem duas linhas ou duas colunas iguais, então* $\det A = 0$.
3) *O determinante é* linear *em cada linha e cada coluna, isto é,*

$$\det \begin{bmatrix} \alpha\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \alpha \det \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$$

o mesmo valendo para as outras colunas e para as linhas .
4) $\det(A\,B) = \det A \det B,\ \forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$
5) $\det A^T = \det A\,,\ \forall A \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercício 1.15. *Calcule o determinante das matrizes:*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercício 1.16. *Mostre que o determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal.*

Exercício 1.17. *Mostre que*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \end{vmatrix} = (r_3 - r_2)(r_3 - r_1)(r_2 - r_1)$$

(Sugestão: considere a função $d(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & x \\ r_1^2 & r_2^2 & x^2 \end{vmatrix}$*, que é polinomial de grau 2 e satisfaz* $d(r_1) = d(r_2) = 0$*: assim,* $d(x) = k\,(x - r_2)(x - r_1)$*.*

Como $d(0) = k\,r_1\,r_2$ *e* $d(0) = r_1\,r_2(r_2 - r_1)$*, temos* $k = r_2 - r_1$*; então* $d(r_3) = (r_3 - r_2)(r_3 - r_1)(r_2 - r_1))$*. Generalize.*

1.5 Números complexos

Denotaremos por $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos, isto é,

$$\mathbb{C} = \{x + i\,y \;:\; x, y \in \mathbb{R}, \text{ em que } i^2 = -1\}. \tag{1.27}$$

Se $z = x + i\,y$, com x, $y \in \mathbb{R}$, o número x chama-se **parte real** de z e y chama-se **parte imaginária** de z. Definimos as operações algébricas em $\mathbb{C}$ do seguinte modo: dados $z_1 = a + i\,b$, $z_2 = c + i\,d \in \mathbb{C}$, pomos

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + i\,b) + (c + i\,d) = (a + c) + i\,(b + d), \\ z_1\,z_2 &= (a + i\,b)\,(c + i\,d) = (ac - bd) + i\,(ad + bc). \end{aligned}$$

As operações de adição e multiplicação em $\mathbb{C}$ têm as mesmas propriedades que as operações de $\mathbb{R}$, ou seja, quaisquer que sejam $z, w, s \in \mathbb{C}$:

1. (associatividade) $z + (w + s) = (z + w) + s$ e $z\,(w\,s) = (z\,w)\,s$
2. (comutatividade) $z + w = w + z$ e $zw = wz$
3. (elementos neutros) $z + 0 = z$ e $z\,1 = z, \;\; \forall z \in \mathbb{C}$
4. (elemento oposto) para cada $z = a + i\,b \in \mathbb{C}$, existe um elemento $w \in \mathbb{C}$ (a saber, $w = -a - i\,b$) tal que $z + w = 0$;
5. (elemento inverso) para cada $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, existe em $\mathbb{C}$ um elemento denotado por z^{-1} tal que $z\,z^{-1} = 1$
6. (distributividade) $z(w + s) = z\,w + z\,s$

A correspondência $x + i\,y \;\longleftrightarrow\; (x, y)$ identifica cada número complexo com um vetor (ou com um ponto, se for conveniente) do plano: veja as figuras 1.5 e 1.6. Essa correspondência relaciona soma de números complexos com soma de vetores.

Para cada número complexo $z = x + i\,y$, definimos o seu **conjugado** por $\bar{z} = x - i\,y$ e o seu **módulo** ou **valor absoluto** por $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. É claro que $|z|^2 = z\,\bar{z}$.

O inverso multiplicativo do número $z = x + i\,y$ é dado por

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\,\bar{z}} = \frac{x - i\,y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\,\frac{y}{x^2 + y^2}\;.$$

A **divisão** de dois números $z = a + i\,b$, $w = c + i\,d$ é $z/w = z\,w^{-1}$. Portanto

$$\frac{z}{w} = \frac{z\,\bar{w}}{|\,w|^2} = \frac{(a+i\,b)(c-i\,d)}{c^2+d^2}$$

Exemplo 1.16. *Se* $z = 2 - i$, *então* $\bar{z} = 2 + i$, $|z| = \sqrt{5}$ *e* $z^{-1} = (2+i)/5$. *Esses números estão representados na Figura 1.5 abaixo.*

Exemplo 1.17. *Se* $z = 6 + 2\,i$ *e* $w = 4 + 3\,i$, *então*

$$\frac{z}{w} = \frac{6+2\,i}{4+3\,i} = \frac{(6+2\,i)(4-3\,i)}{16+9} = \frac{30-10\,i}{25} = \frac{6}{5} - \frac{2}{5}\,i\,.$$

Exercício 1.18. *Mostre que, quaisquer que sejam* $z, w \in \mathbb{C}$*:*
(a) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ (b) $\overline{z\,w} = \bar{z}\,\bar{w}$
(c) $|z+w| \le |z| + |w|$ (d) $|z\,w| = |z|\,|w|$

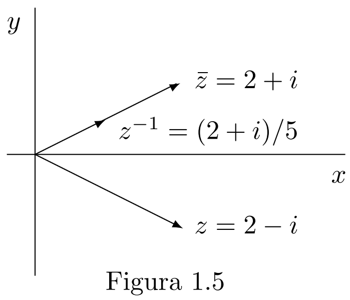


Figura 1.5

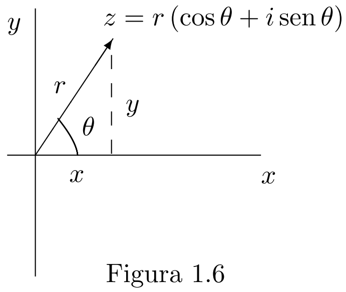


Figura 1.6

Seja $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$. Usando coordenadas polares,

$$x = r\,\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

escrevemos a **forma trigonométrica** (ou **forma polar**) de z:

$$z = r\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta).$$

Nesta expressão, $r = \sqrt{x^2+y^2}$ é o módulo de z. Vamos escrever a expressão $\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$ na forma abreviada cis (θ). Assim,

$$z = x + i\,y = r\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = r\,\mathrm{cis}\,(\theta)$$

Por exemplo, $\operatorname{cis}(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) = i$, $\operatorname{cis}(\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3}) + i\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}\,(1 + i\,\sqrt{3})$.

A forma trigonométrica simplifica a multiplicação e a divisão de números complexos: se $z_1 = r_1 \operatorname{cis}\theta_1$ e $z_2 = r_2 \operatorname{cis}\theta_2$, então

$$z_1\, z_2 = r_1\, r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2) \tag{1.28}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2) \tag{1.29}$$

De fato,

$$\begin{aligned} z_1\, z_2 &= r_1\, r_2(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2) \\ &= r_1\, r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + i\,(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_1)] \\ &= r_1\, r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)] = r_1\, r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

A verificação da fórmula para o quociente é análoga e fica como exercício.

Exemplo 1.18. *Se $z = 6\operatorname{cis}(\pi/3)$, $w = 3\operatorname{cis}(\pi/6)$, obter $z\,w$ e z/w.*

Pela fórmula (1.28), temos

$$\begin{aligned} z\,w &= 6\,.\,3\operatorname{cis}(\pi/3 + \pi/6) = 18\operatorname{cis}(\pi/2) = 18\,i \\ \frac{z}{w} &= \frac{6}{3}\operatorname{cis}(\pi/3 - \pi/6) = 2\operatorname{cis}(\pi/6) = \sqrt{3} + i \end{aligned}$$

A fórmula (1.28) simplifica o cálculo de potências de números complexos; de fato, por (1.28) temos que, se $z = r\operatorname{cis}(\theta)$, então

$$\begin{aligned} z^2 &= [r\operatorname{cis}(\theta)][r\operatorname{cis}(\theta)] = r^2\operatorname{cis}(2\,\theta) \\ z^3 &= z^2\, z = [r^2\operatorname{cis}(2\,\theta)][r\operatorname{cis}(\theta)] = r^3\operatorname{cis}(3\,\theta) \end{aligned}$$

Usando indução, temos, mais geralmente, a fórmula de **De Moivre**

$$z^n = r^n\,[\cos(n\,\theta) + i\operatorname{sen}(n\,\theta)] = r^n\operatorname{cis}(n\,\theta). \tag{1.30}$$

Exemplo 1.19. *Calcular $(1+i)^{12}$ e $(1 + i\,\sqrt{3})^{20}$.*

Notemos que $1 + i = \sqrt{2}\operatorname{cis}(\pi/4)$ e que $(1 + i\,\sqrt{3}) = 2\operatorname{cis}(\pi/3)$. Pela fórmula de DeMoivre, temos

$$\begin{aligned} (1+i)^{12} &= (\sqrt{2})^{12}\operatorname{cis}(12\pi/4) = 2^6\operatorname{cis}(3\pi) = -2^6 = -64 \\ (1 + i\,\sqrt{3})^{20} &= 2^{20}\operatorname{cis}(20\pi/3) = 2^{20}\operatorname{cis}(2\pi/3) = 2^{20}(-\tfrac{1}{2} + i\,\tfrac{\sqrt{3}}{2}) = \\ &= 2^{19}(-1 + i\,\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Funções Complexas de Variável Real

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Toda função $f\colon I \to \mathbb{C}$ se escreve na forma

$$f(t) = u(t) + i\,v(t),$$

com $u, v\colon I \to \mathbb{R}$. As funções u e v chamam-se **parte real** e **parte imaginária** de f e são denotadas por $Re\,(f)$ e $Im\,(f)$, respectivamente, ou seja, $u = Re\,(f)$ e $v = Im\,(f)$. Assim, toda função complexa de variável real pode ser identificada com a função vetorial $F\colon I \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(t) = (u(t), v(t))$.

Os conceitos básicos do Cálculo de funções reais de uma variável real transportam-se de modo natural para funções complexas de uma variável real. Uma função $f = u + i\,v$ é dita **contínua** se as funções u e v forem contínuas. Do mesmo modo, $f = u + i\,v$ é dita **derivável** se u e v forem deriváveis; neste caso, a **derivada** de f é

$$f'(t) = u'(t) + i\,v'(t).$$

Por exemplo, se $f(t) = \cos\,t + i\,\text{sen}\;t$, temos

$$f'(t) = -\text{sen}\;t + i\,\cos\,t = i\,(\cos\,t + i\,\text{sen}\;t) = i\,f(t). \tag{1.31}$$

Dados $a, b \in I$ com $a < b$, definimos a integral de f em $[a, b]$ por

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt\,.$$

As integrais $\displaystyle\int_a^b u(t)\,dt$ e $\displaystyle\int_a^b v(t)\,dt$ são facilmente calculadas usando o Teorema Fundamental do Cálculo: se $U(t)$ e $V(t)$ são primitivas de $u(t)$ e $v(t)$ (isto é, $U'(t) = u(t)$ e $V'(t) = v(t)$, $\forall t \in [a, b]$), respectivamente, então

$$\int_a^b u(t)\,dt = U(b) - U(a) \quad \text{e} \quad \int_a^b v(t)\,dt = V(b) - V(a)$$

Logo, se $F(t)$ é uma primitiva de $f(t)$ em $[a, b]$ (isto é, $F'(t) = f(t)$, para todo $t \in [a, b]$), temos

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a). \tag{1.32}$$

Definição: (fórmula de Euler) Para todo $t \in \mathbb{R}$, definimos

$$e^{i\,t} = \cos t + i \operatorname{sen} t\,. \tag{1.33}$$

Vejamos porque esta definição é natural. Denotando $f(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t$ vemos, pela igualdade (1.28), página 29, que

$$f(s+t) = f(s)\, f(t)$$

que mostra que a função f tem a *propriedade exponencial* $a^{s+t} = a^s\, a^t$. Além disso, $f(0) = 1$. Portanto é razoável pensar em escrever $f(t) = e^{\alpha\, t}$, para algum $\alpha \in \mathbb{C}$ (notemos que ainda precisamos dar um significado para a exponencial complexa). Como $f'(t) = i\, f(t)$, vemos que para que esta nova exponencial satisfaça a conhecida regra de derivação $\left(e^{\alpha\, t}\right)' = \alpha\, e^{\alpha\, t}$, a escolha apropriada para o expoente é $\alpha = i$ e definimos

$$e^{i\,t} = \cos t + i \operatorname{sen} t\,.$$

Definimos agora a função exponencial mais geral $e^{(\alpha + i\,\beta)\,t}$, para um expoente complexo $z = \alpha + i\,\beta$ qualquer como sendo:

$$e^{(\alpha+i\,\beta)\,t} = e^{\alpha\,t}\, e^{i\,\beta\,t} = e^{\alpha\,t}\,(\cos \beta\, t + i \operatorname{sen} \beta\, t) \tag{1.34}$$

Sua derivada segue a mesma regra usada para a exponencial real:

$$\frac{d}{dt}\, e^{(\alpha+i\,\beta)\,t} = (\alpha + i\,\beta\,)\, e^{(\alpha+i\,\beta)\,t}$$

Usando a fórmula de Euler, escrevemos a forma polar de um número complexo como

$$z = r\, e^{i\,\theta}.$$

Como $e^{i\,\theta}$ é uma função periódica de período $2\,\pi$ (pois $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$ o são), uma igualdade do tipo

$$r_1\, e^{i\,\theta_1} = r_2\, e^{i\,\theta_2}, \quad \text{com} \quad r_1 > 0 \quad \text{e} \quad r_2 > 0,$$

implica $r_1 = r_2$ e $\theta_2 = \theta_1 + 2\,n\,\pi$, para algum $n \in \mathbb{Z}$.

A fórmula de Euler permite expressar as funções seno e cosseno em termos da exponencial complexa:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2\,i} \tag{1.35}$$

Essas igualdades são úteis no cálculo de integrais como $\int e^t \cos t\, dt$ (o cálculo convencional desta integral é trabalhoso, pois envolve duas vezes a integração por partes e uma transposição). Vamos calculá-la, usando (1.35). Como

$$\Big(\frac{e^{(1+i)\,t}}{1+i}\Big)' = e^{(1+i)\,t} \quad \text{e} \quad \Big(\frac{e^{(1-i)\,t}}{1-i}\Big)' = e^{(1-i)\,t}$$

por (1.32) temos

$$\begin{aligned}\int e^t \cos t\, dt &= \frac{1}{2}\int e^t\,(e^{i\,t}+e^{-i\,t})\,dt = \frac{1}{2}\int (e^{(1+i)\,t}+e^{(1-i)\,t})\,dt = \\ &= \frac{1}{2}\Big[\,\frac{e^{(1+i)\,t}}{1+i} + \frac{e^{(1-i)\,t}}{1-i}\,\Big] + C = \\ &= \frac{1}{2}\Big[\,\frac{(1-i)\,e^{(1+i)\,t}+(1+i)e^{(1-i)\,t}}{2}\,\Big] + C\end{aligned}$$

Agora, como

$$\begin{aligned}(1-i)\,e^{(1+i)\,t} &= (1-i)\,e^t(\cos t + i\operatorname{sen} t) = \\ &= e^t\,\big[\cos t + \operatorname{sen} t - i\,(\cos t - \operatorname{sen} t)\big]\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(1+i)\,e^{(1-i)\,t} &= (1+i)\,e^t(\cos t - i\operatorname{sen} t) = \\ &= e^t\,\big[\cos t + \operatorname{sen} t + i\,(\cos t - \operatorname{sen} t)\big],\end{aligned}$$

temos

$$\int e^t \cos t\, dt = \frac{1}{2}\,e^t\,(\cos t + \operatorname{sen} t) + C.$$

Exercício 1.19. *Mostre que*

$$\int e^{a\,t}\operatorname{sen} b\,t\, dt = \frac{1}{a^2+b^2}\,e^{a\,t}\,(a\operatorname{sen} b\,t - b\,\cos b\,t) + C.$$

Raízes de números complexos

Uma **raiz** $n-$**ésima** de um número complexo z é um número w tal que $w^n = z$. A fórmula de Euler é especialmente útil para calcular raízes $n-$ ésimas de números complexos. Se $z = r_0\, e^{i\,\alpha}$, procuramos $w = r\, e^{i\,\theta}$ tal que $w^n = z$, ou seja, $r^n\, e^{i\,n\,\theta} = r_0\, e^{i\,\alpha}$. Desta igualdade, temos $r^n = r_0$ e $n\theta = \alpha + 2k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$, ou seja $r = \sqrt[n]{r_0}$ e $\theta = (\alpha + 2k\,\pi)/n\ , \quad k \in \mathbb{Z}$. Como $\operatorname{cis}(\theta + 2\,\pi) = \operatorname{cis}(\theta)$, esta relação fornece exatamente n raízes distintas, que são dadas por

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt[n]{r_0}\\
\theta &= \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\,\pi}{n}\ , \quad k = 0, 1, \ldots, (n-1).
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.20. *Encontrar todas as raízes cúbicas de* -64.

Procuramos $r, \theta \in \mathbb{R}$ tais que o número complexo $\lambda = r\, e^{i\,\theta}$ satisfaz $\lambda^3 = -64$. Observando que $-64 = 64\, e^{i\,\pi}$, reescrevemos a equação acima como $r^3\, e^{i\,3\,\theta} = 64\, e^{i\,\pi}$. Portanto, $r = \sqrt[3]{64} = 4$ e $3\,\theta = \pi + 2\,n\,\pi,\ n \in \mathbb{Z}$, donde $\theta = \theta_n = (2n+1)\,\pi/3,\ n \in \mathbb{Z}$. Para $n = 0$, temos $\theta_0 = \pi/3$, portanto $\lambda_0 = 4\, e^{i\,\pi/3} = 4\,[\cos(\pi/3) + i\,\mathrm{sen}\,(\pi/3)] = 2(1 + i\,\sqrt{3})$; para $n = 1$, temos $\theta_1 = \pi$, portanto $\lambda_1 = 4\, e^{i\,\pi} = -4$; para $n = 2$, temos $\theta_2 = 5\,\pi/3$, portanto $\lambda_2 = 4\, e^{i\,5\,\pi/3} = 4\,[\cos(5\pi/3) + i\,\mathrm{sen}\,(5\pi/3)] = 2(1 - i\,\sqrt{3})$; A partir de $n = 3$ os valores se repetem: para $n = 3$, obtemos $\theta_3 = 7\,\pi/3 = 2\,\pi + \pi/3$, portanto $\lambda_3 = \lambda_0$; analogamente, $\lambda_4 = \lambda_1,\ \lambda_5 = \lambda_2$ e assim por diante. Logo as soluções da equação $\lambda^3 + 64 = 0$ são $\lambda_0 = 2(1 + i\,\sqrt{3}),\ \lambda_1 = -2\ \lambda_3 = 2(1 - i\,\sqrt{3})$. As soluções $\lambda_0,\ \lambda_1$ e λ_2 têm uma representação geométrica interessante no plano complexo: elas são vértices de um triângulo equilátero, como mostra a figura 1.7 abaixo.

Exemplo 1.21. *Encontrar as raízes quartas de* -16.

Escrevendo $\lambda = r\, e^{i\,\theta}$ e $-16 = 16\, e^{\pi\, i}$, a equação acima fica $r^4\, e^{4\,i\,\theta} = 16\, e^{\pi\, i}$. Portanto, $r = \sqrt[4]{16} = 2$ e $4\,\theta = \pi + 2\,n\,\pi,\ n \in \mathbb{Z}$, donde $\theta = \theta_n = (2n+1)\,\pi/4,\ n \in \mathbb{Z}$. Para $n = 0$, temos $\theta_0 = \pi/4$, portanto $\lambda_0 = 2\, e^{\pi\, i/4} = 2\,[\cos(\pi/4) + i\,\mathrm{sen}\,(\pi/4)] = (1 + i)\,\sqrt{2}$; para $n = 1$, temos $\theta_1 = 3\,\pi/4$, portanto $\lambda_1 = 2\, e^{3\,\pi\, i/4} = (-1 + i)\,\sqrt{2}$; para $n = 2$, temos $\theta_2 = 5\,\pi/4$, portanto $\lambda_2 = (-1 - i)\,\sqrt{2}$; para $n = 3$, temos $\theta_2 = 7\,\pi/4$, portanto $\lambda_2 = (1 - i)\sqrt{2}$. Como no exemplo anterior, a partir de $n = 4$ os valores se repetem. A representação geométrica das soluções no plano complexo é mostrada na figura 1.8 abaixo.

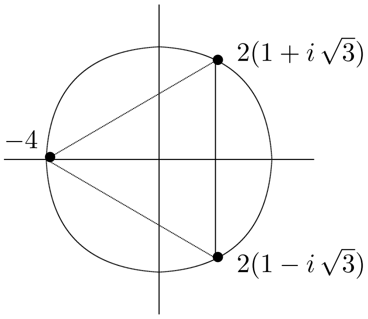


Figura 1.7

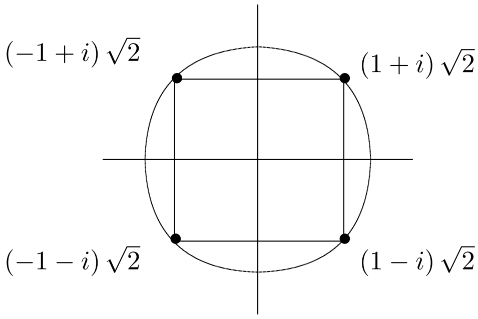


Figura 1.8

Raízes de polinômios

Recordemos alguns fatos sobre polinômios que serão úteis em capítulos posteriores. Lembremos que uma **raiz** de um polinômio $P(x)$ é um número complexo d tal que $P(d) = 0$. Um fato importante sobre polinômios é o chamado **Teorema Fundamental da Álgebra** que afirma que todo polinômio de grau $n \geq 1$ tem ao menos uma raiz d. Consideremos o polinômio de grau n

$$P(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0 \tag{1.36}$$

O quociente de $P(x)$ pelo binômio $x - c$ é um polinômio $Q(x)$ de grau $n - 1$ e o resto da divisão é uma constante (é claro que esta constante é $P(c)$):

$$P(x) = (x - c)\, Q(x) + P(c). \tag{1.37}$$

Quando d é uma raiz de $P(x)$, então de (1.37), temos $P(x) = Q(x)(x - d)$; assim, $P(x)$ contém um fator $x - d$. Deste modo, se conhecermos uma raiz d de $P(x)$, efetuamos a fatoração $P(x) = (x - d)P_1(x)$ e tentamos encontrar as soluções de $P_1(x)$, que é um polinômio de grau $n - 1$. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, $P_1(x)$ tem uma raiz d_2 e, portanto, contém um fator $x - d_2$. Assim $P(x)$ contém os fatores $x - d_1$ e $x - d_2$: isto é $P(x) = (x - d_1)(x - d_2)P_2(x)$. Continuando com este procedimento, obtemos n raízes $d_1\,, d_2\,, \ldots, d_n$

(não necessariamente distintas) de $P(x)$ e podemos fatorar $P(x)$ como $P(x) = (x - d_1)(x - d_2) \dots (x - d_n)$. Se um fator $x - d$ comparece k vezes nesta fatoração (isto é, se $P(x) = (x - d)^k \, Q(x)$, com $Q(d) \neq 0$), dizemos que d é uma raiz de $P(x)$ com **multiplicidade** k.

Lembremos que a divisão de $P(x)$ por $x - c$ pode ser feita pela algoritmo de Euclides, imitando o algoritmo da divisão de números. Efetuemos, por exemplo, a divisão de $x^3 + 0x^2 - 7x + 9$ por $x - 2$:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +\,0\,x^2 & -\,7\,x & +\,11 & \;x - 2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +\,2\,x^2 & & & \;x^2 + 2\,x - 3 \\ \cline{1-4}
 & 2\,x^2 & -\,7\,x & +\,11 & \\
 & -\,2\,x^2 & +\,4\,x & & \\ \cline{2-4}
 & & -\,3\,x & +\,11 & \\
 & & 3\,x & -\;\;6 & \\ \cline{3-4}
 & & & 5 &
\end{array}
$$

Exemplo 1.22. *Encontrar as raízes da equação* $\lambda^8 - 256 = 0$.

Podemos escrever

$$\lambda^8 - 256 = (\lambda^4 - 16)(\lambda^4 + 16) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda^2 + 4)(\lambda^4 + 16).$$

Logo, as soluções de $\lambda^8 - 256 = 0$ são: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2\,i$, $\lambda_4 = 2\,i$, $\lambda_5 = (1 + i)\sqrt{2}$, $\lambda_6 = (-1 + i)\sqrt{2}$, $\lambda_7 = (-1 - i)\sqrt{2}$ e $\lambda_8 = (1 - i)\sqrt{2}$.

O algoritmo de Briot-Ruffini simplifica o cálculo da divisão de um polinômio $P(x)$ por $x - c$. Ele baseia-se no seguinte fato: se $P(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$ e $Q(x) = b_{n-1}\, x^{n-1} + b_{n-2}\, x^{n-2} + \cdots + b_1\, x + b_0$, então, das igualdades

$$P(x) = (x - c)\, Q(x) + r$$

e

$$
\begin{aligned}
&(x - c)(b_{n-1}\, x^{n-1} + b_{n-2}\, x^{n-2} + \cdots + b_1\, x + b_0) = \\
&\qquad = b_{n-1}\, x^n + (b_{n-2} - c\, b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (b_0 - c\, b_1)\, x - c\, b_0
\end{aligned}
$$

temos as seguintes relações entre os coeficientes de $P(x)$ e $Q(x)$:

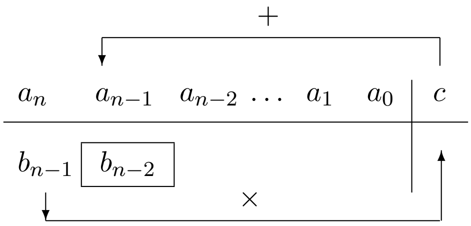
$$\begin{cases} a_n = b_{n-1} \\ a_{n-1} = b_{n-2} - c\,b_{n-1} \\ a_{n-2} = b_{n-3} - c\,b_{n-2} \\ \quad\vdots \\ a_1 = b_0 - c\,b_1 \\ a_0 = -c\,b_0 + r \end{cases} \qquad \text{que implicam} \qquad \begin{cases} b_{n-1} = a_n \\ b_{n-2} = a_{n-1} + c\,b_{n-1} \\ b_{n-3} = a_{n-2} + c\,b_{n-2} \\ \quad\vdots \\ b_0 = a_1 + c\,b_1 \\ r = a_0 + c\,b_0 \end{cases}$$

O método de Briot-Ruffini consiste em representar as operações indicadas acima em um diagrama. Notemos que:

1) $b_{n-1} = a_n$:

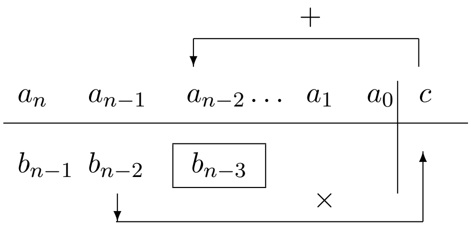
2) para obter b_{n-2} multiplicamos b_{n-1} por c e somamos a_{n-1} .

Vamos indicar estas operações no seguinte diagrama:



$$\boxed{b_{n-2} = a_{n-1} + c\,b_{n-1}}$$

Agora repetimos este procedimento para obter b_{n-3} ; o correspondente diagrama é:



$$\boxed{b_{n-3} = a_{n-2} + c\,b_{n-2}}$$

Para a divisão de $x^3 - 7x + 11$ por $x - 2$, efetuada acima, o algotítmo de Briot-Rufini fica

$$\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & -7 & 11 & 2 \\ \hline 1 & 2 & -3 & 5 & \end{array}$$

Assim, quociente é $x^2 + 2x - 3$ e o resto é 5.

Quando os coeficientes de $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ são números inteiros, as únicas raízes racionais possíveis de $P(x)$ são números inteiros e são os divisores de a_0. De fato, se o número racional $d = p/q$ (com p e q primos entre si) é uma raiz de $P(x)$, então da igualdade $P(p/q) = 0$, temos $a_0 = -(p^n/q^n + a_{n-1}p^{n-1}/q^{n-1} + \cdots + a_1 p/q) = p/q^n (p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_1 q^n)$. Multiplicando por q^n, temos $a_0 q^n = -p(p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_1 q^n)$. Como p e q são primos entre si, esta igualdade implica que p divide a_0. Um argumento semelhante mostra que q precisa ser um divisor do coeficiente de x^n, que é 1, ou seja, $q = \pm 1$. Logo, $d = \pm p$.

Exemplo 1.23. *Calcular as raízes inteiras de* $P(x) = x^3 - 7x + 6$.

Os divisores de 6, $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, são candidatos a raízes de $P(x)$. Como $P(1) = 1 - 7 + 6 = 0$, $P(2) = 8 - 14 + 6 = 0$ e $P(-3) = -27 + 21 + 6 = 0$, vemos que as raízes inteiras de $P(x)$ são $-3, 1$ e 2.

Exemplo 1.24. *Encontrar as raízes de* $P(x) = x^3 + 6x^2 - 5$

Os divisores de -5 são ± 1 e ± 5. Como $P(1) = 12$, $P(-1) = 0$, $P(5) = 270$ e $P(-5) = 30$, vemos que a única raiz racional é $x_1 = -1$. Efetuemos a divisão de $P(x)$ por $x + 1$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 6 & 0 & -5 & -1 \\ \hline 1 & 5 & -5 & 0 & \end{array}$$

O quociente é $x^2 + 5x - 5$; suas raízes são obtidas pela conhecida fórmula de Baskhara

$$x_2 = \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad x_3 = \frac{-5 - 3\sqrt{5}}{2}$$

Exercício 1.20. *Efetue as operações:*

$$\begin{array}{lll} (i)\ (2 - 6i)(-5 - 4i) & (ii)\ (3 - 5i) - 8 & (iii)\ (2 - 5i)(2 + 5i) \\ (iv)\ \dfrac{4}{-3 - \sqrt{-9}} & (v)\ \dfrac{3 + \sqrt{2}}{i} & (vi)\ (x + iy)(x - yi) \end{array}$$

Exercício 1.21. *Simplifique as expressões:* i^5, i^6, i^7, i^8, i^9, i^{10}, i^{98}, i^{105}, i^{4k}, i^{4k+1}, i^{4k+2}, i^{4k+3}.

Exercício 1.22. *Calcule as raízes indicadas:*

(i) $(-25)^{1/2}$ *(ii)* $64^{1/4}$ *(iii)* $64^{-1/4}$ *(iv)* $(-1+i\sqrt{3})^{1/3}$ *(v)* $(-\sqrt{3}-i)^{1/3}$

Exercício 1.23. *Escreva cada número abaixo na forma $a+b\,i$:*

(i) $[2\,\mathrm{cis}\,(15°)]^4$	*(ii)* $[3\,\mathrm{cis}\,(5°)]^{12}$	*(iii)* $[2\,\mathrm{cis}\,(\pi/6)]^3$
(iv) $(\sqrt{3}-i)^5$	*(v)* $(1+i)^{100}$	*(vi)* $\dfrac{2-3\,i}{5+4\,i}$
(vii) $i^{27}-1/i^{18}$	*(viii)* $\dfrac{i^{26}+i^{64}}{i^{13}+i^{16}}$	*(ix)* $\dfrac{(1-i)^{26}}{(1+i)^{64}}$

Exercício 1.24. *Mostre que, para todo número complexo z, temos $z+\bar{z}=2\,Re(z)$ e $z-\bar{z}=2\,i\,Im(z)$.*

Exercício 1.25. *Encontre as raízes da equação $z^2-(4-i)\,z-8\,i=0$.*

Exercício 1.26. *Sejam $z_0\in\mathbb{C}$ e $r>0$ fixados. Descreva geometricamente o conjunto dos pontos z do plano que satisfazem $|z-z_0|=r$.*

Exercício 1.27. *Sejam z_1, $z_2\in\mathbb{C}$ fixados, com $z_1\neq z_2$. Descreva geometricamente o conjunto de todos os pontos z do plano que satisfazem $|z-z_1|=|z-z_2|$.*

Exercício 1.28. *Resolva as equações:*

(a) $x^3+3\,x^2+2\,x=0$ *(b)* $x^3-6\,x^2-x+6=0$
(c) $x^3+6\,x^2-x-6=0$ *(d)* $x^3-7\,x-6=0$
(e) $x^3+2\,x^2-x-2=0$ *(f)* $x^4-81=0$
(g) $x^3-64=0$ *(h)* $x^3-x^2-3\,x-1=0$
(i) $x^3-6\,x-4=0$

Exercício 1.29. *Encontre a de modo que 2 seja uma raiz de $p(x)=x^3-a\,x^2+5\,x-6$. Para este valor de a, encontre as outras raízes.*

Exercício 1.30. *Verifique que -1 e 2 são raízes de $p(x)=6\,x^4-17\,x^3+2\,x^2+19\,x-6$ e encontre as outras duas.*

Exercício 1.31. *Verifique que 1 e -2 são raízes de $p(x)=4\,x^4+4\,x^3-9\,x^2-x+2$ e encontre as outras duas.*

Observação 1.1. *Em algumas situações, vamos trabalhar indistintamente com o conjunto dos números reais ou o dos números complexos. Nesses casos, usaremos o símbolo $\mathbb{K}$ para denotar $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

Observação 1.2. (O espaço $\mathbb{C}^n$) *Praticamente tudo o que fizemos para o espaço $\mathbb{R}^n$, pode ser feito para o conjunto*

$$\mathbb{C}^n = \{(z_1, \ldots, z_n) \; : \; z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}\}.$$

As operações de adição de $n-$uplas de números complexos e multiplicação de $n-$uplas de números complexos por número complexo são definidas de modo análogo ao que foi feito anteriormente. Essas operações em $\mathbb{C}^n$ também satisfazem as propriedades A1 *a* A4 *e* M1 *a* M4.

O **produto interno usual** *de $\mathbb{C}^n$ é definido do seguinte modo: dados $\mathbf{u} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{v} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$, pomos:*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = x_1 \bar{y}_1 + \ldots + x_n \bar{y}_n , \tag{1.38}$$

em que $\bar{y}_j$ denota o conjugado complexo de y_j. Definimos a **norma** *de um vetor $\mathbf{u}$ de $\mathbb{C}^n$ como sendo $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$ (note que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$).*

Observação 1.3. (Matrizes Complexas) *Em algumas situações precisaremos considerar matrizes cujos elementos são números complexos. Essencialmente tudo o que fizemos nas seções anteriores continua válido para matrizes complexas. Denotaremos o conjunto das matrizes de ordem $m \times n$ complexas por $M_{m\,n}(\mathbb{C})$.*

Capítulo 2

Equações de primeira ordem

2.1 Introdução

Muitos fenômenos em física, biologia e química são descritos por uma equação envolvendo uma função incógnita e algumas de suas derivadas. Um exemplo simples de tal fenômeno é a desintegração radioativa: a taxa de desintegração de uma substância é diretamente proporcional à quantidade do material radioativo presente. Designando por $q(t)$ a quantidade da substância radioativa no instante t e por k a constante de proporcionalidade, temos

$$q'(t) = k\,q(t) \tag{2.1}$$

Um outro exemplo básico é dado pelo movimento em uma dimensão. Um problema fundamental em Mecânica é determinar a posição $x(t)$ de uma partícula m em um instante t conhecendo-se a resultante $F(t, y, y')$ das forças que atuam sobre ela (tais forças podem depender do tempo, da posição e da velocidade da partícula). De acordo com a segunda lei de Newton, temos

$$m\,y'' = F(t, y, y')\,. \tag{2.2}$$

Se a função F for constante, é fácil ver que a solução é da forma $y(t) = A + Bt + Ct^2$. Vejamos um exemplo em que a força F depende de t, y e y'. Consideremos um objeto de massa m na extremidade de uma mola de constante elástica k, como na Figura 2.1 abaixo: assim, a força restauradora da mola devida a um deslocamento y é $F_r = -k\,y$.

Suponhamos ainda que o meio ofereça uma resistência ao movimento cuja intensidade é proporcional à velocidade, $F_a = -c\,y'$, e que uma força externa $f(t)$ é aplicada ao objeto. Logo, a resultante das forças que atuam sobre o objeto é $f(t) - k\,y - c\,y'$. De acordo com (2.2), o deslocamento da massa m é descrito pela equação

$$m\,y'' + c\,y' + k\,y = f(t)\,. \tag{2.3}$$

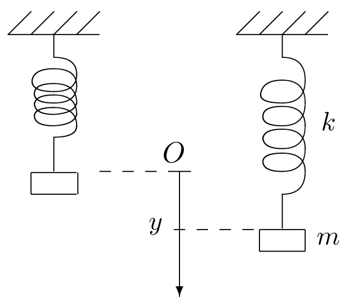


Figura 2.1

Consideremos um exemplo em biologia: um modelo simples de crescimento populacional, chamado modelo Malthusiano, supõe que a taxa de variação $y'(t)$ de uma população em um instante t é proporcional à população $y(t)$ naquele instante, isto é, $y(t)$ satisfaz uma equação da forma

$$y'(t) = k\,y(t)\,. \tag{2.4}$$

A constante k em (2.4) designa a diferença entre a taxa de natalidade e a mortalidade. A equação (2.4) descreve bem o crescimento populacional quando o número de indivíduos não é muito grande. Quando este número cresce além de um certo ponto, a população fica suscetível a alguns fatores que tendem a reduzir o seu crescimento, tais como falta de alimentos, epidemias, etc. É natural impor uma limitação ao número de elementos da população, digamos $y(t) \leq N$. Um modelo mais realístico que leva em conta estes fatores foi proposto por Verlhust em 1838 e fornece uma equação da forma

$$y'(t) = k\,y(t)\,[\,N - y(t)\,]\,. \tag{2.5}$$

Consideremos agora um exemplo em química. É importante conhecer o tempo de duração de uma reação química. Reações como as explosões processam-se tão rapidamente que elas podem ser consideradas instantâneas. Por outro lado, reações como a decomposição do plástico e a desintegração radioativa se processam em longos intervalos de tempo, chegando a durar anos. Em algumas situações, como na decomposição de lixo, cicatrização de ferimentos ou no endurecimento de concreto, é interessante acelerar a reação. Em outros casos, é desejável que o processo seja retardado ao máximo, como é o caso da deterioração de alimentos, coagulação do sangue, etc. A *velocidade* de uma reação química (que é a rapidez com que ela se processa) depende da concentração dos reagentes, pressão, temperatura, etc. Para simplificar nosso exemplo, assumiremos que todos estes fatores, exceto a concentração, permanecem constantes. Assim, a velocidade da reação depende apenas da concentração dos reagentes. Um princípio fundamental no estudo da velocidade das reações químicas é a chamada *lei da ação das massas*, segundo a qual a taxa de variação da concentração (a concentração é dada em moles por unidade de volume) das substâncias reagentes é diretamente proporcional à concentração de cada uma dessas substâncias.

Reações químicas são classificadas como unimoleculares, bimoleculares, etc de acordo com o número de moléculas reagentes. A dissociação do bromo gasoso

$$\mathrm{Br_2} \longrightarrow 2\,\mathrm{Br}$$

é uma reação unimolecular. Já a reação em que 2 moléculas de óxido nítrico (NO) reagem com uma molécula de oxigênio (O_2) para formar 2 moléculas de dióxido nítrico

$$2\,\mathrm{NO} + \mathrm{O_2} \longrightarrow 2\,\mathrm{NO_2}$$

é um exemplo de reação trimolecular.

A lei da ação das massas fornece uma equação que deve estar satisfeita pela concentração dos reagentes. De fato, em uma reação unimolecular, se $x(t)$ denota a concentração da substância reagente (digamos, em molécula grama por cm^3) no instante t, pela lei da ação das massas, temos

$$x'(t) = -k\,x(t) \tag{2.6}$$

em que $-k$ é a constante de proporcionalidade (como a concentração da substância reagente decresce durante a reação, a taxa de variação da concentração é negativa).

Quando duas substâncias A e B reagem para formar uma (ou mais) substâncias novas em uma reação tal como

$$A + B \longrightarrow C$$

a velocidade da reação é diretamente proporcional ao produto das concentrações dos reagentes. Consideremos apenas o caso da reação entre uma molécula de cada reagente. Se denotarmos por a a concentração inicial da substância A, por b a concentração inicial da substância B e por $y(t)$ a quantidade (em moléculas-grama) do produto C da reação no instante t, temos que as quantidades de A e B no instante t são $a - y(t)$ e $b - y(t)$, respectivamente. Então

$$y'(t) = k\,\big[\,a - y(t)\,\big]\,\big[\,b - y(t)\,\big] \tag{2.7}$$

(a constante k na equação (2.7) é positiva pois $y(t)$ cresce quando t cresce).

Reações químicas envolvendo mais reagentes dão origem a outros tipos de equações diferenciais. Mais detalhes podem ser encontrados em textos de Físico-Química.

2.2 Definições

Uma equação que relaciona uma função incógnita e algumas de suas derivadas é chamada **equação diferencial**. Quando a função incógnita depende de uma única variável real, ela chama-se ***equação diferencial ordinária***; caso a função incógnita dependa de mais de uma variável real ela é dita uma **equação diferencial parcial**. Neste texto, trataremos exclusivamente das equações diferenciais ordinárias. A **ordem** de uma equação diferencial é a mais alta ordem das derivadas da função incógnita que comparecem na equação. Assim, (2.1), (2.4) e (2.5) são equações de primeira ordem e (2.3) é uma equação de segunda ordem.

A forma geral de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem é

$$y'(t) = f(t, y(t)), \tag{2.8}$$

que escreveremos abreviadamente

$$y' = f(t, y).$$

Na equação (2.8), $f(t, y)$ é uma função definida em um subconjunto A de $\mathbb{R}^2$. Uma **solução** de (2.8) é uma função $y(t)$ definida em um intervalo I tal que: $(t, y(t)) \in A$, $\forall t \in I$ e $y(t)$ satisfaz (2.8), isto é, $y'(t) = f(t, y(t))$, $\forall t \in I$. Por exemplo, a função $\varphi(t) = 8\, e^{3\,t}$ é solução da equação $y' = 3\, y$, pois $\varphi'(t) = 24\, e^{3\,t} = 3\, \varphi(t)$. Para cada $(t_0\,,\, y_0) \in A$, o problema de encontrar uma solução $y(t)$ de (2.8) tal que $y(t_0) = y_0$ chama-se **problema de valor inicial** (que escrevemos abreviadamente PVI).

Exercício 2.1. *Em cada caso verifique se a função dada é uma solução da equação diferencial correspondente e determinar c de modo que a solução particular resultante satisfaça a condição dada:*
a) $y' + y = 1$; $y(t) = 1 + ce^{-t}$; $y = 3$ *quando* $t = 0$
b) $ty' = 3y$, $y(t) = ct^3$; $y = 1$ *quando* $t = -2$
c) $y'' + 9y = 0$; $y(t) = \cos 3t + c \operatorname{sen} 3t$; $y = 5$ *quando* $t = \pi/6$.

2.3 Equações separáveis

Uma equação diferencial que pode ser escrita na forma

$$g(y)\,\frac{d\,y}{dt} = h(t)\,, \tag{2.9}$$

algumas vezes apresentada na forma diferencial

$$g(y)\, dy = h(t)\, dt,$$

é chamada **separável**. Vamos supor que as funções g e h em (2.9) são contínuas em convenientes intervalos. Soluções de tais equações podem ser facilmente encontradas: se $y = \varphi(t)$ é uma solução de (2.9) em um intervalo I, podemos escrever

$$g(\varphi(t))\, \varphi'(t) = h(t), \qquad \forall t \in I\,.$$

Integrando, temos

$$\int g(\varphi(t))\, \varphi'(t)\; dt = \int h(t)\, dt \tag{2.10}$$

Usando a fórmula de integração por substituição para integral indefinida com $y = \varphi(t)$ (portanto $dy = \varphi'(t)\,dt$), podemos escrever a integral do primeiro membro como

$$\int g(\varphi(t))\,\varphi'(t)\;dt = \int g(y)\,dy\,. \tag{2.11}$$

Se $G(y)$ e $H(t)$ são primitivas de g e h, respectivamente, isto é, $G'(y) = g(y)$ e $H'(t) = h(t)$, a igualdade (2.10) fica

$$G(y) = H(t) + C \tag{2.12}$$

em que C designa uma constante arbitrária (proveniente das integrais indefinidas). A igualdade (2.12) fornece a solução numa *forma implícita.* Se resolvermos esta equação na variável y, obtemos *explicitamente* $y(t)$.

Exemplo 2.1. *Resolver o PVI* $y' = 6\,t^5\,e^{-y},\ y(1) = 1.$

A equação é separável pois podemos reescrevê-la como

$$e^y\,y' = 6\,t^5\,.$$

Integrando, temos

$$\int e^y\,dy = 6\int t^5\,dt$$

donde $e^y = t^6 + C$, ou $y = \ln(t^6 + C)$. Como $y(1) = 1$, temos $C = e - 1$. Logo,

$$y(t) = \ln(t^6 + e - 1).$$

Exemplo 2.2. *Encontrar as soluções da equação* $y' = a\,y$, *em que* a *é uma constante.*

Notemos que $y(t) \equiv 0$ é uma solução desta equação; procuremos então soluções $y(t) \neq 0$. Dividindo os dois membros da equação por $y(t)$ e integrando, temos

$$\int \frac{y'(t)\,dt}{y(t)} = a\int dt,$$

Notando que o primeiro membro é igual a $\ln|y(t)|$, temos

$$\ln|y(t)| = a\,t + K,$$

donde obtemos

$$|y(t)| = e^{a\,t+K} = e^K\, e^{a\,t}\ ,$$

que podemos escrever na forma

$$y(t) = C\, e^{a\,t}\ , \tag{2.13}$$

com $C = e^K$, se $y(t) > 0$ e $C = -e^K$, se $y(t) < 0$; notemos que a solução nula também é dada pela expressão (2.13), se $C = 0$.

Exemplo 2.3. (Desintegração Radioativa)
A meia vida de um certo isótopo de estrôncio é 28 anos (isto é, metade da quantidade original do estrôncio desintegra-se após 28 anos). Quanto tempo deve passar após uma explosão atômica para que a quantidade de estrôncio se reduza a 10% da original?

A taxa de desintegração de uma substância radioativa em qualquer instante é proporcional à quantidade dessa substância naquele instante. Assim, se $Q(t)$ é a quantidade (número de átomos ou massa) de uma certa substância radioativa no instante t, temos

$$Q'(t) = -a\, Q(t). \tag{2.14}$$

Assim, a quantidade $Q(t)$ é dada por

$$Q(t) = Q_0\, e^{-a\,t}. \tag{2.15}$$

Como a meia vida da substância é 28 anos, temos $Q(28) = Q_0/2$, ou seja,

$$Q_0\, e^{-28\,a} = \frac{Q_0}{2},$$

donde obtemos

$$a = \frac{\ln 2}{28} \simeq \frac{1}{40} = 0,025$$

Portanto, a quantidade da substância no instante t é

$$Q(t) = Q_0\, e^{-t/40}$$

Queremos saber em que instante essa quantidade estará reduzida a 10% da quantidade original, isto é

$$Q_0\, e^{-t/40} = \frac{Q_0}{10}.$$

Desta igualdade, obtemos

$$e^{t/40} = 10, \quad \text{ou seja,} \quad t = 40 \ln 10 \simeq 92,1 \text{ anos.}$$

Exemplo 2.4. *Resolver a equação diferencial*

$$y' = k\,(y-a)\,(y-b)\,,$$

em que k, a, b *são constantes, com* $a \neq b$.

Em primeiro lugar, notemos que as funções constantes $y(t) \equiv a$ e $y(t) \equiv b$ são soluções da equação diferencial. Para $y \neq a$ e $y \neq b$, a equação diferencial pode ser escrita na forma

$$\int \frac{dy}{(y-a)\,(y-b)} = k \int dt$$

Vamos calcular a integral do primeiro membro pelo método das frações parciais: escrevendo

$$\frac{1}{(y-a)\,(y-b)} = \frac{A}{y-a} + \frac{B}{y-b}$$

temos $A = \dfrac{1}{a-b}$, $B = \dfrac{-1}{a-b}$. Logo,

$$\frac{1}{a-b} \int \frac{dy}{y-a} - \frac{1}{a-b} \int \frac{dy}{y-b} = k\,t + C_1$$

ou

$$\ln \frac{|\,y-a\,|}{|\,y-b\,|} = k\,(a-b)\,t + C_1\,(a-b)$$

Isolando y (isto é, resolvendo esta equação para obter y como função de t), temos

$$y(t) = \frac{a - b\,C\,e^{k\,(a-b)t}}{1 - C\,e^{k\,(a-b)t}}\,, \tag{2.16}$$

em que $C = e^{C_1(a-b)}$, se $(y-a)/(y-b) > 0$ e $C = -e^{C_1(a-b)}$, se $(y-a)/(y-b) < 0$.

Observação 2.1. *Conforme vimos em (2.7), a equação estudada no Exemplo 2.4 descreve a velocidade de uma reação química em que $y(t)$ designa a concentração do produto da reação. Suponhamos que $a < b$ na equação (2.6). A condição inicial é $y(0) = 0$. Substituindo esta informação em (2.16), obtemos $C_1 = a/b$. Portanto*

$$y(t) = \frac{a(1 - e^{k\,(a-b)\,t})}{1 - a\,e^{k\,(a-b)\,t}/b}$$

Notemos que, como $k\,(a-b) < 0$, temos $e^{k\,(a-b)\,t} \to 0$, quando $t \to \infty$. Logo, $y(t) \to a$, quando $t \to \infty$, isto é, a concentração do produto da reação tende à concentração inicial do reagente A.

Observação 2.2. *Equações diferenciais da forma*

$$z'(x) = F\Big(\frac{z}{x}\Big) \tag{2.17}$$

não são separáveis, mas podem ser colocadas na forma (2.9) após uma conveniente mudança de variáveis. De fato, chamando $y = z/x$, ou $z = x\,y$, temos

$$z' = y + x\,y'\,.$$

Substituindo esta expressão em (2.17), temos

$$y + x\,y' = F(y)$$

donde

$$\frac{1}{F(y) - y}\,y' = \frac{1}{x}\,.$$

Exemplo 2.5. *Encontrar as soluções da equação* $(x^2 + z^2)\,z' = x\,z$.

A equação diferencial dada é equivalente a

$$z' = \frac{x\,z}{x^2 + z^2} = \frac{z/x}{1 + (z/x)^2} = f(z/x),$$

em que $f(y) = \dfrac{y}{1 + y^2}$. Chamando $z = x\,y$ e repetindo o procedimento acima, podemos reescrever a equação dada como

$$\frac{1}{\dfrac{y}{1 + y^2} - y}\,y' = \frac{1}{x}$$

ou

$$(y^{-3} + y^{-1})\, y' = -\frac{1}{x}$$

Integrando, temos

$$\frac{1}{2\,y^2} - \ln|y| = \ln\,|x| + C\ .$$

Voltando à variável z, obtemos

$$\frac{x^2}{2\,z^2} - \ln|z| = C\,,$$

uma equação que fornece z implicitamente como função de x.

2.4 Equação linear de primeira ordem

Como um caso especial importante da equação (2.8) temos a chamada **equação linear** de primeira ordem

$$y' + a(t)\,y = b(t). \tag{2.18}$$

Na equação (2.18), $a(t)$ e $b(t)$ são funções (conhecidas) contínuas em um intervalo I. Se $b(t) \not\equiv 0$, a equação é (2.18) chamada **não homogênea**. Se $b(t) \equiv 0$, esta equação é chamada **homogênea** e tem a forma

$$y' + a(t)\,y = 0. \tag{2.19}$$

Nosso objetivo nesta seção é obter uma expressão que forneça todas as soluções da equação (2.18): tal expressão é chamada **solução geral** de (2.18). Em virtude de sua simplicidade, analisaremos primeiramente a equação homogênea.

É fácil ver que (2.19) é uma equação separável e que a função $y(t) \equiv 0$ é solução de (2.19). Procuremos soluções $y(t) \neq 0$ de (2.19). Podemos reescrever (2.19) na forma

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -a(t). \tag{2.20}$$

Seja $A(t)$ uma função cuja derivada é $a(t)$, isto é, $A'(t) = a(t)$. Integrando (2.20), temos

$$\ln|y(t)| = -A(t) + K$$

(em que K designa uma constante arbitrária), ou seja,

$$|y(t)| = e^{-A(t)+K} = e^{-A(t)}\, e^{K}\,. \tag{2.21}$$

Agora, notando que $y(t)$ é uma função contínua e $y(t) \neq 0$, para todo t, temos: ou $y(t) > 0$, para todo t, ou $y(t) < 0$, para todo t. Portanto, chamando $C = e^K$, se $y(t) > 0$, para todo t ou $C = -e^K$, se $y(t) < 0$, para todo t, podemos reescrever (2.21) como

$$y(t) = Ce^{-A(t)}. \tag{2.22}$$

A expressão (2.22) também inclui a solução nula se tomarmos $C = 0$. Assim, fazendo C variar em $\mathbb{R}$, obtemos todas as possíveis soluções da equação (2.19). Logo, (2.22) é a solução geral da equação (2.19).

Exemplo 2.6. *Encontrar a solução da equação* $y'(t) = 3\,y(t)$ *tal que* $y(1) = e$.

Repetindo o procedimento acima ou usando (2.22), vemos que a solução geral da equação diferencial é

$$y(t) = C\,e^{3\,t}.$$

Pondo $t = 1$, temos $y(1) = C\,e^3$. Como $y(1) = e$, segue-se que $C = e^{-2}$. Logo,

$$y(t) = e^{-2}e^{3\,t} = e^{3\,t-2}.$$

Observação 2.3. *A partir da forma da solução de (2.19) obtemos uma relação interessante. Notemos que, a partir de (2.22) podemos escrever*

$$e^{A(t)}\,y(t) = C$$

Como a função $e^{A(t)}\,y(t)$ *é constante, sua derivada é nula. Por outro lado,*

$$\frac{d}{dt}\big[\,e^{A(t)}\,y(t)\,\big] = e^{A(t)}\,y'(t) + a(t)\,e^{A(t)}\,y(t) = e^{A(t)}\,\big[\,y'(t) + a(t)\,y(t)\,\big].$$

que é o primeiro membro de (2.19) multiplicado por $e^{A(t)}$. *Assim, multiplicando os dois membros da equação (2.19) por* $e^{A(t)}$, *podemos reescrevê-la na forma* quase integrada

$$\frac{d}{dt}\big[\,e^{A(t)}\,y(t)\,\big] = 0. \tag{2.23}$$

Esta observação será útil para resolver a equação (2.18) em sua forma geral. Qualquer função que, ao ser multiplicada aos dois membros de uma equação, transforma-a em uma outra mais *trabalhável* chama-se **fator integrante** desta equação. Deste modo, a função $e^{A(t)}$ é um fator integrante de (2.19).

Exemplo 2.7. *Encontrar a solução geral da equação* $y' + (\cos t)\, y = 0$.

Multiplicando os dois membros da equação diferencial pelo fator integrante $e^{\operatorname{sen} t}$, obtemos

$$e^{\operatorname{sen} t}\, y' + \cos t\, e^{\operatorname{sen} t} y = 0$$

ou

$$\big[e^{\operatorname{sen} t}\, y(t)\big]' = 0\,.$$

Integrando esta função e *isolando* $y(t)$ no primeiro membro, temos

$$y(t) = L\, e^{-\operatorname{sen} t}, \quad L \in \mathbb{R}.$$

Consideremos agora o caso geral da equação (2.18), em que $a(t)$ e $b(t)$ são funções contínuas em um intervalo I. O tratamento é análogo ao anterior. Para evitar repetições, vamos obter a expressão da solução do problema de valor inicial

$$y' + a(t)\, y = b(t) \tag{2.24}$$

$$y(t_0) = y_0\,, \tag{2.25}$$

em que $t_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. Seja $A(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$; notemos que $A(t_0) = 0$ e $A'(t) = a(t)$. Multiplicando a equação (2.24) por $e^{A(t)}$, temos

$$y'(t)\, e^{A(t)} + a(t)\, y(t)\, e^{A(t)} = b(t)\, e^{A(t)}$$

que podemos escrever na forma

$$\frac{d}{dt}\big[e^{A(t)}\, y(t)\big] = e^{A(t)}\, b(t)\,.$$

Integrando os dois membros desde t_0 até t, obtemos

$$e^{A(t)}\, y(t) - e^{A(t_0)}\, y(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{A(s)}\, b(s)\, ds\,.$$

Como $e^{A(t_0)} = 1$ e $y(t_0) = y_0$, temos

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-A(t)} y_0 + e^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{A(s)}\, b(s)\, ds = \\ &= e^{-A(t)} y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(t)} e^{A(s)}\, b(s)\, ds \end{aligned}$$

Notando que

$$\begin{aligned} e^{-A(t)}\, e^{A(s)} = e^{A(s)-A(t)} &= \exp\Big[\int_{t_0}^{s} a(u)\, du - \int_{t_0}^{t} a(u)\, du \Big] = \\ &= \exp\Big[\int_{t}^{s} a(u)\, du \Big] \end{aligned}$$

(para simplificar a notação, estamos utilizando o símbolo exp para denotar a exponencial), obtemos a expressão da solução geral de (2.18)

$$y(t) = e^{-A(t)}\, y_0 + \int_{t_0}^{t} \exp\Big[\int_{t}^{s} a(u)\, du \Big]\, b(s)\, ds \tag{2.26}$$

Observação 2.4. (a) *Notemos que a solução dada pela expressão (2.26) está definida para todo $t \in I$ e que, se $b(t) \equiv 0$, temos a solução obtida no caso anterior.*
(b) *Em (2.26), a parcela*

$$e^{-A(t)}\, y_0$$

é uma solução da equação homogênea associada a (2.24); fazendo y_0 variar em $\mathbb{R}$, obtemos todas as possíveis soluções desta equação. Um cálculo simples mostra que a parcela

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} \exp\Big(\int_{t}^{s} a(u)\, du \Big) b(s)\, ds$$

é uma solução (que chamaremos solução particular*) da equação não homogênea (2.24) (é a solução de (2.24) tal que $z(0) = 0$. Portanto, a solução geral da equação (2.24) se escreve como a soma da solução geral da equação homogênea com uma solução particular da equação não homogênea (2.24).*

Exemplo 2.8. *Encontrar a solução do problema de valor inicial*

$$y' + \frac{2}{t}\, y = t^2, \qquad y(1) = 6.$$

Seja

$$A(t) = \int_1^t \frac{2}{s}\, ds = 2\, \ln\, t = \ln\, t^2.$$

Multiplicando os dois membros da equação por $e^{A(t)} = e^{\ln\, t^2} = t^2$, temos

$$t^2\, y'(t) + 2\, t\, y(t) = t^4$$

ou

$$\left[\, t^2\, y(t)\, \right]' = t^4.$$

Integrando os dois membros desde 1 até t, temos

$$t^2\, y(t) - y(1) = \int_1^t s^4\, ds = \frac{t^5}{5} - \frac{1}{5}\,.$$

Como $y(1) = 6$, temos

$$y(t) = \frac{6}{t^2} + \frac{t^3}{5} - \frac{1}{5\, t^2} = \frac{t^3}{5} + \frac{29}{5\, t^2}\,.$$

A resolução destas equações também pode ser feita usando integrais indefinidas, como nos outros casos.

Exemplo 2.9. *Encontrar a solução geral da equação* $y' + 5\, y = t$.

Multiplicando a equação pelo fator integrante $e^{5\, t}$, obtemos

$$\left[\, e^{5\, t}\, y(t)\, \right]' = t\, e^{5\, t}.$$

Integrando, temos

$$e^{5\, t}\, y(t) = \int t\, e^{5\, t}\, dt = \frac{1}{5}\, t\, e^{5\, t} - \frac{1}{25}\, e^{5\, t} + K,$$

donde

$$y(t) = \frac{1}{5}\, t\, - \frac{1}{25} + K\, e^{-5\, t}\,.$$

Exemplo 2.10. *Encontrar a solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y' + (\cos t)\, y = \cos t \\ y(0) = -6\,. \end{cases}$$

Multiplicando a equação diferencial pelo fator integrante $e^{\operatorname{sen} t}$ (calculado no exemplo 2.7), obtemos

$$\left[\, e^{\operatorname{sen} t}\, y(t)\, \right]' = \cos t\, e^{\operatorname{sen} t}.$$

Integrando, temos

$$e^{\operatorname{sen} t}\, y(t) = \int e^{\operatorname{sen} t} \cos t\, dt = e^{\operatorname{sen} t} + K$$

donde obtemos $y(t) = 1 + K\, e^{-\operatorname{sen} t}$. Desta igualdade, temos $y(0) = 1 + K$; como queremos $y(0) = -6$, obtemos $K = -7$ e a solução do PVI é

$$y(t) = 1 - 7\, e^{-\operatorname{sen} t}\,.$$

Exemplo 2.11. (Diluição de Misturas)
Um tanque contém 5.000 litros de água na qual estão diluídos $50\, Kg$ *de sal. A essa mistura adiciona-se salmoura à razão de* $10\, l/min$ *com uma concentração de sal de* $20\ g/l$*. A concentração da mistura é mantida homogênea por meio de um agitador (isto é, a concentração de sal é a mesma em todos os pontos do tanque). A mistura (homogênea) deixa o tanque à razão de* $10\ l/min$*. Determinar a quantidade de sal e a concentração de sal num instante* t*.*

Indiquemos por $Q(t)$ a quantidade (em gramas) de sal no tanque no instante t. O enunciado do problema informa que a quantidade de sal no instante $t = 0$ é $Q(0) = 50.000\, g$, que o sal está sendo adicionado no tanque à razão de

$$10\,(l/min) \cdot 20\,(g/l) = 200 g/min$$

e está saindo à razão de

$$10\ (l/min) \frac{Q(t)}{5000}\ (g/l) = \frac{Q(t)}{500}\ g/min.$$

Portanto, a taxa de variação da quantidade de sal no tanque, que é a diferença entre a taxa da quantidade que entra e a que sai, é dada por:

$$Q' = 200 - \frac{Q}{500},$$

cuja solução geral é

$$Q(t) = 100.000 + Ce^{-t/500}.$$

Como $Q(0) = 50000\, g$ temos que a quantidade de sal no instante t é:

$$Q(t) = 100.000 - 50.000\, e^{-t/500}$$

e a concentração de sal no tanque no instante t é:

$$c(t) = \frac{Q(t)}{5000} = \frac{100.000}{5.000} - \frac{50.000}{5.000} e^{-t/500} = 20 - 10e^{-t/500}.$$

Observemos que, quando $t \to \infty$, $Q(t) \to 100.000$ e $c(t) \to 20$. Portanto, a quantidade de sal tende a $100.000\, g$ e a concentração tende ao valor limite de $20\, g/l$.

Exemplo 2.12. (Um circuito elétrico simples) *A figura ao lado mostra um circuito elétrico contendo um indutor de indutância L, um resistor de resistência R e uma fonte de força eletromotriz $E(t)$.*

(a) Determinar a corrente $I(t)$ em um instante $t > 0$ sabendo que $I(0) = 0$.

(b) Determinar $I(t)$, sendo:

(i) $E(t) \equiv E_0$ (uma constante);

(ii) $E(t) = E_0 \operatorname{sen}(\omega t)$ (E_0, ω constantes).

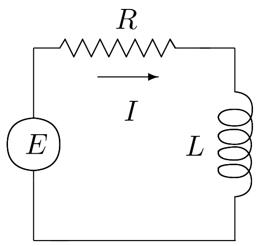


Figura 3.1

A diferença de potencial entre as extremidades do resistor é $R\,I$ e entre as extremidades do indutor é $L\,I'$. Pela segunda Lei de Kirchoff, a soma algébrica das diferenças de potencial no circuito é nula; temos então $L\,I' + R\,I - E(t) = 0$, ou seja,

$$I' + \frac{R}{L}\, I = \frac{E(t)}{L}$$

Como $I(0) = 0$, a corrente é dada por

$$I(t) = \frac{1}{L}\, e^{-R\,t/L} \int_0^t e^{R\,s/L} E(s)\, ds\,.$$

Se $E(t) = E_0$, temos

$$\int_0^t e^{R\,s/L} E(s)\, ds = E_0 \int_0^t e^{R\,s/L}\, ds = E_0\, \frac{L}{R}\, (e^{R\,t/L} - 1)$$

Logo,

$$I(t) = \frac{1}{L}\, e^{-R\,t/L}\, E_0\, \frac{L}{R}\, (e^{R\,t/L} - 1) = \frac{E_0}{R}\, (1 - e^{-R\,t/L})\,.$$

Se $E(t) = E_0 \,\mathrm{sen}\,(\omega\, t)$, temos

$$\int_0^t e^{R\,s/L} E(s)\, ds = \int_0^t E_0 e^{R\,s/L} \mathrm{sen}\,(\omega\, s)\, ds =$$

$$= \frac{E_0\, L}{R^2 + L^2\,\omega^2} \Big\{ e^{R\,t/L} \big[\, R\,\mathrm{sen}\,(\omega\, t) - \omega\, L \cos(\omega\, t)\,\big] + \omega\, L \Big\}\,.$$

Logo,

$$I(t) = \frac{E_0}{R^2 + L^2\,\omega^2} \big[\, \omega\, L\, e^{-R\,t/L} - \omega\, L \cos(\omega\, t) + R\,\mathrm{sen}\,(\omega\, t)\,\big]\,.$$

Observação 2.5. *Tudo o que fizemos no caso em que as funções $a(t)$ e $b(t)$ são reais pode ser repetido se a e b forem complexas. Por exemplo, as soluções da equação $y' = (3 + 2\,i)\, y$ são da forma $y(t) = C\, e^{(3+2\,i)\,t} = C\, e^{3\,t}[\cos(2\,t) + i\,\mathrm{sen}\;(2\,t)]$, em que C é uma constante arbitrária.*

Exemplo 2.13. *Sejam $p(t)$ e $q(t)$ funções contínuas em um intervalo I e $n \in \mathbb{R}$ um número dado. A equação diferencial*

$$y' + p(t)\, y = q(t)\, y^n, \tag{2.27}$$

chama-se **equação de Bernoulli***; se $n \neq 0$ e $n \neq 1$, a equação de Bernoulli não é linear. Mostrar a mudança de variável $z = y^{1-n}/(1-n)$ transforma a equação (2.27) em uma equação linear de $1^{\underline{a}}$ ordem.*

Dividindo (2.27) por y^n, temos

$$y^{-n}\, y' + p(t)\, y^{1-n} = q(t). \tag{2.28}$$

Agora, notando que $y^{-n}\, y' = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{y^{1-n}}{1-n}\right)$, podemos reescrever (2.28) como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y^{1-n}}{1-n}\right) + (1-n)\, p(t)\, \frac{y^{1-n}}{1-n} = q(t)$$

ou, chamando $z = y^{1-n}/(1-n)$, temos

$$z' + (1-n)\, p(t)\, z = q(t)\,,$$

que é uma equação linear de 1ª ordem.

Exemplo 2.14. *Encontrar a solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y' - 2\,t\,y = -2\,t\,y^2 \\ y(0) = 1/3. \end{cases}$$

Multiplicando os dois membros da equação por y^{-2}, temos

$$y^{-2}\, y' - 2\,t\,y^{-1} = -2\,t\,.$$

Como $y^{-2}\, y' = -(y^{-1})'$, a equação diferencial pode ser escrita como

$$-(y^{-1})' - 2\,t\,y^{-1} = -2\,t$$

ou, chamando $z = y^{-1}$,

$$z' + 2\,t\,z = 2\,t.$$

Multiplicando esta equação pelo fator integrante e^{t^2}, temos

$$\left[\, e^{t^2} z \,\right]' = 2\,t\,e^{t^2}$$

Integrando, temos

$$e^{t^2}\, z(t) = \int 2\,t\,e^{t^2}\, dt = e^{t^2} + C\,.$$

Portanto

$$z(t) = 1 + C\, e^{-t^2}\,.$$

A condição inicial para a equação na variável z é $z(0) = 3$. Portanto $C = 2$ e

$$z(t) = 1 + 2\,e^{-t^2}\,.$$

Voltando à variável y, obtemos

$$y(t) = \frac{1}{1 + 2\,e^{-t^2}} = \frac{e^{t^2}}{e^{t^2} + 2}\quad.$$

2.5 Equações diferenciais exatas

Sejam $P, Q \colon U \to \mathbb{R}$ funções contínuas com derivadas parciais contínuas num conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Uma equação diferencial da forma

$$P(t,y) + Q(t,y)\,y' = 0 \tag{2.29}$$

ou

$$P(t,y)\,dt + Q(t,y)\;dy = 0 \tag{2.30}$$

é chamada **exata** quando existe uma função $V \colon U \to \mathbb{R}$, $V = V(t,y)$, tal que

$$\frac{\partial V(t,y)}{\partial t} = P(t,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial V(t,y)}{\partial y} = Q(t,y), \qquad \forall (t,y) \in U. \tag{2.31}$$

Uma tal função V é chamada uma **integral primeira** de (2.29).

Uma razão para o nome *equação diferencial exata* é que a expressão $P(t,y)\,dt + Q(t,y)\,dy$ é igual a $dV(t,y)$, a diferencial total da função $V(t,y)$: lembremos que

$$dV(t,y) = \frac{\partial V}{\partial t}\,dt + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy.$$

Exemplo 2.15. *A equação diferencial*

$$(4t - y) + (2y - t)\,\frac{dy}{dt} = 0$$

é exata e a função $V(t,y) = 2\,t^2 - t\,y + y^2$ é uma integral primeira para esta equação; de fato,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 4\,t - y \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 2\,y - t\,.$$

Usando a regra da cadeia para derivadas parciais, vemos que, se $y(t)$ é uma solução da equação diferencial (2.29), temos

$$\frac{d}{dt}\,V(t,y(t)) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y}\,y'(t) = P(t,y(t)) + Q(t,y(t))\,y'(t) = 0$$

Logo, a função $V(t,y(t))$ é constante e as soluções de (2.29) satisfazem $V(t,y(t)) = C$, em que C denota uma constante arbitrária, ou seja, as soluções da equação (2.29) são obtidas resolvendo-se as equações $V(t,y) = C$, em que C é uma constante arbitrária. Em virtude desta propriedade, a função $V(t,y)$ é dita uma **integral primeira** da equação (2.29) e as curvas de nível da função V, isto é, as curvas planas $y = y(t)$ definidas pela equação $V(t,y) = C$, (em que C é uma constante arbitrária) são chamadas **curvas integrais** ou **curvas soluções** da equação (2.29).

No caso da equação diferencial vista no exemplo anterior, uma integral primeira é $V(t,y) = 2\,t^2 - t\,y + y^2$ e as cuvas integrais são as soluções da equação $2\,t^2 - t\,y + y^2 = C$. Logo, as soluções desta equação são dadas por

$$y = \frac{t \pm \sqrt{-7\,t^2 + 4\,C}}{2}\,.$$

Neste exemplo é possível obter a solução *na forma explícita* $y = y(t)$. Em geral, a solução é dada na forma implícita de uma equação $V(t,y) = C$.

Dada uma equação na forma (2.29), a primeira tarefa que temos é determinar se ela é uma equação exata. De acordo com a definição, para determinarmos se uma equação diferencial é exata, devemos encontrar uma integral primeira; com isso, automaticamente encontramos suas soluções. O problema é que, ao contrário do que ocorreu no exemplo acima, geralmente não é tão simples encontrar uma integral primeira. Deste modo, nossa primeira tarefa é determinar condições sobre P e Q que permitam concluir quando uma equação é exata. Notemos que, se (2.29) é exata, então existe $V(t,y)$ tal que

$$\frac{\partial V}{\partial t} = P(t,y), \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = Q(t,y)\,.$$

Derivando estas igualdades e lembrando que as derivadas mistas de segunda ordem de V são iguais, obtemos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial V}{\partial t}\Big) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial V}{\partial y}\Big) = \frac{\partial Q}{\partial t}\,.$$

Assim, uma condição necessária para que a equação (2.29) seja exata é que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial t}\,. \tag{2.32}$$

Pode-se mostrar que a condição (2.32) é suficiente para que a equação (2.29) seja exata quando U é, por exemplo, um retângulo aberto, $U = (a,b) \times (c,d)$. Neste caso, a função $V(t,y)$ dada por

$$V(t,y) = \int_{t_0}^{t} P(s,y_0)\,ds + \int_{y_0}^{y} Q(t,x)\,dx$$

é uma integral primeira da equação diferencial (2.29). Na prática, ao resolvermos uma equação exata, integramos a igualdade $\dfrac{\partial V}{\partial t} = P(t,y)$ mantendo y fixo: denotemos por $\int P(t,y)\,dt$ uma antiderivada de $P(t,y)$ e por $h(y)$ uma função arbitrária de y. Temos

$$V(t,y) = \int P(t,y)\,dt + h(y)\,.$$

Em seguida, usamos a igualdade $\dfrac{\partial V}{\partial y} = Q(t,y)$ para determinar $h(y)$.

Exemplo 2.16. *Encontrar as curvas integrais de* $t^2\,y^3 + t^3\,y^2\,y' = 0$.

Em primeiro lugar, notemos que a equação é exata, uma vez que

$$\frac{\partial(t^2\,y^3)}{\partial y} = 3\,t^2\,y^2 = \frac{\partial(t^3\,y^2)}{\partial t}\,.$$

Portanto, existe $V(t.0,y)$ tal que $\dfrac{\partial V}{\partial t} = t^2\,y^3$. Mantendo y fixo e integrando em relação a t, temos

$$V(t,y) = \frac{t^3\,y^3}{3} + h(y).$$

Derivando esta igualdade, temos

$$\frac{\partial V(t,y)}{\partial y} = t^3\,y^2 + h'(y).$$

De acordo com a definição de V, temos $\dfrac{\partial V(t,y)}{\partial y} = t^3\,y^2$. Comparando estas duas igualdades, temos $h'(y) = 0$. Podemos então tomar $V(t,y) = t^3\,y^3/3$. Assim, as curvas integrais são dadas por

$$\frac{t^3\,y^3}{3} = C \qquad \text{ou} \qquad y(t) = \frac{k}{t} \qquad (k = \sqrt[3]{3\,C})\,.$$

Uma função $\mu(t,x) \not\equiv 0$ é chamada um **fator integrante** da equação diferencial

$$P(t,y) + Q(t,y)\,y' = 0 \tag{2.33}$$

se a equação diferencial

$$\mu(t,y)\,P(t,y) + \mu(t,y)\,Q(t,y)\,y' = 0$$

for exata. Por exemplo, a equação diferencial

$$y - t^2\,y^2 + t\,y' = 0$$

não é exata, pois $\dfrac{\partial}{\partial y}\,(y - t^2\,y^2) = 1 - 2\,t^2 y$ enquanto que $\dfrac{\partial t}{\partial t} = 1$. Entretanto, multiplicando a equação pela função $\mu(t,y) = t^{-2}\,y^{-2}$, obtemos a equação diferencial

$$\frac{1}{t^2\,y} - 1 + \frac{1}{t\,y^2}\;y' = 0$$

que é exata, pois

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{t^2\,y} - 1\right) = \frac{-1}{t^2\,y^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t\,y^2}\right)\,.$$

Geralmente é difícil encontrar um fator integrante, mas em algumas situações especiais, isso é possível, como veremos a seguir.

Vamos procurar um fator integrante de (2.33) que não depende de y, isto é, procuramos uma função $\mu(t)$ de modo que a equação diferencial

$$\mu(t)\,P(t,y) + \mu(t)\,Q(t,y)\,y' = 0$$

seja exata. Devemos então ter

$$\frac{\partial}{\partial y}\,\big[\,\mu(t)\,P(t,y)\,\big] = \frac{\partial}{\partial t}\,\big[\,\mu(t)\,Q(t,y)\,\big]\,,$$

ou seja,

$$\mu(t)\, P_y(t,y) = \mu'(t)\, Q(t,y) + \mu(t)\, Q_t(t,y)$$

ou

$$\mu'(t) = \frac{P_y - Q_t}{Q}\, \mu(t) \tag{2.34}$$

Se o quociente $\dfrac{P_y - Q_t}{Q}$ não depender de y, isto é existir uma função $a(t)$ tal que

$$\frac{P_y - Q_t}{Q} = a(t)$$

então a relação (2.34) fica $\mu'(t) = a(t)\mu(t)$; neste caso, é fácil ver que a função

$$\mu(t) = \exp\Big(\int a(t)\, dt\Big)$$

é um fator integrante de (2.33).

Analogamente, se existir uma função $b(y)$ tal que

$$\frac{P_y - Q_t}{P} = b(y)$$

então a função

$$\mu(y) = \exp\Big(-\int b(y)\, dy\Big)$$

é um fator integrante de (2.33).

Exemplo 2.17. *Calcular um fator integrante da equação diferencial*

$$\operatorname{sen} y - 2\, t\, e^{-t} + (\cos y)\, y' = 0$$

e encontrar a solução $y(t)$ desta equação tal que $y(0) = \pi/2$.

Temos $P(t,y) = \operatorname{sen} y - 2t\, e^{-t}$, $Q(t,y) = \cos y$. Então $P_y = \cos y$ e $Q_t = 0$. Portanto,

$$\frac{P_y - Q_t}{Q} = \frac{\cos y}{\cos y} = 1\ .$$

Assim, um fator integrante é $\mu(t) = e^t$. Multiplicando a equação dada por e^t, obtemos a equação diferencial exata (verifique!)

$$e^t \operatorname{sen} y - 2\, t + e^t\, (\cos y)\, y' = 0\ .$$

Então, existe uma função $V(t,y)$ tal que

$$\frac{\partial V}{\partial t} = e^t \operatorname{sen} y - 2\,t\,.$$

Portanto, $V(t,y) = e^t \operatorname{sen} y - t^2 + h(y)$. Derivando em relação a y, temos $V_t = e^t \cos y + h'(y)$. Por outro lado, como $V_t = e^t \cos y$, temos $h'(y) = 0$. Podemos então tomar $V(t,y) = e^t \operatorname{sen} y - t^2$. As curvas integrais da equação dada são dadas por

$$e^t \operatorname{sen} y - t^2 = K\,.$$

Da condição inicial $y(0) = \pi/2$, temos $K = 1$. Logo

$$y(t) = \operatorname{arc\,sen}\left[e^{-t}(1+t^2)\right].$$

Exercício 2.2. *Encontre as soluções de cada uma das equações diferenciais abaixo:*

(a) $y' + y^2 \operatorname{sen} t = 3\,t^2\,y^2$ (b) $y' = y^2 \cos t$ (c) $2y^3\,y' = 3\,t^2$
(d) $(1+t^2)\,y' = t\,y\,(1+y^2)$ (e) $z' = \dfrac{z^2 - 5\,x\,z}{x^2}$ (f) $y' = \dfrac{t}{y}$
(g) $(1+x^2)\,y' = 1+y^2$ (h) $z' = \dfrac{x^2 + x\,z}{z^2 + x\,z}$

Exercício 2.3. *Resolva cada um dos problemas de valor inicial abaixo:*

(a) $y' + y^2 \operatorname{sen} t = 3t^2y^2,\ y(0) = 1$ (b) $y' = y^2 \cos t,\ y(0) = -1$
(c) $(1+x^2)y' = 1+y^2,\ \ y(1) = 0$ (d) $y' = y^2 \operatorname{sen} t,\ y(0) = 1$

Exercício 2.4. *Encontre a solução geral de cada uma das equações abaixo:*

(a) $t\,y' - 2\,y = 0$ (b) $y' \cos t + y \operatorname{sen} t = 0$
(c) $y' + y = \cos t + \operatorname{sen} t$ (d) $y' \cos t + y \operatorname{sen} t = \cos t + \operatorname{sen} t$
(e) $t\,y' + y = (t-1)\,e^t$ (f) $t\,y' - 2\,y = t^3$
(g) $z' + 2\,t\,z = 4\,t\,e^{-t^2}$ (h) $y' + e^t\,y = 3\,e^t$

Exercício 2.5. *Resolva cada um dos problemas de valor inicial abaixo:*

$$(a)\ \begin{cases} t\,y' - 2y = \ln t \\ y(1) = 0 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} (1+t^2)\,y' + 2\,t\,y = 6\,t^2 \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} (\text{sen } t)\,y' + (\cos t)\,y = \cos 2t \\ y(\pi/2) = 3 \end{cases} \qquad (d)\ \begin{cases} y' + \dfrac{1}{t-2}\,y = 3\,t \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Exercício 2.6. *Verifique que as equações abaixo são exatas e encontre suas curvas integrais:*

(a) $(2\,a\,x + b\,y) + (b\,x + 2\,a\,y)\,y' = 0$ $\quad$ (b) $(e^y + \cos x) + x\,e^y\,y' = 0$
(c) $e^x \cos y - (e^x \text{ sen } y)\,y' = 0$ $\quad$ (d) $(x + y^2)/x^2 = 2(y/x)\,y'$

Exercício 2.7. *Para cada uma das equações abaixo, encontre um fator integrante e determine suas curvas integrais*

(a) $\cos y - (\text{sen } y)\,y' = 0$ $\quad$ (b) $y^2 + x = 2y\,x\,y'$
(c) $t + t^2 - y^2 - t\,y\,y' = 0$

Exercício 2.8. *Achar uma curva que passa pelo ponto* $(0, -2)$ *de modo que o coeficiente angular da reta tangente em qualquer um dos seus pontos seja igual ao triplo da ordenada do mesmo ponto.*

Exercício 2.9. *A taxa de variação da pressão atmosférica* P *em relação à altura* h *é diretamente proporcional à pressão. Supondo que a pressão a* 6000 *metros seja metade de seu valor* P_0 *ao nível do mar, achar a fórmula para qualquer altura.*

Exercício 2.10. *Uma colônia de bactérias cresce a uma razão proporcional ao número de bactérias presentes. Se o número de bactérias duplica a cada 24 horas, quantas horas serão necessárias para que este número aumente cem vezes sua quantidade original.*

Exercício 2.11. *Um tanque de* 200 *litros de capacidade, contém inicialmente 40 litros de água pura. A partir do instante* $t = 0$*, adiciona-se no tanque uma solução de salmoura com* 250 *gramas de sal por litro, à* *razão de* 12 *litros por minuto. A mistura é suposta uniforme, escoa do tanque à razão de* $8\,l/min$. *Determinar: o tempo necessário para que ocorra o transbordamento; a concentração de sal na mistura presente no tanque no instante do transbordamento.*

Capítulo 3

Espaços vetoriais

3.1 Definição e exemplos

Definição 3.1. *Um conjunto não vazio V é dito um* **espaço vetorial real** *(ou simplesmente, um* **espaço vetorial***) quando estão definidas em V duas operações*

$$\begin{array}{lcl} V \times V \longrightarrow V & \quad e \quad & \mathbb{R} \times V \longrightarrow V \\ (x,y) \mapsto x+y \in V & & (\alpha, y) \mapsto \alpha\, y \in V, \end{array}$$

chamadas **adição** *e* **multiplicação por escalar***, respectivamente, satisfazendo as seguintes condições:*
(EV1) $x + (y+z) = (x+y) + z, \ \forall\, x,y,z \in V$*;*
(EV2) $x + y = y + x, \ \forall\, x,y \in V$*;*
(EV3) *existe um elemento, chamado* vetor nulo *e denotado por* 0*, tal que* $x + 0 = x, \ \forall\, x \in V$*;*
(EV4) *para cada* $x \in V$*, existe* $y \in V$*, chamado* oposto *de* x *e denotado por* $-x$*, tal que* $x + y = 0$*;*
(EV5) $\alpha\,(\beta x) = (\alpha\,\beta)\,x, \ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ x \in V$*;*
(EV6) $(\alpha + \beta)\,x = \alpha\,x + \beta\,x, \ \forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \ x \in V$*;*
(EV7) $\alpha\,(x+y) = \alpha\,x + \alpha\,y, \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \ x,y \in V$*;*
(EV8) $1\,x = x, \ \forall\, x \in V$*.*
Os elementos de V são chamados **vetores** *e os números reais,* **escalares***.*

O conjunto $V = \mathbb{R}$, com as operações usuais de adição e multiplicação, é um espaço vetorial real: as propriedades acima são as propriedades associativas e comutativas da adição e multiplicação, elemento neutro para adição, elemento unidade para multiplicação, elemento oposto para adição. Do mesmo modo, o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, com as operações usuais de adição e de multiplicação de número real por número complexo, é um espaço vetorial real.

Exemplo 3.1. *O conjunto* V^3 *dos* vetores geométricos *no espaço (definidos por meio dos segmentos orientados), munido das operações usuais de adição de vetores e multiplicação de vetor por escalar real (como indicadas na figura ao lado), é um espaço vetorial real.*

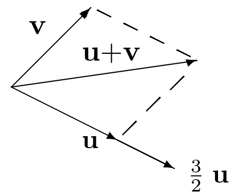


Figura 5.1

Exemplo 3.2. *Seja* $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : \ x,y \in \mathbb{R}\}$. *Dados* $\mathbf{u} = (x,y)$ *e* $\mathbf{v} = (s,t)$ *em* $\mathbb{R}^2$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, *definimos*

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (x+s, y+t)\\ \alpha\,\mathbf{u} &= (\alpha\,x, \alpha\,y).\end{aligned}$$

Com as operações assim definidas, $\mathbb{R}^2$ *é um espaço vetorial. Verifiquemos, por exemplo, a condição (EV1): dados* $\mathbf{u} = (x,y)$, $\mathbf{v} = (s,t)$, $\mathbf{w} = (p,q) \in \mathbb{R}^2$, *usando em cada componente, o fato que a adição de números reais é associativa, temos:*

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= (x,y) + (s+p, q+t) = (x + (s+p), y + (q+t))\\ &= ((x+s)+p, (y+q)+t) = (\mathbf{u}+\mathbf{v}) + \mathbf{w}.\end{aligned}$$

É fácil ver que o vetor nulo em $\mathbb{R}^2$ *é o par* $(0,0)$, *o oposto de* $\mathbf{u} = (x,y)$ *é o vetor* $(-x,-y)$. *As outras propriedades são facilmente verificadas. Os vetores de* $\mathbb{R}^2$ *podem ser representados geometricamente por segmentos orientados e a adição definida acima corresponde a adição de segmentos orientados, como na Figura 3.1.*

Exemplo 3.3. *O conjunto* $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : \ x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$, *com as operações definidas por (1.2) e (1.3), página 7, é um espaço vetorial real.*

Exemplo 3.4. *O conjunto* $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *das matrizes* $m \times n$ *é um espaço vetorial real com a adição definida por (1.14) e a multiplicação por escalar definidas em (1.15).*

Exemplo 3.5. *Denotemos por $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções contínuas $f\colon I \to \mathbb{R}$, com as operações definidas do seguinte modo: dadas $f, g \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos as funções $f+g$ e αf por*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad e \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x),\ \forall x \in I. \tag{3.1}$$

Do Cálculo, temos que $f+g,\ \alpha f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$. Mostra-se, sem dificuldade que o conjunto $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, munido destas operações, é um espaço vetorial real (os axiomas EV1 a EV8 estão verificados pois a adição e multiplicação de números reais satisfazem estas propriedades).

Dados $u, v \in V$, definimos a **diferença** de u por v como sendo

$$u - v = u + (-v).$$

As propriedades (EV1) a (EV8) permitem que trabalhemos em um espaço vetorial de modo semelhante ao que fazemos com números reais. Por exemplo, dados $a\,,\, b \in V$ e $\gamma \in \mathbb{R}\,,\ \gamma \neq 0$, a equação

$$\gamma\, x + a = b \tag{3.2}$$

tem uma única solução, que é $x = \gamma^{-1}(b-a)$. De fato, somando-se $-a$ a ambos os membros de (3.2) temos

$$(\gamma\, x + a) + (-a) = b + (-a) = b - a,$$

donde, por (EV1), $\gamma\, x + [a + (-a)] = b - a$. Usando (EV4) e, em seguida, (EV3), esta igualdade fica $\gamma\, x = b - a$. Multiplicando os dois lados desta igualdade por γ^{-1}, temos

$$x = (\gamma^{-1}\gamma)\, x = \gamma^{-1}(\gamma\, x) = \gamma^{-1}(b-a).$$

Como caso particular desta propriedade, temos que o vetor nulo é o único elemento z de V tal que $z + u = u,\ \forall u \in V$; basta tomar $a = b = u$ e $\gamma = 1$ em (3.2): a única solução de $z + u = u$ é $z = 0$.

O teorema seguinte contém algumas propriedades que decorrem diretamente da definição de espaço vetorial

Teorema 3.1. *Seja V um espaço vetorial. Então:*
1) Dados $a\,,\, b \in V$ e $\gamma \in \mathbb{R}\,,\ \gamma \neq 0$, a equação $\gamma\, x + a = b$ tem uma

única solução, que é $x = \gamma^{-1}(b - a)$.
2) O vetor nulo é o único elemento neutro da adição em V*, isto é,*
se $z \in V$ *é tal que* $z + u = u,\ \forall u \in V$*, então* $z = 0$.
3) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$*, temos* $\alpha \,.\, 0 = 0$.
4) $\forall u \in V$*, temos* $0 \,.\, u = 0$.
5) Se $\alpha \,.\, u = 0$*, então* $\alpha = 0$ *ou* $u = 0$.
6) (Regra de sinais) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ u \in V$ *temos*

$$(-\alpha)\, u = \alpha\,(-u) = -(\alpha\, u)\,.$$

7) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ u \in V$ *temos* $(\alpha - \beta)\, u = \alpha\, u - \beta\, u$
8) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ u, v \in V$ *temos* $\alpha\,(u - v) = \alpha\, u - \alpha\, v$.

Demonstração: As propriedades 1) e 2) já foram mostradas acima. Para mostrar 3) notemos que, usando (EV7) e (EV3), podemos escrever $\alpha\, 0 + \alpha\, 0 = \alpha\,(0 + 0) = \alpha\, 0$, portanto $\alpha\, 0 + \alpha\, 0 = \alpha\, 0$. Usando 2), com $z = u = \alpha\, 0$, temos que $\alpha\, 0 = 0$. As verificações de 4) e 5) são análogas e ficam como exercício.

6) Mostremos que $(-\alpha)\, u = -(\alpha\, u)$. Como $-\alpha + \alpha = 0$, temos, por (EV6), $(-\alpha)\, u + \alpha\, u = (-\alpha + \alpha)\, u = 0\, u = 0$, ou seja, $(-\alpha)\, u + \alpha\, u = 0$, donde (somando $-(\alpha u)$ a ambos os membros) obtemos $(-\alpha)\, u = -(\alpha\, u)$. Deixamos como exercício a verificação das demais propriedades. □

Observação 3.1. *Em muitas situações, é conveniente considerar multiplicação de vetores por escalar complexo. Quando, na definição acima a* multiplicação $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ *for definida para todo* $\alpha \in \mathbb{C}$ *e as propriedades (EV5)-(EV8) forem válidas para todo* $\alpha \in \mathbb{C}$*, diremos que* V *é um* **espaço vetorial complexo**. *Quando quisermos nos referir indistintamente a um espaço vetorial real ou um espaço vetorial complexo usaremos a expressão* **espaço vetorial sobre** $\mathbb{K}$.

Exemplo 3.6. *Conforme observado no Capítulo 1, página 27, o conjunto* $\mathbb{C}$ *dos números complexos, com as operações usuais de adição e multiplicação, é um espaço vetorial complexo.*

Exercício 3.1. *Em cada um dos itens abaixo, verifique se o conjunto* V*, com as operações indicadas, é um espaço vetorial real:*
a) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2\,x = 3\,y\}$*, operações usuais de pares ordenados;*
b) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 5\,x + 2\,y = 3\,z\}$*, operações usuais de ternas*

ordenadas;
c) $V = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,:\, f(0) = 0\}$*, com as operações usuais de funções;*
d) $V = \{a\, e^t + b\, e^{3\,t} \;:\; a, b \in \mathbb{R}\}$*, com operações usuais de funções;*
e) $V = \mathbb{R}^2$*, operações: adição usual de pares e multiplicação dada por:* $\alpha\,(x, y) = (0, 0)$.

3.2 Subespaços vetoriais

Um subconjunto U de um espaço vetorial V é dito um **subespaço vetorial** de V quando U, com as operações de V, é um espaço vetorial.

Para verificar que um subconjunto não vazio U de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V, basta verificar que:

(SE) dados $u, v \in U$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, temos $u + v \in U$ e $\alpha\, u \in U$.

De fato, a condição (SE) implica que as operações de adição e multiplicação por escalar estão bem definidas em U. Como V é um espaço vetorial, as propriedades (EV1) a (EV8) da definição 3.1, página 67, estão satisfeitas para todos elementos de V; como $U \subset V$, elas estão satisfeitas também para todos elementos de U. Logo, U é um espaço vetorial.

Se V é um espaço vetorial qualquer, então os subconjuntos $U = \{0\}$ e $U = V$ são subespaços vetoriais de V (chamados *subespaços triviais*).

Exemplo 3.7. *O conjunto* $U = \{(x, y) : x - 2\,y = 0\}$ *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^2$*. De fato, em primeiro lugar,* U *é não vazio, pois, por exemplo,* $(0, 0) \in U$*. Além disso, se* (x, y)*,* $(s, t) \in U$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$*, temos* $x = 2\,y$ *e* $s = 2\,t$*, donde* $x + s = 2\,(y + t)$ *e* $\alpha\, x = 2\,\alpha\, y$ *e portanto* $(x + s, y + t) \in U$ *e* $(\alpha\, x,\ \alpha\, y) \in U$.

Da mesma maneira, mostramos que qualquer reta passando pela origem é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 3.8. *Em* $V = \mathbb{R}^3$*, os seguintes subconjuntos:*
- *a origem* $\{(0, 0, 0)\}$*,*
- *o próprio* $\mathbb{R}^3$*,*
- *as retas passando pela origem* $(0, 0, 0)$
- *os planos contendo a origem*

são subespaços vetoriais. Pode-se mostrar que estes são os únicos subespaços de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 3.9. *Seja $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. O conjunto U de todas as soluções $\mathbf{v} = (x_1\,,\, x_2\,, \ldots, x_n\,)^T$ do sistema linear homogêneo*

$$A\,\mathbf{v} = \mathbf{0}\,. \tag{3.3}$$

ou seja, o conjunto de todas as soluções de

$$\begin{cases} a_{1\,1}\,x_1 + \cdots + a_{1\,n}\,x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n\,1}\,x_1 + \cdots + a_{n\,n}\,x_n = 0\,, \end{cases}$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

É claro que a $n-$upla $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)^T$ é solução de (3.3), portanto pertence a U. Se $\mathbf{v}_1\,,\, \mathbf{v}_2 \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $A\,\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ e $A\,\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, donde

$$A\,(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = A\,\mathbf{v}_1 + A\,\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0};$$

portanto $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in U$. Analogamente, $A\,(\alpha\,\mathbf{v}_1) = \alpha\,A\,\mathbf{v}_1 = \alpha\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$; logo $\alpha\,\mathbf{v}_1 \in U$. $\square$

Exemplo 3.10. *Seja n um número inteiro positivo. O conjunto $P_n(\mathbb{R})$ formado pela função nula e todas as funções polinomiais com coeficientes reais de grau menor ou igual a n é um subespaço vetorial de $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. De fato, dados $p(x) = a_0 + a_1\,x + \cdots + a_n\,x^n$ e $q(x) = b_0 + b_1\,x + \cdots + b_n\,x^n$ em $P_n(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $p + q$ e $\alpha\,p$ são as funções polinomiais*

$$\begin{aligned} &(p+q)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\,x + \cdots + (a_n + b_n)\,x^n \\ &(\alpha\,p)(x) = (\alpha\,a_0) + (\alpha\,a_1)\,x + \cdots + (\alpha\,a_n)\,x^n. \end{aligned}$$

que são obviamente contínuas em $\mathbb{R}$. Do mesmo modo, o conjunto $P(\mathbb{R})$ de todas as funções polinomiais com coeficientes reais é um espaço vetorial. Para cada n fixado, o espaço vetorial $P_n(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial de $P(\mathbb{R})$. Se $m \leq n$, então $P_m(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial de $P_n(\mathbb{R})$.

Exemplo 3.11. *Seja $a\colon I \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $I \subset \mathbb{R}$. O conjunto $W = \{y \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})\,;\; y'(t) + a(t)\,y(t) = 0,\ \forall t \in I\}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.*

Como os elementos de W são da forma $y(t) = c\,e^{A(t)}$, em que c designa uma constante qualquer e $A'(t) = a(t)$, é fácil ver que a função nula pertence a W; e que dados y_1 , $y_2 \in W$, temos $y_1 + y_2 \in W$ e $\alpha\, y_1 \in W$.

Exemplo 3.12. *(Um contra-exemplo) Seja* $V = P_2(\mathbb{R})$. *O conjunto* W *de todos polinômios de grau 2 não é subespaço vetorial de* $P_2(\mathbb{R})$. *De fato os polinômios* $p(t) = t - t^2$ *e* $q(t) = t + t^2$ *pertencem a* W, *mas* $p(t) + q(t) = 2\,t$ *não pertence a* W.

Exemplo 3.13. *Sejam* $a\,,\, b \in \mathbb{R}$ *duas constantes fixadas. O conjunto* $W = \{y \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})\,;\; y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}\}$ *é um subespaço vetorial de* $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

De fato, é fácil ver que a função nula satisfaz a equação $y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = 0$ e, portanto, pertence a W. Além disso, dadas $u\,,\, v \in W$, temos $u'' + a\,u' + b\,u = 0$ e $v'' + a\,v' + b\,v = 0$. Se $z = u + v$, temos

$$z'' + a\,z' + b\,z = u'' + a\,u' + b\,u + v'' + a\,v' + b\,v = 0.$$

Analogamente, verificamos a outra propriedade.

Exercício 3.2. *Verifique se* W *é subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^4$, *sendo*
(a) $W = \{(x,y,y,x)\,:\, x,y \in \mathbb{R}\}$
(b) $W = \{(x,y,z,w) : w = 3\,x,\ y = 5\,x + 3\,z\}$
(c) $W = \{(x,y,z,w)\,:\ \ z = x\,w\}$
(d) $W = \{(x,y,z,w) : x = 2\,s,\ y = 3\,s,\ s \in \mathbb{R}\}$
(e) $W = \{(x,y,s,t) : t = 3\,x\ \text{ e } s = y^2\}$.

Exercício 3.3. *Verifique se* W *é subespaço vetorial de* $P_n(\mathbb{R})$, *sendo*
(a) $W = \{p \in P_n(\mathbb{R}) : p(2) = p(1)\}$ *(b)* $W = \{p \in P_n(\mathbb{R}) : p''(t) \equiv 0\}$
(c) $W = \{p \in P_n(\mathbb{R}) : p(2) = p'(1)\}$ *(d)* $W = \{p \in P_n(\mathbb{R}) : p'(3) = 0\}$.

Exercício 3.4. *Verifique se* W *é subespaço vetorial de* $M_2(\mathbb{R})$, *sendo*
(a) $W = \left\{\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} : x,y \in \mathbb{R}\right\}$ *(b)* $W = \left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} : x,y,z \in \mathbb{R}\right\}$

Exercício 3.5. *Verifique se* W *é subespaço vetorial de* $M_n(\mathbb{R})$, *sendo*
(a) $W = \{A \in V : A^T = A\}$ *(b)* $W = \{A \in V : A^T = -A\}$

Exercício 3.6. *Seja* $V = \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. *Mostre que* $U = \{f \in V : f(-x) = f(x),\ \forall x\}$ *e* $W = \{f \in V : f(-x) = -f(x), \forall x\}$ *são subespaços de* V.

Exercício 3.7. *Seja V um espaço vetorial e sejam U, W subespaços vetoriais de V. Mostre que $U \cap W$ é subespaço vetorial de V. Dê um exemplo para mostrar que a reunião de dois subespaços de um espaço vetorial pode não ser um subespaço.*

3.3 Combinações lineares

Sejam $u_1, \ldots, u_n \in V$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. O vetor

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$$

chama-se **combinação linear** de $u_1, \ldots, u_n$.

Consideremos em $\mathbb{R}^3$ os vetores $\mathbf{u}_1 = (0,2,3)$, $\mathbf{u}_2 = (2,-2,0)$ e $\mathbf{u}_3 = (1,3,6)$, $\mathbf{v} = (1,1,3)$ e $\mathbf{w} = (1,5,3)$. O vetor $\mathbf{v}$ é combinação de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$, pois

$$(-1)\,\mathbf{u}_1 + 0\,\mathbf{u}_2 + 1\mathbf{u}_3 = (0,-2,-3) + (1,3,6) = (1,1,3)\,,$$

mas $\mathbf{w}$ não é combinação linear de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ pois uma igualdade da forma

$$(1,5,3) = x\,(1,3,6) + y\,(0,2,3) + z\,(2,-2,0)\,,$$

com $x, y, z \in \mathbb{R}$, é equivalente ao sistema impossível

$$\begin{cases} x \qquad\quad + 2\,z = 1 \\ 3\,x + 2\,y - 2\,z = 5 \\ 6\,x + 3\,y \qquad\; = 3. \end{cases}$$

O vetor $(2,3,5)$ é combinação linear de $(1,1,1)$, $(1,1,0)$ e $(1,0,0)$: procuremos α, β, γ tais que

$$\alpha\,(1,1,1) + \beta\,(1,1,0) + \gamma(1,0,0) = (2,3,5);$$

então α, β, γ devem satisfazer o sistema de equações

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ \alpha + \beta \qquad = 3 \\ \alpha \qquad\qquad = 5, \end{cases}$$

Como este sistema tem a solução, $\alpha = 5$, $\beta = -2$, $\gamma = -1$, segue-se que $(2,3,5)$ é combinação linear de $(1,1,1)$, $(1,1,0)$ e $(1,0,0)$.

Exercício 3.8. *Mostre que todo vetor* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *é combinação linear de* $(1,1,1)$, $(1,1,0)$ *e* $(1,0,0)$.

Teorema 3.2. *Seja* V *um espaço vetorial e sejam* $u_1, \dots, u_n \in V$. *O conjunto* U *de todas combinações lineares de* $u_1, \dots, u_n$ *é um subespaço vetorial de* V.

Demonstração: Em primeiro lugar, U é não vazio, pois o vetor nulo é combinação linear de $u_1, \dots, u_n$; de fato, $0 = 0\,u_1 + \cdots + 0\,u_n$. Além disso, dados v, $w \in U$,

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n\,, \quad w = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n\,,$$

e $\gamma \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} v + w &= (\alpha_1 + \beta_1)\,u_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)\,u_n \\ \gamma\, v &= (\gamma\,\alpha_1)\,u_1 + \cdots + (\gamma\,\alpha_n)\,u_n \end{aligned}$$

o que mostra que $v + w$ e $\gamma\, v$ são combinações lineares de $u_1, \dots, u_n$, ou seja, $v + w \in U$ e $\gamma\, v \in U$. Logo, U é um subespaço vetorial de V. $\square$

O subespaço U dado no teorema 3.2 chama-se **subespaço gerado** por $u_1, \dots, u_n$ e é denotado por $[u_1, \dots, u_n]$; os vetores $u_1, \dots, u_n$ são então chamados **geradores** de U. Um espaço vetorial é dito **finitamente gerado** quando possui um número finito de geradores. Neste texto, estaremos interessados somente nos espaços vetoriais finitamente gerados.

Exemplo 3.14. *Considere em* $\mathbb{R}^3$ *os vetores* $\mathbf{a} = (1,0,0)$, $\mathbf{b} = (0,1,0)$ *e* $\mathbf{c} = (1,1,0)$. *Então:* $[\mathbf{a}] = \{(x,0,0) : x \in \mathbb{R}\} =$ *eixo* x,
$[\mathbf{c}] = \{(y,y,0) : y \in \mathbb{R}\} =$ *reta passando pela origem paralela a* $\mathbf{c}$,
$[\mathbf{a}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x\,,\, y \in \mathbb{R}\}$ *é o plano* $z = 0$.

Exemplo 3.15. (a) *Verificar se o vetor* $(2,0,-1)$ *pertence ao subespaço* $U = [(1,1,2),(4,2,3)]$. (b) *Verificar se o vetor* $(5,2,9)$ *pertence a* U.

O vetor $(2,0,-1)$ pertence ao subespaço U se e somente se $(2,0,-1)$ é combinação linear de $(1,1,2)$ e $(4,2,3)$. Procuremos $x, y \in \mathbb{R}$ de modo que $x\,(1,1,2) + y\,(4,2,3) = (2,0,-1)$, ou seja,

$$(x + 4\,y, x + 2\,y, 2\,x + 3\,y) = (2,0,-1).$$

Assim, (x, y) deve ser solução do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + 4\,y = 2 \\ x + 2\,y = 0 \\ 2\,x + 3\,y = -1 \end{cases}$$

que tem a solução $x = -2,\ y = 1$; assim, $(2, 0, -1) = -2\,(1, 1, 2) + 1\,(4, 2, 3)$. Logo, $(2, 0, -1) \in U$.
Consideremos agora o vetor $(5, 2, 9)$; para que ele pertença ao subespaço U, ele deve ser combinação linear de $(1, 1, 2)$ e $(4, 2, 3)$. Procuremos $x, y \in \mathbb{R}$ de modo que $x\,(1, 1, 2) + y\,(4, 2, 3) = (5, 2, 9)$, ou seja,

$$(x + 4\,y, x + 2\,y, 2\,x + 3\,y) = (5, 2, 9).$$

Assim, x, y devem ser soluções do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + 4\,y = 5 \\ x + 2\,y = 2 \\ 2\,x + 3\,y = 9 \end{cases}$$

Como o sistema acima é impossível, concluimos que o vetor $(5, 2, 9)$ pertence a U.

Exemplo 3.16. *Encontrar um conjunto de geradores para o subespaço* $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \ :\ x + y - z = 0,\ y - z + w = 0\}$.

Temos $(x, y, z, w) \in U \iff z = x + y,\ w = x$. Portanto

$$(x, y, z, w) = (x, y, x + y, x) = x\,(1, 0, 1, 1) + y\,(0, 1, 1, 0).$$

Logo $U = [(1, 0, 1, 1),\ (0, 1, 1, 0)]$.

Exemplo 3.17. *O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ é finitamente gerado: todo vetor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ é combinação linear dos vetores*

$$\mathbf{e_1} = (1, 0, \ldots, 0),\ \ldots\ ,\ \mathbf{e_n} = (0, \ldots, 0, 1).$$

De fato, temos $\mathbf{x} = x_1\,\mathbf{e_1} + \cdots + x_n\,\mathbf{e_n}$.

Exemplo 3.18. *O espaço vetorial $P_n(\mathbb{R})$ é finitamente gerado.*

De fato, é fácil ver que $P_n(\mathbb{R})$ é gerado pelos monômios

$$m_0(t) = 1,\ m_1(t) = t,\ m_2(t) = t^2, \dots,\ m_n(t) = t^n :$$

todo polinômio $p(t)$ de grau menor ou igual a n se escreve como

$$p(t) = a_0 + a_1\, t + \cdots + a_n\, t^n = a_0\, m_0(t) + a_1\, m_1(t) + \cdots + a_n\, m_n(t).$$

Exemplo 3.19. *O espaço vetorial $P(\mathbb{R})$, de todos os polinômios, não é finitamente gerado. Fixado qualquer subconjunto finito $\{p_1, \dots, p_m\}$ de $P(\mathbb{R})$, seja n o mais alto grau dos polinômios $p_1, \dots, p_m$: é claro que o polinômio $p(t) = t^{n+1}$ não é combinação linear de $\{p_1, \dots, p_m\}$.*

Exemplo 3.20. *Os conjuntos $A = \{\cos 2\,t\,,\, 1\}$ e $B = \{\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t\}$ geram o mesmo subespaço de $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*

Como $\cos 2\,t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t$ e $1 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t$, toda combinação linear de $\cos 2\,t$ e 1 é uma combinação linear de $\cos^2 t$ e $\operatorname{sen}^2 t$: de fato, se $f(t) = a_1 \cos 2t + a_2\, 1$, temos $f(t) = a_1 \cos^2 t + (a_2 - a_1) \operatorname{sen}^2 t$. Reciprocamente, como $\cos^2 t = (1 + \cos 2\,t)/2$ e $\operatorname{sen}^2 t = (1 - \cos 2\,t)/2$, toda combinação linear de $\cos^2 t$ e $\operatorname{sen}^2 t$ é uma combinação linear de $\cos 2\,t$ e 1 : se $f(t) = b_1 \cos^2 t + b_2 \operatorname{sen}^2 t$, então $f(t) = c_1 \cos 2\,t + c_2$, com $c_1 = (b_1 - b_2)/2$ e $c_2 = (b_1 + b_2)/2$.

Observação 3.2. *Como vemos no exemplo 3.16 acima, os vetores de um espaço vetorial V ficam completamente conhecidos a partir de um conjunto de geradores $\{u_1\,, \dots, u_n\}$ de V. No Teorema 3.3, que veremos a seguir, provamos que quando um dos u_i é combinação linear dos outros geradores, ele pode ser removido do conjunto de geradores. Fazendo isto, a descrição de um espaço vetorial como o conjunto das combinações lineares dos vetores $u_1\,, \dots, u_n$ é mais adequada.*

Teorema 3.3. *Suponhamos $V = [v_1\,, \dots, v_n\,]$. Se um destes geradores, digamos v_p, é combinação linear dos demais, então v_p pode ser removido do conjunto de geradores, isto é, $V = [v_1\,, \dots, v_{p-1}, v_{p+1}, \dots, v_n\,]$.*

Demonstração: Para simplificar a notação, suponhamos que v_n é combinação linear de $v_1\,, \dots, v_{n-1}$. Mostremos que $V \subset [v_1\,, \dots, v_{n-1}\,]$, ou seja, que todo $x \in V$ é combinação linear de $v_1\,, \dots, v_{n-1}$. Sabemos que x é combinação linear de $v_1\,, \dots, v_n$, pois estes vetores geram V. Assim, existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que $x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. Também sabemos que v_n é combinação linear de $v_1, \ldots, v_{n-1}$:

$$v_n = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{n-1} v_{n-1}.$$

Podemos então escrever:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n-1} v_{n-1} + \alpha_n v_n \\ &= \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n-1} v_{n-1} + \alpha_n (\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{n-1} v_{n-1}) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1 \alpha_n) v_1 + \cdots + (\alpha_{n-1} + \beta_{n-1} \alpha_n) v_{n-1} \end{aligned}$$

Desta relação vemos que x é combinação linear de $v_1, \ldots, v_{n-1}$, ou seja, $x \in [v_1, \ldots, v_{n-1}]$. Por outro lado, como temos, obviamente, $[v_1, \ldots, v_{n-1}] \subset V$, segue-se que $V = [v_1, \ldots, v_{n-1}]$. □

Exercício 3.9. *a) Verificar se o vetor* $(1,4,2) \in \mathbb{R}^3$ *é combinação linear de* $(1,2,0)$ *e* $(-1,1,1)$.
b) Verificar se o vetor $(3,5,7) \in \mathbb{R}^3$ *é combinação linear de* $(2,1,3)$ *e* $(3,-2,2)$.

Exercício 3.10. *Sejam* $\mathbf{u} = (0,0,2,2)$, $\mathbf{v}_1 = (0,2,0,-1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,1,1,0)$ *e* $\mathbf{v}_3 = (3,1,1,-1)$.
a) Escreva $\mathbf{u}$ *como combinação linear de* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ *e* $\mathbf{v}_3$.
b) É possível escrever $\mathbf{v}_1$ *como combinação linear de* $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ *e* $\mathbf{u}$*? E* $\mathbf{v}_2$ *como combinação linear de* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3$ *e* $\mathbf{u}$*? E* $\mathbf{v}_3$ *como combinação linear de* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ *e* $\mathbf{u}$*?*

Exercício 3.11. *Mostre que o espaço vetorial* $P_2(\mathbb{R})$ *é gerado pelos polinômios* $p_1 = 1; p_2 = 1+t; p_3 = 1+t+t^2$ *e que* $P_3(\mathbb{R})$ *é gerado pelos polinômios* $1,\ 1+t,\ 1+t+t^2,\ 1+t+t^2+t^3$.

Exercício 3.12. *Sejam* $p(t) = 4t + 2t^2$, $q(t) = 2t - t^3$, $r(t) = 1 + t + t^2$ *e* $f(t) = 3 + t + t^2 - t^3$.
a) Escreva $p(t)$ *como combinação linear de* $q(t)$, $r(t)$ *e* $f(t)$.
b) É possível escrever $q(t)$ *como combinação linear de* $r(t)$, $f(t)$ *e* $p(t)$*?*

Exercício 3.13. *Encontre o subespaço gerado por* S*, sendo*
(a) $S = \{(1,2),(0,-1)\} \subset \mathbb{R}^2$
(b) $S = \{(2,2,1),(1,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$
(c) $S = \{1+t, t+t^2, t^2+t^3, 1+t^3\} \subset P_3(\mathbb{R})$
(d) $S = \{t, t^2-t^3\} \subset P_3(\mathbb{R})$.

3.4 Dependência linear

Sejam V um espaço vetorial e $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$. Dizemos que os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são **linearmente dependentes**, ou que S é um conjunto **linearmente dependente** (escreveremos abreviadamente **LD**) quando existem escalares *não todos nulos* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0. \tag{3.4}$$

Caso contrário, isto é, se uma igualdade do tipo $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$ só for possível quando $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, dizemos que os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são **linearmente independentes**, ou que S é um conjunto **linearmente independente** (abreviadamente **LI**).

Notemos que, quaisquer que sejam os vetores $v_1, \ldots, v_n$, os escalares $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$ satisfazem a igualdade (3.4). O que realmente interessa nesta definição é saber se também é possível escrever (3.4) com escalares não todos nulos (quando dizemos que $v_1, \ldots, v_n$ são LD) ou se **a única** maneira possível de escrever (3.4) é pondo $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$ (neste caso, $v_1, \ldots, v_n$ são LI).

Exemplo 3.21. *Em* $\mathbb{R}^4$*, os vetores* $(3,1,1,4)$, $(1,1,0,3)$, $(2,0,1,1)$ *são LD, pois podemos escrever*

$$(-1)\cdot(3,1,1,4) + 1\cdot(1,1,0,3) + 1\cdot(2,0,1,1) = (0,0,0,0).$$

Exemplo 3.22. *Em* $\mathbb{R}^3$*, os vetores* $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$ *são LI.*

De fato, se escrevermos

$$\alpha\,(1,0,0) + \beta\,(1,1,0) + \gamma\,(1,1,1) = (0,0,0),$$

temos

$$(\alpha+\beta+\gamma, \beta+\gamma, \gamma) = (0,0,0), \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \beta+\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

que implica $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Exemplo 3.23. *Os vetores* $\mathbf{e_1} = (1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\mathbf{e_n} = (0, \ldots, 1)$ *são linearmente independentes.*

De fato, se os números $x_1, \ldots, x_n$ são tais que $x_1\,\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\,\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$, temos $(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$, ou seja, $x_1 = 0, \cdots = x_n = 0$, donde concluimos que os vetores $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ são linearmente independentes.

Exemplo 3.24. *Os monômios* $1,\ t, \ldots,\ t^n$ *são LI em* $P(\mathbb{R})$.

De fato, se os escalares $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são tais que

$$\alpha_0 + \alpha_1\,t + \cdots + \alpha_n\,t^n = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

então, pondo $t = 0$, obtemos $\alpha_0 = 0$. Derivando (3.5) e pondo $t = 0$, obtemos $\alpha_1 = 0$. De modo análogo, obtemos $\alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$.

Exemplo 3.25. *Se um dos vetores* $v_1, \ldots, v_n$ *for combinação linear dos outros, então* $v_1, \ldots, v_n$ *são LD.*

Seja v_k o vetor que é combinação linear dos demais:

$$v_k = \alpha_1\,v_1 + \cdots + \alpha_{k-1}\,v_{k-1} + \alpha_{k+1}\,v_{k+1} + \alpha_n\,v_n\,.$$

Podemos então escrever

$$\alpha_1\,v_1 + \cdots + \alpha_{k-1}\,v_{k-1} + (-1)\,v_k + \alpha_{k+1}\,v_{k+1} + \cdots + \alpha_n\,v_n = 0.$$

Como o coeficiente de v_k é não nulo, temos que $v_1, \ldots, v_n$ são LD.

A recíproca deste fato também é verdadeira: se uma seqüência de vetores $v_1, \ldots, v_n \in V$ é LD e se $v_1 \neq 0$, então ao menos um destes vetores é combinação linear dos precedentes. Mais precisamente.

Teorema 3.4. *Se* $v_1, \ldots, v_n \in V$, $n \geq 2$, *são vetores LD e se* $v_1 \neq 0$, *então existe* $k \geq 2$ *tal que* v_k *é combinação linear de* $v_1, \ldots, v_{k-1}$.

Demonstração: Como $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente dependentes, existem escalares não todos nulos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que

$$\alpha_1\,v_1 + \cdots + \alpha_n\,v_n = 0. \tag{3.6}$$

Seja k o maior dentre estes índices tal que $\alpha_k \neq 0$; como $v_1 \neq 0$, temos $k \geq 2$ (de fato, se tivéssemos $\alpha_1 \neq 0$ e $\alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$, a igualdade (3.6) ficaria $\alpha_1\,v_1 = 0$, o que é impossível, pois $\alpha_1 \neq 0$ e $v_1 \neq 0$). Como

$\alpha_{k+1} = 0, \ldots, \alpha_n = 0$, podemos então escrever a igualdade (3.6) na forma

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0.$$

Agora, como $\alpha_k \neq 0$, desta igualdade temos

$$v_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} v_1 - \cdots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} v_{k-1},$$

o que mostra que v_k é combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_{k-1}$.

Corolário 3.1. *Todo conjunto que contém um conjunto LD é LD, isto é, se os vetores* $v_1, \ldots, v_p \in V$ *são LD e* $v_{p+1}, \ldots, v_n$ *são vetores quaisquer em* V*, então* $v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_n$ *são LD.*

Demonstração: Como os vetores $v_1, \ldots, v_p$ são LD, um deles, digamos, v_k, $k < p$, é combinação linear de $v_1, \ldots, v_{k-1}$; então é claro que v_k, também se escreve como combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$.

Corolário 3.2. *Se os vetores* $v_1, \ldots, v_n$ *são LI e* $v_1, \ldots, v_n, x$ *são LD, então* x *é combinação linear de* $v_1, \ldots, v_n$.

Demonstração: Como nenhum dos v_j pode ser combinação linear dos precedentes (pois os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são LI), segue-se que x é combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$.

Exercício 3.14. *Sejam* $v_1, \ldots, v_n$ *vetores LI em* V *e* $x \in V$*. Mostre que, se* $x \notin [v_1, \ldots, v_n]$*, então os vetores* $v_1, \ldots, v_n, x$ *são LI.*

Apresentamos a seguir um método prático para estudar a dependência linear em $\mathbb{R}^n$. O método baseia-se nos dois lemas 3.1 e 3.2 dados abaixo. Em primeiro lugar, notemos que se uma matriz está na forma escalonada, então suas linhas são vetores LI. Para ilustrar as idéias, vejamos antes um exemplo em $\mathbb{R}^4$. Consideremos os vetores $\mathbf{u}_1 = (3, 0, -1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0, 2)$ e $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1, 2)$ e formemos a matriz M cujas linhas são $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Como M está na forma escalonada, é fácil ver que $\mathbf{u}_1$ não é combinação linear de $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ e que $\mathbf{u}_2$ não é combinação linear de $\mathbf{u}_3$. Logo, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ são LI. Mais geralmente, temos o seguinte resultado.

Lema 3.1. *Sejam* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ *as linhas da matriz na forma escalonada*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{1\,j_1} & \ldots & a_{1\,j_2} & \ldots & a_{1\,j_p} & \ldots & a_{1\,n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & a_{2\,j_2} & \ldots & a_{2\,j_p} & \ldots & a_{2\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & a_{p\,j_p} & \ldots & a_{p\,n} \end{bmatrix}$$

em que $a_{1\,j_1} \neq 0\,, a_{2\,j_2} \neq 0\,, \ldots\,, a_{p\,j_p} \neq 0$. *Então os vetores* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ *são LI.*

Demonstração: Listando os vetores acima na ordem invertida: $\mathbf{v}_p, \ldots, \mathbf{v}_1$, como $a_{k\,j_k} \neq 0$, para $k = 1, \ldots, p$, fica fácil ver que nenhum deles é combinação linear dos precedentes. Pelo Teorema 3.4, eles são LI.

Lema 3.2. *Sejam* V *um espaço vetorial,* $u_1\,,\, u_2\,,\, \ldots,\, u_m \in V$ *e sejam* $\gamma_2\,,\, \ldots,\, \gamma_m \in \mathbb{R}$. *Definamos os vetores* $v_1\,,\, v_2\,,\, \ldots,\, v_m$ *por*

$$v_1 = u_1\,,\; v_2 = u_2 - \gamma_2\, u_1\,,\; \ldots,\; v_m = u_m - \gamma_m\, u_1\,. \tag{3.7}$$

Então os vetores $v_1\,,\, v_2\,,\, \ldots,\, v_m$ *são LI se e somente se* $u_1\,,\, u_2\,,\, \ldots,\, u_m$ *são LI.*

Demonstração: Suponhamos que $u_1\,,\, u_2\,,\, \ldots,\, u_m$ são LI e que os escalares $\alpha_1\,, \ldots\, \alpha_m$ são tais que

$$\alpha_1\, v_1 \,+ \alpha_2\, v_2 \,+\, \cdots + \alpha_m\, v_m = 0.$$

Usando as igualdades (3.7), temos

$$\alpha_1\, v_1 \,+ \alpha_2\, (u_2 - \gamma_1\, u_1) \,+\, \cdots + \alpha_m\, (u_m - \gamma_m\, u_1) = 0\,,$$

ou seja, $(\alpha_1 - \alpha_1\, \gamma_2 - \cdots - \alpha_m\, \gamma_m)\, u_1 \,+ \alpha_2\, u_2 + \cdots + \alpha_m\, u_m = 0$. Como $u_1\,,\, u_2\,,\, \ldots,\, u_m$ são LI, temos

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_1\, \gamma_2 - \cdots - \alpha_m\, \gamma_m &= 0, \\ \alpha_2 &= 0, \\ &\vdots \\ \alpha_m &= 0. \end{aligned}$$

Destas igualdades temos $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$. Logo, $v_1\,,\, v_2\,,\, \ldots,\, v_m$ são LI. A demonstração da recíproca é análoga uma vez que de (3.7) temos $u_1 = v_1\,,\; u_2 = v_2 + \gamma_2\, v_1\,,\; \ldots,\; u_m = v_m + \gamma_m\, v_1$. $\square$

Para decidir se os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ de $\mathbb{R}^n$ são LI ou LD, nós formamos a matriz A de ordem $m \times n$ cujos vetores linhas são $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ e escalonamos A. Caso a matriz escalonada tenha uma linha nula, os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ são LD; se todas as linhas forem não nulas, os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ são LI.

Exemplo 3.26. *Decidir se* $\mathbf{u}_1 = (1,1,-1,1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,1,-2,1)$, $\mathbf{u}_3 = (3,1,-3,2)$ *e* $\mathbf{u}_4 = (1,0,-1,0)$ *são LI ou LD.*

Formemos a matriz A cujos vetores linhas são $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ e $\mathbf{u}_4$ e escalonemos A

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como todas linhas da matriz escalonada são não nulas, seus vetores linhas são LI. Logo, os vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ e $\mathbf{u}_4$ são LI.

Exemplo 3.27. *Decidir se os vetores* $\mathbf{u}_1 = (1,3,2,1), \mathbf{u}_2 = (2,4,2,0)$, $\mathbf{u}_3 = (1,3,3,2)$, $\mathbf{u}_4 = (3,5,2,-1)$ *são LI ou LD.*

Formemos a matriz A cujos vetores linhas são $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ e $\mathbf{u}_4$ e escalonemos A

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como a matriz escalonada tem uma linha nula, seus vetores linhas são LD. Logo, os vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ e $\mathbf{u}_4$ são LD.

Observação 3.3. *O conceito independência linear também pode ser definido para conjuntos infinitos de vetores: um conjunto S é dito* **linearmente independente (LI)** *quando todo subconjunto finito de S for LI (de acordo com a definição acima). Por exemplo, no espaço vetorial $P(\mathbb{R})$, o conjunto $B = \{1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots\}$ é LI: notemos que, para* *cada inteiro n fixado, os elementos* $1, t, t^2, \ldots, t^n$ *são LI e que dado um subconjunto finito* $S = \{t^{k_1}, \ldots, t^{k_p}\}$ *de* B*, se* N *denota o maior dos números* $k_1, \ldots, k_p$*, temos* $S \subset \{t^1, \ldots, t^N\}$*. Logo,* B *é LI.*

Exercício 3.15. *Determine se são LI ou LD os seguintes vetores.*

$(a)\,(1,2,2,-3),\ (-1,4,2,0)$ $(b)\,(1,2),\ (-3,1)$
$(c)\,(4,2,6,-2),\ (6,3,9,-3)$ $(d)\,(2,3,1),\ (7,-1,5)$
$(e)\,(9,0,7),(2,1,8),(2,0,4)$ $(f)\,(1,0,1),(5,1,2),(3,1,0)$
$(g)\,(1,0,0),(2,3,0),(1,7,5)$ $(h)\,(-4,6,-2),(2,3,-1),(2,0,4)$
$(i)\,(1,0,3),(3,1,2),(1,5,7)$ $(j)\,(1,5,-6);(2,1,8);(3,1,4);(2,3,11)$
$(k)\,(1,0,1),(3,1,2),(2,5,3)$ $(l)\,(1,3,-1,4),(3,8,-5,7),(2,9,4,23)$

Exercício 3.16. *Determine se* u *e* v *são LI ou LD em* $P_2(\mathbb{R})$*, sendo* $(a)\, u = t^2 - t - 1,\ v = 9t^2 - 5t - 2,\quad (b)\, u = t^2 - 3t + 2,\ v = t^2 + 2t - 2.$

Exercício 3.17. *Determine se* u *e* v *são LI ou LD em* $M_2(\mathbb{R})$*, sendo*

$(a)\, u = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ v = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ (b)\, u = \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ -6 & 0 \end{bmatrix},\ v = \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$

Exercício 3.18. *Determine se as matrizes* M, N, P *são LI ou LD.*

$M = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}\ N = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -4 & 10 & 8 \end{bmatrix}\ P = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 8 & 4 \end{bmatrix}.$

3.5 Base e dimensão

Uma **base** de um espaço vetorial V é um conjunto de vetores LI que geram V.

Os exemplos 3.17 e 3.23 mostram que $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ é base de $\mathbb{R}^n$. Do mesmo modo, os exemplos 3.18 e 3.24 mostram que $\{m_0, m_1, \ldots, m_n\}$ é base de $P_n(\mathbb{R})$.

Exemplo 3.28. *O conjunto* $\{\mathbf{u} = (1,1),\ \mathbf{v} = (0,1)\}$ *é base de* $\mathbb{R}^2$*.*

Os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ geram $\mathbb{R}^2$. Dado $\mathbf{w} = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, procuramos escalares x, y tais que $x\,\mathbf{u} + y\,\mathbf{v} = \mathbf{w}$, ou seja $(x, x+y) = (a,b)$. Portanto $x = a,\ y = b - a$. Logo, $\mathbf{w} = a\,\mathbf{u} + (b-a)\,\mathbf{v}$. Além disso, é claro que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são LI.

Exemplo 3.29. *O conjunto* $\{\mathbf{v}_1 = (1,1,1),\ \mathbf{v}_2 = (1,1,0),\ \mathbf{v}_3 = (1,0,0)\}$ *é base de* $\mathbb{R}^3$*.*

De fato, vimos no Exemplo 3.22 que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ são LI. Além disso, eles geram $\mathbb{R}^3$, pois dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$(x, y, z) = z\,\mathbf{v}_1 + (y - z)\,\mathbf{v}_2 + (x - y)\,\mathbf{v}_3 .$$

Exemplo 3.30. *Sejam* $U = \{(x, y, z, t) \, : \, x-y+z = 0 \text{ e } y+z-t = 0\}$, $V = \{(x, y, z, t) \, : \, x - y + z = 0\}$ *e* $W = \{(x, y, z, t) \, : \, y - t = 0 \text{ e } y + z = 0\}$. *Encontrar bases para* U, V, W, $U \cap V$ *e* $V \cap W$.

Temos $(x, y, z, t) \in U \iff x - y + z = 0$ e $y + z - t = 0$, ou seja, $z = y - x$ e $t = y + z = 2\,y - x$. Portanto,

$$(x, y, z, t) = (x, y, y - x, 2y - x) = x(1, 0, -1, -1) + y(0, 1, 1, 2),$$

ou seja $U = [(1, 0, -1, -1), (0, 1, 1, 2)]$; como os vetores $(1, 0, -1, -1)$ e $(0, 1, 1, 2)$ são LI, eles formam uma base de U.

Temos $(x, y, z, t) \in V \iff x - y + z = 0$, donde obtemos $z = y - x$. Portanto,

$$(x, y, z, t) = (x, y, y - x, t) = x\,(1, 0, -1, 0) + y\,(0, 1, 1, 0) + t\,(0, 0, 0, 1),$$

ou seja $V = [(1, 0, -1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)]$. Como estes geradores são LI, eles constituem uma base de V.

Temos $(x, y, z, t) \in W \iff t = y$ e $z = -y$. Logo,

$$(x, y, z, t) = (x, y, -y, y) = x\,(1, 0, 0, 0) + y\,(0, 1, -1, 1),$$

donde $W = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, -1, 1)]$. Como $(1, 0, 0, 0)$ e $(0, 1, -1, 1)$ são LI, eles formam uma base de W.

Como $U \cap V = U$, uma base de $U \cap V$ é $\{(1, 0, -1, -1), (0, 1, 1, 2)\}$.

Temos $(x, y, z, t) \in V \cap W \iff x = 2\,y$, $t = y$ e $z = -y$. Logo, $(x, y, z, t) = (2\,, y, -y, y) = y\,(2, 1, -1, 1)$, ou seja $V \cap W = [(2, 1, -1, 1)]$; logo, uma base de $V \cap W$ é $\{(2, 1, -1, 1)\}$. □

Sejam V um espaço vetorial finitamente gerado, $B = \{e_1\,, \ldots, e_n\}$ uma base de V e seja $x \in V$. Como $e_1\,, \ldots, e_n$ geram V, existem escalares $\alpha_1\,, \ldots, \alpha_n$ tais que

$$x = \alpha_1\, e_1 + \cdots + \alpha_n\, e_n. \tag{3.8}$$

Além disso, como $e_1, \ldots, e_n$ são LI, os escalares são determinados de modo único, no sentido que, se

$$x = \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n,$$

então

$$\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n.$$

Reciprocamente, se todo vetor $x \in V$ se escreve de modo único como combinação linear de $e_1, \ldots, e_n$, então eles são geradores de V. Além disso, como o vetor nulo se escreve de modo único como combinação linear de $e_1, \ldots, e_n$, segue-se que estes vetores são LI. Logo, $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ é base de V.

Estes fatos mostram a importância do conceito de base e, por isso, vamos enunciá-lo como um teorema.

Teorema 3.5. *Seja $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de um espaço vetorial V. Então todo $x \in V$ se escreve de modo único como combinação linear de $e_1, \ldots, e_n$. Reciprocamente, se todo vetor $x \in V$ se escreve de modo único como combinação linear de $e_1, \ldots, e_n$, então $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base de V.*

Os números $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ chamam-se **coordenadas** de x em relação à base B. A partir deste ponto, é conveniente considerar base como sendo um conjunto ordenado de vetores: isto significa que neste ponto é importante a ordem em que os vetores $e_1, \ldots, e_n$ são relacionados (com isto queremos dizer, por exemplo, que $e_1, e_2, \ldots, e_n$ e $e_2, e_1, \ldots, e_n$ são bases distintas de V). Podemos então escrever os escalares de (3.8) como uma matriz coluna (ou como uma $n-$upla, se for conveniente), chamada **matriz de coordenadas** de x

$$[x]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}. \tag{3.9}$$

Deve ficar entendido que α_1 é o coeficiente de $e_1, \ldots,$ α_n é o coeficiente de e_n em (3.8). Para simplificar a notação vamos indicar a matriz em (3.9) por $\big[\alpha_1, \ldots, \alpha_n\big]^T$: o símbolo T indica a transposta da matriz.

Exemplo 3.31. *Consideremos em* $\mathbb{R}^4$ *os vetores* $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 0, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, 2)$, $\mathbf{v}_4 = (0, 1, 0, 1)$ *e* $\mathbf{w} = (a, b, c, d)$.
(*a*) *Quais são as coordenadas de* $\mathbf{w}$ *em relação à base canônica de* $\mathbb{R}^4$*?*
(*b*) *Mostrar que* $B = \{\mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 , \mathbf{v}_4\}$ *é base de* $\mathbb{R}^4$*:*
(*c*) *Encontrar as coordenadas de* $\mathbf{w}$ *em relação à base* B.

(a) É claro que, como podemos escrever

$$(a, b, c, d) = a\,(1, 0, 0, 0) + b\,(0, 1, 0, 0) + c\,(0, 0, 1, 0) + d\,(0, 0, 0, 1);$$

a matriz de $\mathbf{w}$ em relação à base canônica C é $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} a, \ b, \ c, \ d \end{bmatrix}^T$.
(b) Dado $\mathbf{w} = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, procuremos $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha\,\mathbf{v}_1 + \beta\,\mathbf{v}_2 + \gamma\,\mathbf{v}_3 + \delta\,\mathbf{v}_4 = \mathbf{w}\,, \tag{3.10}$$

isto é,

$$(\alpha, \delta, -\alpha + \gamma, \beta + 2\gamma + \delta) = (a, b, c, d).$$

Desta igualdade temos $\alpha = a$, $\beta = d-2\,a-b-2\,c$, $\gamma = a+c$ e $\delta = b$, o que mostra que todo $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^4$ se escreve, de modo único, como combinação linear de $\mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 , \mathbf{v}_4$. Pelo Teorema 3.5, os vetores $\mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 , \mathbf{v}_4$ formam uma base de $\mathbb{R}^4$. Além disso, estes cálculos mostram que a matriz das coordenadas de $\mathbf{w}$ em relação à base de B é

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w} \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} a, \ d - 2\,a - 2\,c - b, \ c + a, \ b \end{bmatrix}^T.$$

Exercício 3.19. *Verificar se o conjunto* B *é uma base para* $\mathbb{R}^2$.
(*a*) $B = \{(1, 1), (1, 2)\}$ (*b*) $B = \{(2, 8), (3, 12)\}$.

Exercício 3.20. *Verificar se o conjunto* B *é uma base para* $\mathbb{R}^3$.
(*a*) $B = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ (*b*) $B = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0)\}$
(*c*) $B = \{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ (*d*) $B = \{(1, 2, 3), (0, 2, 1), (0, 0, 2)\}$.

Exercício 3.21. *Verificar se o conjunto* B *é uma base para* $\mathbb{R}^4$.
(*a*) $B = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0)(1, 0, 0, 0)\}$
(*b*) $B = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0), (1, -1, -1, -1)\}$.

Exercício 3.22. *Calcule as coordenadas de* $(1, 2, 3)$ *em relação à base* B*, sendo:*
(a) $B = \{(1, 1, 1),\ (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$, *(b)* $B = \{(1, 1, 1),\ (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$
(c) $B = \{(1, 2, 1),\ (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ *(d)* $B = \{(1, 2, 1),\ (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.

Exercício 3.23. *Sejam* $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 0, 2)$, $\mathbf{v}_4 = (0, 1, 0, 1)$, $\mathbf{u} = (1, 1, 0, -1)$ *e* $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$.
(a) *Mostre que* B *é uma base de* $\mathbb{R}^4$.
(b) *Calcule as coordenadas de* $\mathbf{u}$ *em relação à base* B.

Exercício 3.24. *Sejam*

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ e } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

(a) *Mostre que* B *é base de* $M_2(\mathbb{R})$.
(b) *Calcule as coordenadas de* A *em relação a esta base.*

Exercício 3.25. *Calcule as coordenadas do polinômio* $10+t^2$ *em relação a cada uma das seguintes bases de* $P_2(\mathbb{R})$:
(a) $\{1, t, t^2\}$
(b) $\{1, 1+t, 1+t+t^2\}$
(c) $\{4+t, 2, 2-t^2\}$.

Teorema 3.6. *Suponhamos que o espaço vetorial* V *tenha uma base com* n *vetores. Então qualquer subconjunto de* V *contendo mais de* n *vetores é LD.*

Demonstração: Seja $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V e sejam $x_1, \ldots, x_m$ vetores quaisquer em V, com $m > n$. Podemos supor que os vetores $x_1, \ldots, x_n$ são LI (se $x_1, \ldots, x_n$ fossem LD a prova terminaria aqui, pois, pelo Corolário 3.1, página 81, já teríamos que $x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_m$ são LD). Como $V = [v_1, \ldots, v_n]$ e $x_1 \in V$, temos que x_1 é combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$ e portanto, os vetores $x_1, v_1, \ldots, v_n$ são LD. Pelo Teorema 3.4, página 80, um dos vetores $v_1, \ldots, v_n$ é combinação linear dos precedentes; para simplificar a notação, vamos supor que v_n é combinação linear de $x_1, v_1, \ldots, v_{n-1}$:

$$v_n = \alpha_0 x_1 + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n-1} v_{n-1} \tag{3.11}$$

Pelo Teorema 3.3, página 77, temos $V = \big[x_1, v_1, \ldots, v_{n-1}\big]$.

Agora repetimos este procedimento com x_2. Como x_2 é combinação linear de x_1, $v_1, \ldots, v_{n-1}$, os vetores $x_1, x_2, v_1, \ldots, v_n$ são LD. Pelo Teorema 3.4, página 80, um dos vetores $x_2, v_1, \ldots, v_n$ é combinação linear dos precedentes: tal vetor não pode ser x_2, pois x_1, x_2 são LI.

Para simplificar a notação, vamos supor que v_{n-1} é combinação linear de $x_1, x_2, v_1, \ldots, v_{n-2}$. Procedendo como no passo anterior, temos $V = \left[x_1 , x_2 , v_1 , \ldots, v_{n-2} \right]$.

Continuando deste modo, chegaremos a $V = \left[x_1 , \ldots, x_n \right]$. Como $x_{n+1}, \ldots, x_m \in V$, estes vetores são combinações lineares de $x_1, \ldots, x_n$. Logo, os vetores $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m$ são LD.

Teorema 3.7. *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Se uma base de V tem n vetores, então todas as bases de V também têm n vetores.*

Demonstração: Sejam $\{e_1, \ldots e_n\}$ e $\{v_1, \ldots v_p\}$ duas bases de V. Como $V = [e_1, \ldots e_n]$ e $v_1, \ldots v_p$ é um conjunto LI em V o Teorema 3.6 implica que $p \leq n$. Trocando os papéis de $e_1, \ldots e_n$ e $v_1, \ldots v_p$, obtemos $n \leq p$. Logo, $n = p$.

O Teorema 3.7 justifica a seguinte definição.

Definição 3.2. *Seja V um espaço vetorial finitamente gerado: o número de vetores de uma base qualquer de V chama-se* **dimensão** *de V. Se um espaço vetorial V não é finitamente gerado, diz-se que ele tem* **dimensão infinita**.

Exemplo 3.32. $\dim \mathbb{R}^n = n$ e $\dim P_n(\mathbb{R}) = n + 1$.

Teorema 3.8. *Seja V um espaço vetorial, $\dim V = n$, e sejam $v_1, \ldots, v_p$ (com $p < n$) vetores LI em V. Então existem $n - p$ vetores $v_{p+1}, \ldots, v_n$ em V tais que $v_1, \ldots, v_n$ é base de V.*

Demonstração: Como $p < n$, temos $[v_1, \ldots, v_p] \neq V$. Então existe $v_{p+1} \in V$ tal que $v_{p+1} \notin [v_1, \ldots, v_p]$. Como $v_1, \ldots v_p$ são LI e que $v_{p+1} \notin [v_1, \ldots, v_p]$, segue-se que nenhum destes vetores pode ser combinação linear dos demais. Portanto, os vetores $v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}$ são linearmente independentes.

Se $p+1 = n$, então os vetores $v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}$ constituem uma base de V. Se $p + 1 < n$, repetimos o procedimento acima. Após $n - p$ passos chegaremos a um conjunto LI $v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots v_n$, que é a base de V.

Exercício 3.26. *Verificar se o conjunto B é uma base para $\mathbb{R}^3$.*
(a) $B = \{(2, 1, -1), (3, 0, 1)\}$ (b) $B = \{(2, -1, 1); (1, 1, 0); (-1, 1, 0)\}$
(c) $B = \{(2, 1, -3); (1, 2, 3); (2, 1, 0); (1, 3, 5)\}$.

Exercício 3.27. *Verificar se o conjunto B é uma base para $\mathbb{R}^4$.*
(a) $B = \{(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0)\}$
(b) $B = \{(1,0,1,0),(1,0,0,1),(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$
(c) $B = \{(1,1,0,1),(1,0,0,1),(1,1,0,0),(0,1,0,1)\}$.

3.6 Dependência linear de funções

Consideremos o espaço vetorial $V = \mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n)$ das funções contínuas no intervalo I com valores em $\mathbb{R}^n$. Dizer que as funções $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k$ do espaço $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}^n)$ são LD significa dizer que existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *não todos nulos* tais que

$$\alpha_1\,\mathbf{f}_1(t) + \cdots + \alpha_k\,\mathbf{f}_k(t) = 0\,, \quad \text{para todo} \;\; t \in I. \tag{3.12}$$

Observemos que, para cada $t \in I$, $\mathbf{f}_1(t), \ldots, \mathbf{f}_n(t)$ são vetores de $\mathbb{R}^n$. De acordo com a definição acima, se, para algum $t_0 \in I$, os vetores $\mathbf{f}_1(t_0), \ldots, \mathbf{f}_n(t_0)$ são LI em $\mathbb{R}^n$, então as funções $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ são LI.

Por exemplo, as funções 1, $\operatorname{sen}^2 t$ e $\cos^2 t$, são LD no espaço vetorial $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pois, da trigonometria sabemos que $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t - 1 = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Já o conjunto $S = \{1, \operatorname{sen} t, \cos t\}$ é LI pois uma igualdade do tipo

$$\alpha + \beta \operatorname{sen} t + \gamma \cos t = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

só é possível se $\alpha = \beta = \gamma = 0$; de fato, pondo $t = 0$, temos $\alpha + \gamma = 0$, pondo $t = \pi$, temos $\alpha - \gamma = 0$ e pondo $t = \pi/2$, temos $\alpha + \beta = 0$. Essas igualdades implicam $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Logo S é LI.

O próximo teorema fornece um critério muito útil para testar a independência linear de funções escalares.

Teorema 3.9. (regra para independência linear de funções). *Sejam $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ funções reais com derivadas de ordem $n-1$ contínuas num intervalo I. Se existir $t_0 \in I$ tal que*

$$\det \begin{bmatrix} \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) & \ldots & \varphi_n(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) & \varphi_2'(t_0) & \ldots & \varphi_n'(t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t_0) & \varphi_2^{(n-1)}(t_0) & \ldots & \varphi_n^{(n)}(t_0) \end{bmatrix} \neq 0, \tag{3.13}$$

então $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ são LI.

Demonstração: Suponhamos que

$$\alpha_1\,\varphi_1(t) + \alpha_2\,\varphi_2(t) + \,\cdots + \alpha_n\,\varphi_n(t) = 0, \quad \forall t \in J.$$

Derivando sucessivamente essa igualdade e pondo $t = t_0$, temos

$$\begin{cases} \varphi_1(t_0)\,\alpha_1 + \varphi_2(t_0)\,\alpha_2 + \,\cdots + \varphi_n(t_0)\,\alpha_n = 0 \\ \varphi_1'(t_0)\,\alpha_1 + \varphi_2'(t_0)\,\alpha_2 + \,\cdots + \varphi_n'(t_0)\,\alpha_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t_0)\,\alpha_1 + \varphi_2^{(n-1)}(t_0)\,\alpha_2 + \,\cdots + \varphi_n^{(n-1)}(t_0)\,\alpha_n = 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

As igualdades (3.14) podem ser vistas como um sistema de n equações nas incógnitas $\alpha_1\,,\, \alpha_2\,, \ldots,\, \alpha_n$, cuja matriz dos coeficientes tem determinante diferente de zero. Portanto, esse sistema tem uma única solução, que é $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\ldots$, $\alpha_n = 0$. Logo, as funções $\varphi_1\,, \ldots,\, \varphi_n$ são linearmente independentes.

O determinante em (3.13) chama-se **wronskiano** de $\varphi_1\,, \ldots,\, \varphi_n$ e é denotado por $W(x)$ (ou $W(\varphi_1\,, \ldots,\, \varphi_n)(x)$).

Exemplo 3.33. *Se p, q e r são números dois a dois distintos, então as funções $e^{p\,t}$, $e^{q\,t}$ e $e^{r\,t}$ são LI. De fato, temos*

$$\begin{vmatrix} e^{p\,t} & e^{q\,t} & e^{r\,t} \\ p\,e^{p\,t} & q\,e^{q\,t} & r\,e^{r\,t} \\ p^2\,e^{p\,t} & q^2\,e^{q\,t} & r^2\,e^{r\,t} \end{vmatrix} = (r-q)\,(r-p)\,(q-p)\,e^{(p+q+r)\,t} \neq 0$$

De modo análogo mostramos que se os números $r_1\,, \ldots, r_n$ forem dois a dois distintos, então as funções $e^{r_1\,t}, \ldots, e^{r_n\,t}$ são LI.

Observação 3.4. *A recíproca do teorema anterior não é verdadeira. Por exemplo, as funções $f(t) = t^2$ e $g(t) = t\,|t|$ são LI, mas seu wronskiano é nulo. No entanto, pode-se mostrar que, se duas funções $\varphi_1\,, \varphi_2$ forem LI e forem soluções da equação diferencial de segunda ordem $y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = 0$, com $a(t), b(t)$ contínuas em um intervalo J, então $W(\varphi_1\,, \varphi_2)(t) \neq 0$ $\forall t \in J$.*

Exercício 3.28. *Mostre que:*
(a) $\{\cos 2t,\ \operatorname{sen}^2 t,\ \cos^2 t\}$ *é LD* *(b)* $\{1, \operatorname{sen} t,\ \cos t\}$ *é LI*
(c) $\{1, \operatorname{sen}\, t,\ \cos 2t,\ \operatorname{sen}^2 t\}$ *é LD* *(d)* $\{1,\ e^t,\ \operatorname{sen} t,\ e^t \cos t\}$ *é LI.*
(e) $\{e^{a\,t}\cos b\,t,\ e^{a\,t}\operatorname{sen}\, b\,t,\ e^{c\,t}\}$ *é LI, se $b \neq 0$ e é LD, se $b = 0$.*

3.7 Bases ortogonais em $\mathbb{R}^n$

Consideremos em $\mathbb{R}^n$ o seu produto interno usual: se $\mathbf{x} = (x_1\,,\ \dots\ ,\ x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1\,,\ \dots\ ,\ y_n)$, então

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x_1\,y_1\ + \cdots +\ x_n\,y_n\,.$$

Teorema 3.10. *Se $X = \{\mathbf{u}_1\,, \mathbf{u}_2\,, \dots, \mathbf{u}_m\}$ é um conjunto de vetores ortogonais não nulos, então X é um conjunto LI.*

Demonstração: Suponhamos que os números $\alpha_1\,, \alpha_2\,, \dots, \alpha_m$ são tais que

$$\alpha_1\,\mathbf{u}_1\ + \alpha_2\,\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_m\,\mathbf{u}_m = \mathbf{0} \tag{3.15}$$

Efetuando o produto escalar dos dois membros de (3.15) com $\mathbf{u}_1$ e notando que $\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_1 = \|\mathbf{u}_1\|^2$ e $\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{u}_1 = 0,\ \forall j \neq 1$, obtemos $\alpha_1\|\mathbf{u}_1\|^2 = 0$. Como $\|\mathbf{u}_1\|^2 \neq 0$, temos $\alpha_1 = 0$. Analogamente obtemos $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0\,, \dots, \alpha_m = 0$. Logo, os vetores $\mathbf{u}_1\,, \mathbf{u}_2\,, \dots, \mathbf{u}_m$ são LI. □

Uma base $B = \{\mathbf{u}_1\,, \dots, \mathbf{u}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ formada por vetores 2 a 2 ortogonais é chamada uma **base ortogonal**. Se além disso, todos os vetores forem unitários (isto é, $\|\mathbf{u}_j\| = 1,\ \forall j$) dizemos que B é uma **base ortonormal**.

Exemplo 3.34. *A base canônica de $\mathbb{R}^n$ é ortonormal.*

Exemplo 3.35. *Em $\mathbb{R}^3$, o conjunto $\{(1,0,0),(0,\frac{1}{2}\,,\frac{\sqrt{3}}{2}),(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\frac{-1}{2})\}$ é uma base ortonormal.*

O próximo teorema mostra que fica mais simples obter as coordenadas de um vetor quando trabalhamos com uma base ortonormal.

Teorema 3.11. *Se $B = \{\mathbf{v}_1\,, \mathbf{v}_2\,, \dots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, então, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, temos*

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_1)\,\mathbf{v}_1 + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_2)\,\mathbf{v}_2 + \cdots + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_n)\,\mathbf{v}_n\,, \tag{3.16}$$

isto é, se $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n$, então $\alpha_1 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_1\,, \dots, \alpha_n = \mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_n$.

Demonstração: Como B é base de $\mathbb{R}^n$, existem números $\alpha_1\,, \alpha_2\,, \dots, \alpha_n$ são tais que

$$\mathbf{x} = \alpha_1\,\mathbf{v}_1\ + \alpha_2\,\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\,\mathbf{v}_n \tag{3.17}$$

Efetuando o produto escalar dos dois membros de (3.17) com $\mathbf{v}_1$ e notando que $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 1$ e $\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, $\forall j \neq 1$, obtemos $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1 = \alpha_1$. De modo análogo, obtemos $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_2 = \alpha_2, \ldots, \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_n = \alpha_n$. □

Teorema 3.12. *Sejam* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *um conjunto ortonormal em* $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. *Então o vetor* $\mathbf{z} = \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1)\, \mathbf{v}_1 - \cdots - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_p)\, \mathbf{v}_p$ *é ortogonal a cada um dos vetores* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$.

De fato, como $\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_j = 1$ e $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$, se $i \neq j$, temos

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{v}_j = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_j - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1)\,(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_j) - \cdots - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_p)(\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_j) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_j - \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_j = 0.$$

Usando o Teorema 3.12 construimos, a partir de uma base qualquer $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ de um subespaço vetorial W de $\mathbb{R}^n$, uma base ortonormal $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ para W, de modo que, para cada $j \leq m$, temos $\big[\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_j\big] = \big[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j\big]$. Definamos os vetores $\mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m$ e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} \\
\mathbf{w}_2 &= \mathbf{u}_2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 &= \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} \\
\mathbf{w}_3 &= \mathbf{u}_3 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_3)\mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_3)\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 &= \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|} \\
&\vdots \\
\mathbf{w}_m &= \mathbf{u}_m - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_m)\mathbf{v}_2 - \cdots - (\mathbf{v}_{m-1} \cdot \mathbf{u}_m)\mathbf{v}_{m-1} \\
\mathbf{v}_m &= \frac{\mathbf{w}_m}{\|\mathbf{w}_m\|}
\end{aligned}$$

De acordo com o Teorema 3.12, cada vetor $\mathbf{v}_k$ é ortogonal a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$. Além disso, como os vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ são linearmente independentes, todos os $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ são diferentes do vetor nulo e, portanto, formam uma base de W. Este método de obter uma base ortonormal chama-se **método de ortonormalização de Gram-Schmidt**.

O vetor

$$\mathbf{w} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1)\, \mathbf{v}_1 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_p)\, \mathbf{v}_p\,,$$

dado no Teorema 3.12, chama-se **projeção ortogonal** de $\mathbf{x}$ sobre o subespaço $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p]$ (a Figura 3.2 abaixo mostra os casos $p = 1$ e $p = 2$).

É fácil ver que, se $\mathbf{x}$ pertence ao subespaço gerado por $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$, então $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

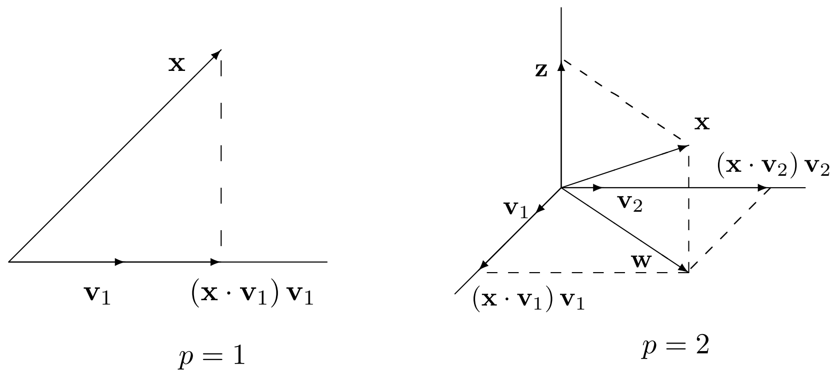


Figura 3.2

Exemplo 3.36. *Usando o método de Gram-Schmidt, ortonormalizar a base* $\mathbf{u}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,1,0)$, $\mathbf{u}_3 = (1,0,0)$ *de* $\mathbb{R}^3$.

Como $\|\mathbf{u}_1\| = \sqrt{3}$, tomamos $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(1,1,1)$. Em seguida, como $\langle \mathbf{u}_2\,, \mathbf{v}_1\rangle = 2/\sqrt{3}$, tomamos

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2\,, \mathbf{v}_1\rangle \mathbf{v}_1 = (1,1,0) - \frac{2}{3}\,(1,1,1) = \frac{1}{3}(1,1,-2)$$

e

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(1,1,-2)$$

Como $\langle \mathbf{u}_3\,, \mathbf{v}_1\rangle = 1/\sqrt{3}$ e $\langle \mathbf{u}_3\,, \mathbf{v}_2\rangle = \sqrt{6}$, tomamos

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_3 = \mathbf{u}_3 - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathbf{v}_1 - \tfrac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{v}_2 &= (1,0,0) - \tfrac{1}{3}\,(1,1,1) - \tfrac{1}{6}\,(1,1,-2) = \\ &= \tfrac{1}{2}\,(1,-1,0)\end{aligned}$$

e portanto

$$\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(1,-1,0)$$

Assim, a base procurada é $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\,(1,1,1),\ \frac{1}{\sqrt{6}}\,(1,1,-2),\ \frac{\sqrt{2}}{2}\,(1,-1,0)\right\}$.

Exercício 3.29. *Mostre que se aplicarmos o método de Gram-Schmidt à base* $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1)$ *obtemos a base canônica de* $\mathbb{R}^3$.

Exercício 3.30. *Ortonormalize, pelo método de Gram-Schmidt, a base*
(a) $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 1, 1)$
(b) $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$
(c) $\{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\}$.

Exercício 3.31. *Seja* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *uma base ortonormal de* $\mathbb{R}^n$. *Mostre que, se* $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{u}_n$ *então*

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2$$

Exercício 3.32. *Encontre uma base ortonormal para cada um dos seguintes subespaços vetoriais de* $\mathbb{R}^3$*:*
(a) $[(9, 0, 7), (2, 1, 8), (2, 0, 4)]$ (b) $[(1, 0, 1), (5, 1, 2), (3, 1, 0)]$
(c) $[(1, 0, 0), (2, 3, 0), (1, 7, 5);$ (d) $[(1, 2, 8), (-2, 2, 2), (3, 0, 6)]$
(e) $\{(x, y, z) \,:\, 3\,x - y + 2\,z = 0\}$

Exercício 3.33. *Seja* $S \subset \mathbb{R}^n$ *um subconjunto não vazio. Mostre que o conjunto* $S^\perp$ *dos vetores ortogonais a todos os vetores de* S *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^n$.

Exercício 3.34. *Sejam* $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$. *Mostre que* $B^\perp \subset A^\perp$.

Exercício 3.35. *Seja* W *um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^n$.
(a) *Mostre que* $W^{\perp\perp} = W$.
(b) *Mostre que todo* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *se escreve na forma* $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, *com* $\mathbf{u} \in W$ *e* $\mathbf{w} \in W^\perp$.

3.8 Exercícios

1. Encontrar bases para os seguintes subespaços de $M_2(\mathbb{R})$:
   (a) $\{A \in M_2(\mathbb{R}) \,:\, A^T = A\}$ (b) $\{A \in M_2(\mathbb{R}) \,:\, A^T = -A\}$.

2. Encontrar bases dos subespaços U, W e $U \cap W$ de $P_3(\mathbb{R})$, sendo:
   $(a)\, U = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p(1) = 0\},\ W = \{p \in P_3(\mathbb{R}) : p''(t) = 0, \forall t\}$
   $(b)\, U = [t^3 - 2\,t^2 + 4, 3\,t^2 - 1, 5\,t^3],\ W = [t^3 - 3\,t^2, t - 5, 3]$

(c) $U = [t^2 + 4, 3\,t^2 - 1, 5\,t^3]$, $W = \{p \in P_3(\mathbb{R}) \,:\, p'(t) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}\}$.

3. Encontrar bases dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$: U, W, $U \cap W$:
(a) $U = [(0,0,1),(1,1,1)]$, $W = [(1,0,0),(0,1,0)]$,
(b) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2\,y = 0\}$, $W = [(1,5,3),(0,2,3)]$
(c) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + 2\,y = 0\}$, $W = [(0,0,1),(1,1,1)]$

4. Verifique se o conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$ é base de $M_2(\mathbb{R})$.

5. Encontre uma base e a dimensão de W, sendo:
(a) $W = [(1,4,-1,3),(2,1,-3,-1),(0,1,1,1)] \subset \mathbb{R}^4$.
(b) $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0 \ \text{ e } x + 2\,y + t = 0\}$
(c) $W = \{X \in M_2(\mathbb{R}) : A\,X = X\}$, em que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
(d) $W = \{p \in P_2(\mathbb{R}) : p''(t) = 0,\ \ \forall t \in \mathbb{R}\}$.
(e) $W = [t^3 + 4t^2 - t + 3, t^3 + 5t^2 + 5, 3t^3 + 10t^2 - 5t + 5] \subset P_3(\mathbb{R})$.

6. Determinar uma base e a dimensão de U, de W e de $U \cap W$, sendo:
(a) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y + z = 0\}$ $W = \{(x,y,0) \,:\, z = 0\}$.
(b) $U = \{p \in P_2(\mathbb{R}) : p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$, $W = \{p \in P_2(\mathbb{R}) : p(0) = 0\}$.

7. Sejam $\mathbf{u} = (\operatorname{sen}\alpha\,, \cos\alpha)$ e $\mathbf{v} = (-\cos\alpha\,, \operatorname{sen}\alpha)$ para algum α em $[0, 2\,\pi]$. Mostre que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

Capítulo 4

Equações diferenciais lineares

Neste capítulo estudamos equações diferenciais lineares de ordem superior a um. Inicialmente apresentaremos alguns fatos gerais sobre equações lineares. Tais resultados são válidos para qualquer equação diferencial linear mas, para simplificar a notação, vamos enunciá-los para equações de segunda ordem.

4.1 Fatos gerais sobre equações lineares

Consideremos a **equação linear de segunda ordem**

$$y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = h(t). \tag{4.1}$$

em que as funções $a(t)$, $b(t)$, chamadas **coeficientes** e $h(t)$, chamada **termo forçante**, são contínuas em um intervalo $J \subset \mathbb{R}$. Se $h(t) \not\equiv 0$, a equação diferencial (4.1) é dita **não homogênea**. Se $h(t) = 0$, $\forall t$, a equação (4.1) é dita **homogênea**. Uma **solução** de (4.1) é uma função $y(t)$ definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que satisfaz (4.1), isto é, $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = h(t)$, $\forall t \in I$. Nosso objetivo é encontrar a **solução geral** da equação (4.1), que é uma expressão que descreva todas as soluções desta equação. Vimos no capítulo 2 que equações diferenciais de segunda ordem ocorrem com frequência na Mecânica em virtude da segunda lei de Newton. Assim como na Mecânica, em que a posição de uma partícula é determinada a partir de sua posição e velocidade no instante inicial, é natural associar à equação (4.1) duas **condições iniciais**. Dados $t_0 \in J$, y_0, $\tilde{y}_0 \in \mathbb{R}$, o problema de encontrar uma solução $y(t)$ de (4.1) tal que $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = \tilde{y}_0$ é um **problema de valor inicial** associado a esta equação. O problema de encontrar a solução geral de (4.1) é equivalente ao de encontrar a solução de qualquer problema de valor inicial associado a esta equação. Enunciamos a seguir um teorema de fundamental importância no estudo das equações de segunda ordem; sua demonstração está fora dos objetivos deste texto.

Teorema 4.1. *Suponhamos que $a(t)$, $b(t)$ e $h(t)$ sejam funções contínuas em um intervalo J. Então, dados $t_0 \in J$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$, existe uma única solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = h(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1\ . \end{cases} \tag{4.2}$$

O próximo teorema, conhecido como *princípio de superposição*, permite obter novas soluções de (4.1) a partir de soluções conhecidas. A demonstração é trivial e fica como exercício.

Teorema 4.2. *Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções de*

$$y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = h_1(t) \tag{4.3}$$

$$y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = h_2(t), \tag{4.4}$$

respectivamente, e se c_1 e c_2 são constantes, então a função $z(t) = c_1\, y_1(t) + c_2\, y_2(t)$ é solução da equação

$$y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = c_1\, h_1(t) + c_2\, h_2(t). \tag{4.5}$$

Corolário 4.1. *O conjunto $\mathcal{S}$ das soluções da equação homogênea*

$$y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = 0 \tag{4.6}$$

é um espaço vetorial de dimensão 2.

Demonstração: Tomando $h_1(t) = h_2(t) = 0$, o teorema anterior implica que qualquer combinação linear de soluções de (4.6) é uma solução de (4.6), ou seja, o conjunto $\mathcal{S}$ é um subespaço de $\mathcal{C}(J, \mathbb{R})$, o espaço vetorial de todas as funções contínuas em J com valores reais.

Mostremos que dim $\mathcal{S} = 2$. Fixemos $t_0 \in J$ arbitrariamente. Sejam $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ as soluções de (4.6) tais que $\varphi_1(t_0) = 1$, $\varphi_1'(t_0) = 0$ e $\varphi_2(t_0) = 0$, $\varphi_2'(t_0) = 1$ (a existência de tais soluções é garantida pelo Teorema 4.1).

Afirmamos que $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ formam uma base de $\mathcal{S}$. Em primeiro lugar, é claro que estas funções são LI, pois o seu wronskiano é diferente de zero em $t = t_0$:

$$W(\varphi_1\,,\,\varphi_2)(t_0) = \det \begin{bmatrix} \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) & \varphi_2'(t_0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

Mostremos agora qualquer solução $\varphi(t)$ de (4.6) é combinação linear de $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$. Procuremos constantes c e d tais que

$$\varphi(t) = c\,\varphi_1(t) + d\,\varphi_2(t), \qquad \forall t \in J. \tag{4.7}$$

Para que (4.7) esteja satisfeita quando $t = t_0$, devemos ter $c = \varphi(t_0)$. Derivando (4.7) e substituindo $t = t_0$, obtemos $d = \varphi'(t_0)$. Com isto, temos que (4.7) está verificada quando $t = t_0$. Mostremos que (4.7) está satisfeita para todo $t \in J$. Sabemos que a função $\varphi(t)$ é solução do PVI

$$\begin{cases} y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = 0 \\ y(t_0) = c \\ y'(t_0) = d \end{cases}$$

Por outro lado, a função $c\,\varphi_1(t) + d\,\varphi_2(t)$ também é solução deste PVI. Como, pelo Teorema 4.1, tal PVI tem uma única solução, devemos ter $\varphi(t) = c\,\varphi_1(t) + d\,\varphi_2(t)$, $\forall t \in J$.

Logo $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\}$ é uma base de $\mathcal{S}$ e $\dim \mathcal{S} = 2$. □

Tomando $h_1(t) = h_2(t) = h(t)$, $c_1 = 1$ e $c_2 = -1$ no Teorema 4.2, vemos que se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções quaisquer da equação (4.1), então $y_2(t) - y_1(t)$ é uma solução de (4.6). Segue-se que, uma vez conhecida uma *solução particular* $y^*(t)$ de (4.1), podemos obter qualquer outra solução de (4.1) somando a $y^*(t)$ uma conveniente solução da equação homogênea (4.6). Como conseqüência, temos o seguinte resultado.

Corolário 4.2. *A solução geral da equação não homogênea (4.1) é a soma de uma solução particular da equação não homogênea (4.6) com a solução geral da equação homogênea (4.1).*

Exemplo 4.1. *É fácil ver que a função* $y(t) = 5\,t$ *é solução da equação diferencial* $y'' + y = 5\,t$*. Como a solução geral da equação homogênea associada é* $y_H(t) = a\,\cos t + b\,\text{sen}\, t,\ a\,,\, b \in \mathbb{R}$*, segue-se que a solução geral da equação* $y'' + y = 5\,t$ *é* $y(t) = a\,\cos t + b\,\text{sen}\, t + 5\,t,\ a\,,\, b \in \mathbb{R}$*.*

Exercício 4.1. *Sabendo que a função* $\psi(t) = 5\,t^3 + 4\,t^5$ *é solução da equação não homogênea* $y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = g(t)$ *e que as funções* $\varphi_1(t) = \text{sen}\, 5\,t$*,* $\varphi_2(t) = \cos 5\,t$ *são soluções da equação homogênea correspondente, encontre a solução geral de cada uma destas equações.*

Exercício 4.2. *Suponha que* $y_1(t) = e^{3\,t} + 4\,e^{-5\,t} + 3\,\cos 2\,t$*,* $y_2(t) = e^{-5\,t} + 3\,\cos 2\,t$ *e* $y_3(t) = e^{3\,t} + 3\,\cos 2\,t$ *são soluções da equação não homogênea* $y'' + a\,y' + b\,y = f(t)$*. Encontre a solução geral desta equação.*

Extensão para equações de ordem superior: Os resultados acima permanecem válidos, com algumas adaptações óbvias, para equações diferenciais lineares de ordem n

$$y^{(n)} + a_{n-1}\,(t)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1\,(t)\,y' + a_0\,(t)\,y = g(t)$$

4.2 Método de redução da ordem

Consideremos a equação linear de segunda ordem homogênea

$$y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0\,. \tag{4.8}$$

Suponhamos conhecida uma solução $y_1(t)$ desta equação. Sabemos que, para qualquer constante c, a função $c\,y_1(t)$ é uma solução da equação (4.8): é claro que as funções $y_1(t)$ e $c\,y_1(t)$ são linearmente dependentes. Um método para encontrar uma solução $y_2(t)$ linearmente independente de $y_1(t)$ consiste em procurar uma nova solução de (4.8) na forma $y(t) = u(t)\,y_1(t)$, em que $u(t)$ é uma função não constante (assim, o que estamos procurando é a função u). Substituindo na equação (4.8) $y(t) = u(t)\,y_1(t)$, $y'(t) = u'(t)\,y_1(t) + u(t)\,y_1'(t)$ e $y''(t) = u''(t)\,y_1(t) + 2\,u'(t)\,y_1'(t) + u(t)\,y_1''(t)$, temos

$$\begin{aligned} u(t)\big[y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t)\big] + y_1(t)u''(t) + \\ + \big[2y_1'(t) + p(t)y_1(t)\big]u'(t) = 0. \end{aligned}$$

Como $y_1''(t) + p(t)\,y_1'(t) + q(t)\,y_1(t) = 0$ (pois $y_1(t)$ é solução de (4.8)), esta equação torna-se

$$y_1(t)\,u''(t) + \big(2\,y_1'(t) + p(t)\,y_1(t)\big)\,u'(t) = 0.$$

Dividindo por $y_1(t)$ e chamando $v = u'$, obtemos a equação linear de primeira ordem

$$v' + \Big(2\,\frac{y_1'}{y_1} + a\Big)\,v = 0\,, \tag{4.9}$$

que já foi estudada no Capítulo 1. Uma vez obtida uma solução v desta equação, integramos v para obter uma função u procurada e, conseqüentemente, obter uma solução particular $y(t)$.

Exemplo 4.2. *Mostre que* $y_1(t) = e^{2\,t}$ *é solução da equação*

$$t\,y'' - (2\,t+1)\,y' + 2\,y = 0 \tag{4.10}$$

e encontre sua solução geral.

Substituindo em (4.10): $y_1(t)$, $y_1'(t) = 2\,e^{2\,t}$ e $y_1''(t) = 4\,e^{2\,t}$, temos

$$4\,t\,e^{2\,t} - 2\,(2\,t+1)\,e^{2\,t} + 2\,e^{2\,t} = e^{2\,t}\,\big[4\,t - 4\,t - 2 + 2\big] = 0$$

Logo $e^{2\,t}$ é solução de (4.10).

Pelo método de redução da ordem, a equação (4.10) tem uma solução da forma $y_2(t) = e^{2\,t}\,v(t)$. Substituindo em (4.10) $y_2(t)$, $y_2'(t) = e^{2\,t}\,(v' + 2\,v)$ e $y_2''(t) = e^{2\,t}\,(v'' + 4\,v' + 4\,v)$ e cancelando o fator comum $e^{2\,t}$, temos

$$t\,v'' + (2\,t-1)\,v' = 0$$

Definindo $z = v'$, obtemos a equação

$$z' + (2 - \frac{1}{t})\,z = 0$$

que tem a solução $z(t) = t\,e^{-2\,t}$. Portanto $v(t) = -\,\frac{1}{4}\,e^{-2\,t}\,(2\,t+1)$. Logo $y_2(t) = 2\,t+1$ e a solução geral de (4.10) é

$$y(t) = c_1\,e^{2\,t} + c_2\,(2\,t+1), \quad c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Exercício 4.3. *Para cada uma das equações abaixo é dada uma solução. Use o método de redução da ordem para obter uma outra solução:*

(a) $t^2\,y'' + t\,y' - (1/4)\,y = 0, \quad y_1(t) = t^{1/2}$

(b) $t^2\,y'' + t\,y' - y = 0, \quad y_1(t) = t$

(c) $4\,t^2\,y'' + 4\,t\,y' - y = 0, \quad y_1(t) = t^{1/2}$

(d) $t^2\,y'' - t\,y' + y = 0, \quad y_1(t) = t$

4.3 Equação homogênea com coeficientes constantes

Nosso objetivo nesta seção é encontrar a solução geral da equação linear homogênea com coeficientes constantes:

$$y'' + a\,y' + b\,y = 0\,. \tag{4.11}$$

A função exponencial $y(t) = e^{r\,t}$ é uma candidata natural a solução de (4.11) pois suas derivadas de primeira e segunda ordem são

$$y'(t) = r\,e^{r\,t} \quad \text{e} \quad y''(t) = r^2\,e^{r\,t},$$

que diferem de $y(t)$ apenas por constantes multiplicativas, o que torna possível o anulamento da combinação $y''(t)+a\,y'(t)+b\,y(t)$. Substituindo $y(t) = e^{r\,t}$ em (4.11), temos

$$(r^2 + a\,r + b\,)\,e^{r\,t} = 0.$$

Como $e^{r\,t} \neq 0,\ \forall t$, temos necessariamente

$$r^2 + a\,r + b\, = 0\,. \tag{4.12}$$

Essa equação é chamada **equação característica** de (4.11).

A equação característica (4.12) fornece os expoentes das soluções da equação diferencial (4.11): se r é uma raiz da equação característica, é fácil ver que a função $e^{r\,t}$ é solução de (4.11). Analisemos as 3 possibilidades para o discriminante $\Delta = a^2 - 4\,b$ de (4.12).

1º caso: $\Delta = a^2 - 4\,b > 0$. A equação característica (4.12) tem 2 raízes reais distintas $r_1\,,\,r_2$ dadas por

$$r_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4\,b}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4\,b}}{2}$$

Então é fácil ver que as funções

$$y_1(t) = e^{r_1\,t} \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{r_2\,t}$$

são soluções linearmente independentes de (4.11). Pelo Corolário 4.1, a solução geral da equação diferencial (4.11) é

$$y(t) = c_1\,e^{r_1\,t} + c_2\,e^{r_2\,t} \tag{4.13}$$

Exemplo 4.3. (a) *Encontrar a solução geral da equação*

$$y'' + 3\,y' - 10\,y = 0$$

(b) *Encontrar a solução* $y(t)$ *desta equação satisfazendo as condições* $y(0) = 7$ *e* $y'(0) = 0$.

A equação característica é $r^2 + 3\,r - 10 = 0$. Portanto as raízes são $r_1 = 2$ e $r_2 = -5$. Logo, a solução geral da equação diferencial é

$$y(t) = c_1\,e^{2\,t} + c_2\,e^{-5\,t}, \quad c_1\,,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

As condições iniciais $y(0) = 7$ e $y'(0) = 0$ implicam

$$c_1 + c_2 = 7 \quad 2\,c_1 - 5\,c_2 = 0$$

donde obtemos $c_1 = 5$ e $c_2 = 2$. Logo, a solução do PVI é

$$y(t) = 5\,e^{2\,t} + 2\,e^{-5\,t}. \qquad \square$$

2º **caso:** $\Delta = a^2 - 4\,b = 0$. Agora, a equação característica

$$r^2 + a\,r + b = 0,$$

tem uma raiz dupla: $r = -a/2$.

Então uma solução de (4.11) é $y_1(t) = e^{r\,t}$. Vamos obter outra solução de (4.11) pelo método de redução da ordem. Procuremos uma outra solução de (4.11) na forma $y(t) = e^{r\,t}\,v(t)$. Substituindo em (4.11), cancelando o fator comum $e^{r\,t}$, temos

$$v'' + (2\,r + a)\,v' + (r^2 + a\,r + b)\,v = 0\,.$$

Como $r^2 + a\,r + b = 0$ e $2\,r + a = 0$, esta equação fica

$$v'' = 0\,,$$

cuja solução geral é $v(t) = c_1\,t + c_2$. Portanto, outra solução de (4.11) é $y_2(t) = t\,e^{r\,t}$.

Logo, a solução geral de (4.11) é

$$y(t) = c_1\,t\,e^{r\,t} + c_2\,e^{r\,t} = (c_1\,t + c_2)\,e^{r\,t}\,, \qquad c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}.. \tag{4.14}$$

Exemplo 4.4. *Encontrar a solução geral da equação diferencial*

$$y'' - 4\,y' + 4\,y = 0.$$

A equação característica é $r^2 - 4\,r + 4 = 0$, que tem $r = 2$ como raiz dupla. Logo, a solução geral da equação diferencial é

$$y(t) = c_1\,e^{2\,t} + c_2\,t\,e^{2\,t}, \quad c_1\,,\,c_2 \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

3º caso: $\Delta = p^2 - 4\,b < 0$. As raízes da equação característica têm partes imaginárias diferentes de zero. Como, nos dois casos anteriores, a solução geral de (4.6) é dada em termos da função exponencial. A diferença é que, neste caso, a solução é uma função complexa. Se $r_1 = \alpha + i\,\beta$ e $r_2 = \alpha - i\,\beta$ são as raízes da equação característica (4.12), então toda solução da equação diferencial (4.11) é dada por

$$y(t) = c_1\,e^{r_1 t} + c_2\,e^{r_2 t}\,,$$

em que $c_1\,,\,c_2$ são constantes (que podem ser complexas). Isto não é plenamente satisfatório, pois gostaríamos de obter soluções reais da equação (4.11). Para resolver este problema, usaremos o seguinte resultado.

Teorema 4.3. *Se $y(t) = u(t) + i\,v(t)$ é uma solução complexa (com $u(t)\,,\,v(t)$ reais) da equação diferencial*

$$y''(t) + a\,y' + b\,y = f(t) + i\,g(t), \tag{4.15}$$

em que os coeficientes a e b são constantes reais e $f(t)$ e $g(t)$ são funções reais, então $u(t)$ e $v(t)$ são soluções, respectivamente, das equações

$$u'' + a\,u' + b\,u = f(t) \tag{4.16}$$

e

$$v'' + a\,v' + b\,v = g(t). \tag{4.17}$$

Demonstração: Como $y(t) = u(t) + i\,v(t)$ é uma solução de (4.15), temos

$$u''(t) + i\,v''(t) + a\,[u'(t) + i\,v'(t)] + b\,[u(t) + i\,v(t)] = f(t) + i\,g(t),$$

Separando parte real e parte imaginária, temos

$$u''(t) + a\,u'(t) + b\,u(t) = f(t)$$
$$v''(t) + a\,v'(t) + b\,v(t) = g(t)\,,$$

isto é, u e v são soluções de (4.16) e (4.17), respectivamente.

Apliquemos o Teorema 4.3 à equação (4.11). Se $r_1 = \alpha + i\,\beta$ e $r_2 = \alpha - i\,\beta$ são as raízes da equação característica (4.12), então qualquer uma das soluções complexas

$$y_1(t) = e^{(\alpha+i\,\beta)\,t} = e^{\alpha\,t}\,\cos(\beta\,t) + i\,e^{\alpha\,t}\,\text{sen}\,(\beta\,t)$$
$$y_2(t) = e^{(\alpha-i\,\beta)\,t} = e^{\alpha\,t}\,\cos(\beta\,t) - i\,e^{\alpha\,t}\,\text{sen}\,(\beta\,t)$$

dá origem às soluções reais

$$z_1(t) = e^{\alpha\,t}\,\cos\beta\,t \quad \text{e} \quad z_2(t) = e^{\alpha\,t}\,\text{sen}\,\beta\,t$$

da equação (4.1). Como z_1 e z_2 são linearmente independentes, a solução geral de (4.1) quando $\Delta < 0$ é

$$z(t) = e^{\alpha\,t}\left(c_1\,\cos\beta\,t + c_2\,\text{sen}\,\beta\,t\right), \quad c_1\,, c_2\,\in \mathbb{R}\,. \tag{4.18}$$

Exemplo 4.5. *Encontrar a solução geral da equação* $y'' + 4y' + 13\,y = 0$.

A equação característica é $r^2 + 4\,r + 13 = 0$, que tem as raízes $r_1 = -2 + 3\,i$ e $r_1 = -2 - 3\,i$. Portanto, as funções

$$y_1(t) = e^{-2t}(\cos\,3\,t + i\,\text{sen}\,3\,t) \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{-2t}(\cos\,3\,t - i\,\text{sen}\,3\,t)$$

são soluções complexas da equação diferencial dada. Logo, as funções $z_1(t) = e^{-2t}\cos\,3\,t$ e $z_2(t) = e^{-2t}\,\text{sen}\,3\,t$ são soluções reais da equação e sua solução geral real é

$$z(t) = e^{-2t}\big(a\,\cos\,3\,t + b\,\text{sen}\,3\,t\big), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.6. (Oscilações livres não amortecidas)
Consideremos o sistema massa-mola descrito no Capítulo 2. Suponhamos que não haja atrito e que seja nula a resultante das forças externas atuando sobre a massa. Chamando $\omega = \sqrt{k/m}$*, a equação (2.3) fica*

$$y'' + \omega^2\,y = 0\,. \tag{4.19}$$

A equação característica é $r^2 + \omega^2 = 0$, cujas raízes são $r = \pm\omega\, i$. Logo, as funções $y_1(t) = \cos \omega\, t$ e $y_2(t) = \operatorname{sen} \omega\, t$ são soluções linearmente independentes de (4.19) e a solução geral é

$$y(t) = a \cos \omega\, t + b \operatorname{sen} \omega\, t = A \left[\frac{a}{A} \cos \omega\, t + \frac{b}{A} \operatorname{sen} \omega\, t\right].$$

em que $A = \sqrt{a^2 + b^2}$. Chamando $\cos\alpha = \dfrac{a}{A}$ e $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{b}{A}$ e usando a igualdade $\cos(\omega\, t - \alpha) = \cos\alpha \cos\omega\, t + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\omega\, t$,

podemos escrever

$$y(t) = A \cos(\omega\, t - \alpha).$$

O gráfico da solução tem o aspecto mostrado na figura 4.1 ao lado.

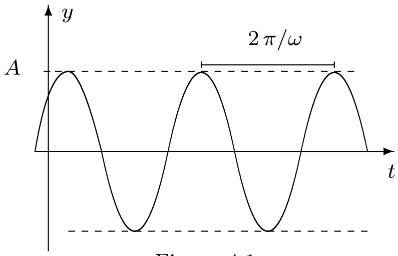


Figura 4.1

Exemplo 4.7. (Oscilações livres amortecidas)
Suponhamos que o corpo esteja sujeito a uma força de atrito proporcional à velocidade e que não haja forças externas atuando sobre a massa. Então, a equação (2.3) fica

$$y'' + b\, y' + \omega^2\, y = 0\,, \tag{4.20}$$

em que $b = c/m$. A equação característica de (4.20) é $r^2 + b\, r + \omega^2 = 0$. Seja $\Delta = b^2 - 4\,\omega^2$. Se $\Delta > 0$, a equação característica tem duas raízes reais negativas $r_1 = (-b + \sqrt{\Delta})/2$ e $r_2 = (-b - \sqrt{\Delta})/2$ (notemos que $\sqrt{b^2 - 4\,\omega^2} < b$). Portanto, a solução geral da equação (4.20) é

$$y(t) = c_1\, e^{r_1\, t} + c_2\, e^{r_2\, t}\,, \quad c_1\,,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Como $r_1 < 0$ e $r_2 < 0$, temos que $y(t) \to 0$, quando $t \to \infty$. O gráfico da solução é mostrado nas figuras 4.2 e 4.3 abaixo.

Se $\Delta = 0$, a equação característica tem uma raiz real dupla negativa $r = -b/2$. Portanto, a solução geral da equação (4.20) é

$$y(t) = (c_1\, + c_2\, t)\, e^{-b\, t/2}\,, \quad c_1\,,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Como no caso anterior, $y(t) \to 0$, quando $t \to \infty$ (o gráfico de uma tal solução é mostrado nas figuras 4.2 e 4.3).

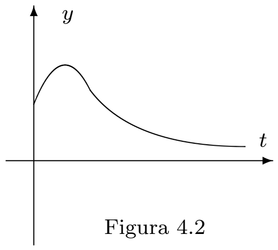


Figura 4.2

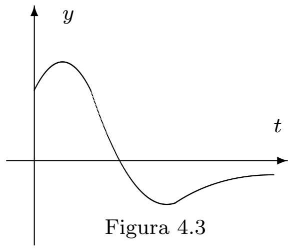


Figura 4.3

Se $b^2 - 4\,\omega^2 < 0$, as raízes da equação característica são números complexos com parte real negativa (isto implica que $y(t) \to 0$, quando $t \to \infty$) e partes imaginárias não nulas. Escrevendo $\lambda = \alpha + i\,\beta$, com $\alpha = -b/2$ $\beta = (4\,\omega^2 - b^2)^{1/2}/2$, vemos que a solução geral é

$$y(t) = e^{\alpha\, t}\big(c_1 \,\cos\,\beta\, t + c_2\,\mathrm{sen}\,\beta\, t\big)\,, \quad c_1\,,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Repetindo o procedimento do exemplo anterior, podemos escrever

$$y(t) = A\, e^{\alpha\, t}\,\cos\,(\,\beta\, t - \gamma\,)\,, \quad A\,, \gamma \in \mathbb{R}\,.$$

É fácil ver que uma tal solução tende a zero oscilando uma infinidade de vezes. O gráfico da solução é mostrado na figura 4.4 abaixo.

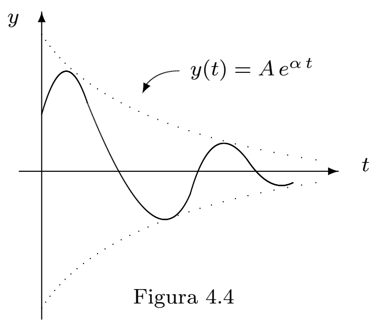


Figura 4.4

Exercício 4.4. *Encontre a solução geral de cada equação abaixo:*

$$\begin{array}{ll} (a)\; y'' - 4\,y = 0 & (b)\; y'' - 4\,y' - 5\,y = 0 \\ (c)\; y'' - 4\,y' = 0 & (d)\; y'' - 2\,y' + 2\,y = 0 \\ (e)\; y'' + 25\,y = 0 & (f)\; y'' + 4\,y' + 13\,y = 0 \\ (g)\; y'' + 25\,y' = 0 & (h)\; y'' - 4\,y' + 4\,y = 0 \end{array}$$

Com as soluções da equação (4.11) encontradas acima:

$$\begin{array}{lll} e^{r_1 t} \quad \text{e} \quad e^{r_2 t}, & & \text{se} \;\; a^2 > 4\,b \\ e^{r\,t} \quad \text{e} \quad t\,e^{r\,t}, & (r = -a/2), & \text{se} \;\; a^2 = 4\,b \\ e^{\alpha\,t} \cos\beta\,t \quad \text{e} \quad t\,e^{\alpha\,t} \mathrm{sen}\,\beta\,t, & & \text{se} \;\; a^2 < 4\,b \end{array}$$

podemos resolver qualquer **problema de valor inicial**

$$\begin{cases} y'' + a\,y' + b\,y = 0 \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = \tilde{y}_0\,. \end{cases} \tag{4.21}$$

Analisaremos apenas o caso $a^2 > 4\,b$: os outros são tratados de modo análogo e ficam como exercício. Procuremos a solução do problema de valor inicial na forma

$$y(t) = ce^{r_1\,t} + ce^{r_2\,t}$$

Impondo as condições iniciais $y(t_0) = y_0$, e $y'(t_0) = \tilde{y}_0$, obtemos o seguinte sistema de 2 equações nas variáveis c, d:

$$\begin{cases} \quad e^{r_1\,t_0} c + \quad e^{r_2\,t_0} d = y_0 \\ r_1\,e^{r_1\,t_0} c + r_2\,e^{r_2\,t_0} c = \tilde{y}_0 \end{cases} \tag{4.22}$$

cuja matriz dos coeficientes

$$\begin{bmatrix} e^{r_1\,t_0} & e^{r_2\,t_0} \\ r_1\,e^{r_1\,t_0} & r_2\,e^{r_2\,t_0} \end{bmatrix}$$

tem determinante $(r_2 - r_1)e^{(r_2+r_1)\,t_0} \neq 0$ (pois $r_2 \neq r_1$). Logo, o sistema (4.22) tem sempre uma única solução (c, d), que fornece a (única) solução procurada $y(t)$ do problema de valor inicial (4.21).

Exemplo 4.8. *Encontrar a solução do problema de valor inicial*

$$y'' - 2\,y' - 3\,y = 0, \quad y(0) = 3 \quad y'(0) = 5$$

A equação característica é $r^2 - 2\,r - 3 = 0$, que tem as raízes $r_1 = 3$ e $r_2 = -1$. Portanto, a solução geral da equação homogênea é

$$y(t) = a\,e^{3\,t} + b\,e^{-t}, \quad a\,,\, b \in \mathbb{R}.$$

As condições iniciais implicam $a + b = 3,\ 3\,a - b = 5$, donde $a = 2$ e $b = 1$. Logo, a solução procurada é

$$y(t) = 2\,e^{3\,t} + e^{-t}\,.$$

Exercício 4.5. *Encontre a solução de cada PVI abaixo:*

$$(a) \begin{cases} y'' - 2\,y' = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} y'' + 4\,y' - 5\,y = 0 \\ y(0) = 3,\ y'(0) = 5 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} y'' - 2\,y' + 2\,y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3 \end{cases} \qquad (d) \begin{cases} y'' - 2\,y' + y = 0 \\ y(0) = 3,\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} y'' + 25\,y = 0 \\ y(0) = 3,\ y'(0) = 3 \end{cases} \qquad (f) \begin{cases} y'' + 4\,y' + 13\,y = 0 \\ y(0) = 3,\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

4.4 Equação não homogênea

Analisaremos agora a equação não homogênea

$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = h(t). \tag{4.23}$$

em que $a(t),\ b(t)$ e $h(t)$ são funções contínuas em um intervalo I. Pelo Corolário 4.2, para encontrar a solução geral da equação (4.23), devemos encontrar a solução geral da equação homogênea associada e uma solução particular de (4.23). Por exemplo, é fácil ver que a função $z(t) = -2$ é uma solução da equação

$$y'' + 3\,y' - 10\,y = 20. \tag{4.24}$$

Como a solução geral da equação homogênea associada é $a\,e^{2\,t} + b\,e^{-5\,t}$, $a\,,b \in \mathbb{R}$, segue-se que a solução geral da equação (4.24) é

$$y(t) = 2 + a\,e^{2\,t} + a\,e^{-5\,t}, \quad a\,,\, b \in \mathbb{R}.$$

Estudaremos, a seguir, dois métodos para encontrar uma solução particular de (4.23): o método dos coeficientes a determinar e o método de variação dos parâmetros. Estaremos especialmente interessados no caso em que os coeficientes a e b são constantes reais.

4.5 Método dos coeficientes a determinar

Consideremos a equação linear não homogênea com coeficientes constantes

$$y'' + a\,y' + b\,y = h(t) \tag{4.25}$$

Quando o termo forçante da equação (4.25) é uma função elementar especial, é fácil encontrar uma solução particular desta equação. Por exemplo, se $h(t)$ é uma função polinomial (respectivamente, exponencial, seno ou cosseno), é natural procurar uma solução de (4.34) na forma de um polinômio (respectivamente, exponencial, combinação linear de seno ou cosseno), como mostram os exemplos a seguir.

Exemplo 4.9. *Encontrar uma solução particular da equação diferencial*

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = 2\,t + 1\,.$$

Procuremos uma solução particular desta equação na forma $y(t) = a\,t{+}b$; então $y'(t) = a$ e $y'' = 0$. Substituindo na equação diferencial, obtemos

$$-3\,a + 2\,(a\,t + b) = 2\,t + 1 \quad \text{ou} \quad 2\,a\,t + 2\,b - 3\,a = 2\,t + 1$$

donde $a = 1$ e $2\,b - 3\,a = 1$, ou $b = 2$. Assim, uma solução particular da equação diferencial não homogênea é $y_p(t) = t + 2$.

Exemplo 4.10. *Encontrar a solução geral da equação diferencial*

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = 20\,e^{-3t}\,.$$

Pelo exemplo 4.9, a solução geral da equação homogênea associada é $y_H(t) = a\,e^t{+}b\,e^{2t}$, $a,\, b \in \mathbb{R}$. Vamos procurar uma solução particular da forma $y(t) = c\,e^{-3t}$. Substituindo na equação diferencial $y(t) = c\,e^{-3t}$, $y'(t) = -3\,c\,e^{-3t}$, $y''(t) = 9\,c\,e^{-3t}$, temos

$$9\,c\,e^{-3t} - 3(-3\,c\,e^{-3t}) + 2\,c\,e^{-3t} = 20\,e^{-3t}$$

donde $c = 1$. Portanto, uma solução particular da equação dada é $y_p(t) = e^{-3t}$. Logo, a solução geral da equação diferencial não homogênea é

$$y(t) = y_H(t) + y_p(t) = a\,e^t + b\,e^{2t} + e^{-3t} \quad a,\, b \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.11. *Encontrar a solução geral da equação diferencial*

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = 10\,\text{sen}\ t\,. \tag{4.26}$$

A solução geral da equação homogênea associada é

$$y_h(t) = c_1\,e^t + c_2\,e^{2t}, \quad c_1\,,\,c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Procuremos uma solução particular da equação não homogênea na forma

$$y_p(t) = c\,\text{sen}\ t + d\ \cos\ t;$$

então $y'(t) = c\ \cos\ t - d\,\text{sen}\ t\,,\ y''(t) = -c\,\text{sen}\ t - d\ \cos\ t$. Substituindo na equação diferencial, temos

$$(-3\,c + d)\ \cos\ t + (c + 3\,d)\,\text{sen}\ t = 10\,\text{sen}\ t\,.$$

donde obtemos $c = 1$ e $d = 3$. Logo, uma solução particular da equação não homogênea é $y_p(t) = 3\ \cos\ t + \text{sen}\ t$.

Vamos agora analisar nosso problema de maneira organizada. Comecemos com o caso polinomial: o caso geral é tratado seguindo-se os passos do exemplo 4.9: consideremos a equação

$$y'' + a\,y' + b\,y = A_0 + A_1\,t + \cdots + A_n\,t^n \tag{4.27}$$

em que $a\,,\ b\,,\ A_0\,,\ A_1\,, \ldots\,,\ A_n \in \mathbb{C}$, com $A_n \neq 0$. Procuremos uma solução particular da equação (4.27) na forma

$$y_p(t) = a_0 + a_1\,t + \cdots + a_n\,t^n \tag{4.28}$$

com os coeficientes $a_0\,,\,a_1\,,\,\ldots,\,a_n$ a serem determinados. Substituindo na equação (4.27): $y_p(t)$ dado por (4.28) e

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= a_1 + 2\,a_2\,t + 3\,a_3\,t^2 + \cdots + n\,a_n\,t^{n-1} \\ y_p''(t) &= 2\,a_2 + 6\,a_3\,t + \cdots + n(n-1)\,a_n\,t^{n-2}\,, \end{aligned}$$

e agrupando os termos semelhantes, temos

$$\begin{aligned} b\,a_0 + a\,a_1 + 2\,a_2 + (b\,a_1 + 2\,a\,a_2 + 6\,a_3)\,t + \cdots + \\ + (b\,a_{n-2} + (n-1)\,a\,a_{n-1} + n\,(n-1)\,a_n)\,t^{n-2} + \\ + (b\,a_{n-1} + n\,a\,a_n)\,t^{n-1} + b\,a_n\,t^n = \\ = A_0 + A_1\,t + \cdots + A_n\,t^n \end{aligned} \tag{4.29}$$

Logo, os coeficientes $a_0\,,\ a_1\,,\ \ldots,\ a_n$ satisfazem

$$\begin{aligned} b\,a_n &= A_n \\ b\,a_{n-1} + n\,a\,a_n &= A_{n-1} \\ b\,a_{n-2} + (n-1)\,a\,a_{n-1} + n\,(n-1)\,a_n &= A_{n-2} \\ &\vdots \\ b\,a_1 + 2\,a\,a_2 + 6\,a_3 &= A_1 \\ b\,a_0 + a\,a_1 + 2\,a_2 &= A_0 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Se $b \neq 0$, da primeira equação de (4.30), temos $a_n = A_n/b$; então, substituindo a_n na segunda equação de (4.30), obtemos $a_{n-1} = (b\,A_{n-1} - n\,a\,b\,A_n)/b^2$; continuando deste modo, obtemos os demais coeficientes.

Se $b = 0$, não podemos resolver o sistema (4.30). Notemos que, neste caso, a equação (4.27) torna-se

$$y'' + a\,y' = A_0 + A_1\,t + \cdots + A_n\,t^n\ ; \tag{4.31}$$

assim, se $y_p(t)$ é um polinômio de grau n, então $y_p'' + a\,y_p'$ é um polinômio de grau menor do que n e, portanto, $y_p(t)$ não pode ser solução de (4.31). Este problema é facilmente resolvido: se $b = 0$ e $a \neq 0$, multiplicamos por t a função em (4.28), isto é, procuramos uma solução particular de (4.31) na forma

$$y_p(t) = a_0\,t + a_1\,t^2 + \cdots + a_n\,t^{n+1}\ \ : \tag{4.32}$$

agora, $y_p'' + a\,y_p'$ é um polinômio de mesmo grau que o polinômio do segundo membro e o sistema correspondente a (4.30) pode ser resolvido fornecendo os coeficientes $a_0\,,\ a_1\,,\ \ldots\,,\ a_n\,.$

Finalmente, se $a = b = 0$, então a equação (4.27) fica

$$y'' = A_0 + A_1\,t + \cdots + A_n\,t^n$$

e é claro que ela tem uma solução particular da forma

$$y_p(t) = a_0\,t^2 + a_1\,t^3 + \cdots + a_n\,t^{n+2}\,. \tag{4.33}$$

Exemplo 4.12. *Encontrar a solução geral da equação diferencial*

$$y'' - 3\,y' = 18\,t^2 - 6\,t - 8\,.$$

A equação característica é $r\,(r-3) = 0\,,$ que tem as raízes $r_1 = 0$ e $r_2 = 3$. Assim, a solução geral da equação homogênea é $y_H(t) = c_1 + c_2\, e^{3\,t}$, $c_1\,, c_2\, \in \mathbb{R}$. Vamos procurar uma solução particular na forma $y_p(t) = a\,t + b\,t^2 + c\,t^3$. Substituindo na equação diferencial $y_p(t)$, $y_p'(t) = a + 2\,b\,t + 3\,c\,t^2$ e $y_p''(t) = 2\,b + 6\,c\,t$, temos

$$2\,b + 6\,c\,t - 3\,(a + 2\,b\,t + 3\,c\,t^2) = 18\,t^2 - 6\,t - 8\,,$$

donde obtemos $c = -2$, $b = -1$ e $a = 2$. Assim, uma solução particular da equação não homogênea é $y_p(t) = -2\,t^3 - t^2 + 2\,t$ e sua solução geral é

$$y(t) = c_1 + c_2\, e^{3\,t} - 2\,t^3 - t^2 + 2\,t, \quad c_1\,, c_2\, \in \mathbb{R}.$$

Consideremos agora a equação mais geral

$$y'' + a\,y' + b\,y = \sum_{j=0}^{k} t^j e^{\alpha_j\, t}\big(\, A_j\, \cos\, \beta_j\, t + B_j\, \mathrm{sen}\; \beta_j\, t\,\big)\,, \tag{4.34}$$

em que $a\,,\, b\,,\, A_j\,,\, B_j\,,\, \alpha_j\,,\, \beta_j\,,\;\; j = 0, \ldots, k,$ são constantes reais. Pelo princípio de superposição (Teorema 4.2, página 98) é suficiente apresentar o método para a equação

$$y'' + a\,y' + b\,y = t^n\, e^{\alpha\, t}\, \cos\, \beta\, t\,. \tag{4.35}$$

(o estudo do caso em que o termo forçante é $t^m\, e^{\alpha\, t}\, \mathrm{sen}\; \gamma\, t$ é análogo).

Como $t^n\, e^{\alpha\, t}\, \cos\, \beta\, t$ é a parte real da função $t^n\, e^{(\alpha + i\,\beta)\, t}$, vamos procurar uma solução particular da equação

$$z'' + a\,z' + b\,z = t^n\, e^{(\alpha + i\,\beta)\, t}\,, \tag{4.36}$$

Pelo Teorema 4.3, página 104, a parte real de $z_p(t)$ é uma solução de (4.35). Vamos procurar uma solução particular de (4.36) na forma

$$z(t) = e^{\gamma\, t}\, v(t)$$

(estamos escrevendo $\gamma = \alpha + i\,\beta$ para simplificar a notação). Substituindo na equação diferencial

$$\begin{aligned} z'(t) &= e^{\gamma\, t}\left[v'(t) + \gamma\, v(t)\,\right] \\ z''(t) &= e^{\gamma\, t}\left[v''(t) + 2\,\gamma\, v'(t) + \gamma^2\, v(t)\right]. \end{aligned}$$

e cancelando o fator comum $e^{\gamma\, t}$ obtemos a equação

$$v''(t) + (2\,\gamma + a)\, v'(t) + (\gamma^2 + a\,\gamma + b\,)\, v(t) = t^n \tag{4.37}$$

Logo, a mudança de variável $z(t) = e^{\gamma\, t}\, v(t)$ transforma a equação (4.36) em uma outra com termo forçante polinomial, estudada acima.

Observação 4.1. *Se $\gamma^2 + a\,\gamma + b \neq 0$, então existe uma solução da equação (4.37) que é um polinômio de grau n e, portanto, a equação diferencial (4.36) tem uma solução na forma $p(t)\, e^{\gamma\, t}$, em que $p(t)$ é polinômio de grau n. Logo, existe uma solução da equação (4.35) na forma $p(t)\, e^{\alpha\, t} \cos \beta\, t$. Lembremos que a equação característica da equação homogênea associada a (4.35) é $\lambda^2 + a\,\lambda + b = 0$. Assim, a condição*

$$\gamma^2 + a\,\gamma + b \neq 0 \tag{4.38}$$

significa que $e^{\gamma\, t}$ não é solução da equação homogênea associada a (4.35).

A condição $\gamma^2 + a\,\gamma + b = 0$ e $2\,\gamma + a \neq 0$ significa que $e^{\gamma\, t}$ é solução da equação homogênea associada a (4.25), mas $t\, e^{\gamma\, t}$ não é solução dessa equação.

Se $\gamma^2 + a\,\gamma + b = 0$ e $2\,\gamma + a = 0$, então $te^{\gamma t}$ e $t\, e^{\gamma\, t}$ são soluções da equação homogênea associada a (4.25).

Exemplo 4.13. *Encontrar a solução geral da equação linear*

$$y'' - 3\, y' + 2\, y = 5\, e^{2t}\,. \tag{4.39}$$

A solução geral da equação homogênea associada é $y_h(t) = c_1\, e^t + c_2\, e^{2t}$, $c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}$. Procuremos uma solução de (4.39) na forma $y(t) = e^{2\,t}\, v(t)$, temos $y'(t) = e^{2t}\,(v' + 2\, v)\,,\ y''(t) = e^{2t}\,(v'' + 4\, v' + 4\, v)$. Substituindo estas funções na equação (4.39) e cancelando o fator comum e^{2t}, obtemos

$$v'' + v' = 5\,.$$

Procuramos uma solução particular desta equação diferencial na forma $v_p(t) = a\,t$; substituindo na equação diferencial, obtemos $a = 5$. Logo, uma solução particular é $y_p(t) = 5\,t\,e^{2t}$ e a solução geral de (4.39) é

$$y(t) = c_1\,e^t + c_2\,e^{2t} + 5\,t\,e^{2t}, \quad c_1\,,\,c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.14. *Encontrar a solução geral da equação linear não homogênea*

$$y'' - 4\,y' + 4\,y = 16\,e^{2t}\,. \tag{4.40}$$

Fazendo $y(t) = e^{2\,t}\,v(t)$, temos $y'(t) = e^{2t}\,(v' + 2\,v)\,,\ y''(t) = e^{2t}\,(v'' + 4\,v' + 4\,v)$. Substituindo estas funções na equação (4.40) e cancelando o fator comum e^{2t}, obtemos

$$v'' = 16\,.$$

Integrando duas vezes, obtemos $v(t) = c_1 + c_2\,t + 8\,t^2,\ c_1\,,\,c_2 \in \mathbb{R}$. Logo, a solução geral de (4.39) é

$$y(t) = (c_1 + c_2\,t + 8\,t^2)\,e^{2t}, \quad c_1\,,\,c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.15. *Encontrar uma solução particular da equação linear não homogênea*

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = (6\,t^2 - 4)\,e^{2t}\,. \tag{4.41}$$

Substituindo $y(t) = e^{2\,t}\,v(t)$ na equação (4.15) e cancelando o fator comum e^{2t}, obtemos

$$v'' + v' = 6\,t^2 - 4.$$

Procuramos uma solução desta equação na forma $v(t) = a\,t^3 + b\,t^3 + c\,t$. Substituindo na equação (4.41), obtemos $a = 2,\ b = -6$ e $c = 8$. Logo, uma solução particular da equação dada é $y_p(t) = e^{2\,t}\,(2\,t^3 - 6\,t^3 + 8\,t)$.

Exemplo 4.16. *Encontrar a solução geral da equação diferencial*

$$y'' + 4\,y = 8\,\cos\,2\,t\,.$$

A equação característica é $r^2+4=0$, que tem as raízes $\pm 2\,i$; portanto solução geral da equação homogênea associada é

$$y_H(t)=c_1\,\cos\,2\,t+c_2\,\mathrm{sen}\;2\,t,\quad c_1\,,\,c_2\in\mathbb{R}.$$

Consideremos a equação

$$z''+4\,z=8\,e^{2\,i\,t} \tag{4.42}$$

e tomar a parte real da sua solução. Façamos $z(t)=e^{2\,i\,t}\,v(t)$; então $z'(t)=e^{2\,i\,t}\,(v'(t)+2\,i\,v(t))$ e $z''(t)=e^{2\,i\,t}\,(v''(t)+4\,i\,v'(t)-4\,v(t))$. Substituindo na equação (4.42) e cancelando o fator comum $e^{2\,i\,t}$, obtemos a equação com termo forçante polinomial

$$v''+4\,i\,v'=8\,,$$

que tem uma solução da forma $v(t)=\alpha\,t$. Substituindo nesta equação, temos $\alpha=-2\,i$, que dá a solução

$$z(t)=-2\,i\,t\,e^{2\,i\,t}=2\,t\,\mathrm{sen}\;2\,t-2\,i\,\cos\,2\,t.$$

Logo, a função $y(t)=2\,t\,\mathrm{sen}\;2\,t$, que é a parte real de $z(t)$, é uma solução particular da equação original e a solução geral desta equação é

$$y(t)=c_1\,\cos\,2\,t+c_2\,\mathrm{sen}\;2\,t+2\,t\,\mathrm{sen}\;2\,t,\quad c_1\,,\,c_2\in\mathbb{R}.$$

Exemplo 4.17. *Encontrar uma solução particular para a equação*

$$y''-4\,y'+5\,y=(4+4\,t)\,e^{2\,t}\,\cos\,t\,. \tag{4.43}$$

Como o termo forçante é a parte real da função $(4{+}4\,t)\,e^{(2+i)\,t}$, vamos considerar a equação

$$z''-4\,z'+5\,z=(4+4\,t)\,e^{(2+i)\,t} \tag{4.44}$$

Denotemos $\gamma=2+i$. Procuremos $z(t)$ na forma $z(t)=e^{\gamma\,t}\,w(t)$; então $z'(t)=e^{\gamma\,t}\,(w'+\gamma\,w)$ e $z''(t)=e^{\gamma\,t}\,(w''+2\,\gamma\,w'+\gamma^2\,w)$ Substituindo na equação, cancelando o fator comum $e^{\gamma\,t}$ e substituindo $\gamma=2+i$, obtemos a equação

$$w''-2\,i\,w'=4+4\,t$$

Esta equação tem uma solução na forma $w(t) = a\,t + b\,t^2$; substituindo na equação $w'(t) = a + 2\,b\,t$ e $w'' = 2\,b$, vemos que a e b devem satisfazer

$$2\,b + 2\,i\,(a + 2\,b\,t) = 4 + 4\,t \ :$$

assim, $a = 1 - 2\,i$ e $b = -i$ e temos $w(t) = (1 - 2\,i)\,t - i\,t^2 = t - i\,(2\,t + t^2)$.

Portanto uma solução particular de (4.44) é

$$\begin{aligned} z(t) &= (t - i\,(2\,t + t^2))\,e^{(2+i)\,t} = e^{2\,t}\,(t - i\,(2\,t + t^2))\,(\cos\,t + i\,\mathrm{sen}\,t) = \\ &= e^{2\,t}\left[\,t\cos\,t + (2\,t + t^2)\mathrm{sen}\,t + i\,\big(t\,\mathrm{sen}\,t - (2\,t + t^2)\cos\,t\big)\right] \end{aligned}$$

Logo, uma solução particular para a equação (4.43) é

$$y(t) = e^{2\,t}\,t\cos\,t + (2\,t + t^2)\,\mathrm{sen}\,t\,.$$

Exemplo 4.18. *Encontrar a solução geral da equação*

$$y'' - 6\,y'' + 9\,y = t\,e^{3\,t}\,\mathrm{sen}\,t.$$

Chamando $y(t) = e^{3\,t}\,z(t)$, temos $y'(t) = 3\,e^{3\,t}\,z(t) + e^{3\,t}\,z'(t)$ e $y''(t) = 9\,e^{3\,t}\,z(t) + 6\,e^{3\,t}\,z'(t) + e^{3\,t}\,z''(t)$. Substituindo estas expressões na equação diferencial, obtemos

$$z''(t) = t\,\mathrm{sen}\,t\,.$$

Integrando duas vezes, temos $z(t) = a + b\,t - t\,\mathrm{sen}\,t - 2\,\cos\,t,\ a, b \in \mathbb{R}$. Logo, a solução geral $y(t)$ da equação original é

$$y(t) = (a + b\,t)\,e^{3\,t} - e^{3\,t}(\,t\,\mathrm{sen}\,t + 2\,\cos\,t)\,, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.19. *Encontrar uma solução particular da equação*

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = 8 + 20\,\mathrm{sen}\,t + 18\,t^2\,e^{2\,t}\,. \tag{4.45}$$

Pelo princípio de superposição, uma solução particular $y_p(t)$ da equação (4.45) é dada por $y_p(t) = y_1 + 2\,y_2(t) + y_3(t)$, em que $y_1(t)$ é uma solução da equação

$$y'' - 3\,y'' + 2\,y = 8$$

(é fácil ver que $y_1(t) = 4$ é uma solução desta equação), $y_2(t)$ é uma solução da equação (4.26) (portanto, $y_2(t) = 3\,\cos\,t + \mathrm{sen}\,t$) e $y_3(t)$ é uma solução

$$y'' - 3\,y'' + 2\,y = 18\,t^2\,e^{2\,t}\,. \tag{4.46}$$

Substituindo em (4.46) $y(t) = e^{2\,t}\,v(t)$, $y'(t) = e^{2\,t}\,[v'(t) + 2\,v(t)]$ e $y''(t) = e^{2\,t}\,[v''(t) + 4\,v'(t) + 4\,v(t)]$ e cancelando o fator comum $e^{2\,t}$, obtemos a equação

$$v'' + v' = 18\,t^2. \tag{4.47}$$

Como o coeficiente de v na equação (4.47) é nulo, procuramos uma solução particular de (4.47) na forma $v(t) = a\,t + b\,t^2 + c\,t^3$; substituindo em (4.47) $v(t)$, $v'(t) = a + 2\,b\,t + 3\,c\,t^2$ e $v''(t) = 2\,b + 6\,c\,t$, temos

$$a + 2\,b + (2\,b + 6\,c)\,t + 3\,c\,t^2 = 18\,t^2$$

donde $a = 36,\ b = -18,\ c = 6$ e portanto, $y_2(t) = (36 - 18\,t + 6\,t^2)\,e^{2t}$. Logo, uma solução particular de (4.46) é

$$y_p(t) = 4 + 6\,\cos\,t + 2\,\text{sen}\,t + (36 - 18\,t + 6\,t^2)\,e^{2t}\,.$$

Exemplo 4.20. (Oscilações forçadas não amortecidas)
Consideremos novamente o sistema massa-mola (veja a seção 2.1 e os exemplos 4.6 e 4.7, página 105). Suponhamos que seja nulo o atrito e que a resultante das forças externas atuando sobre a massa seja $B\cos\gamma\,t$ ($\gamma > 0$ é uma constante). Então, a equação (2.3) fica

$$y'' + \omega^2\,y = B\cos\gamma\,t \tag{4.48}$$

A solução geral da equação homogênea associada é $y(t) = a\,\cos\,\omega\,t + b\,\text{sen}\,\omega\,t$. Procuremos uma solução particular da equação (4.48) na forma $y_p(t) = c\,\cos\,\gamma\,t + d\,\text{sen}\,\gamma\,t$. Substituindo esta função na equação, temos

$$c\,(\omega^2 - \gamma^2)\,\cos\,\gamma\,t + d\,(\omega^2 - \gamma^2)\,\text{sen}\,\gamma\,t = B\,\cos\gamma\,t\,.$$

Se $\gamma \neq \omega$, obtemos

$$c = \frac{B}{\omega^2 - \gamma^2}\,, \qquad d = 0$$

e uma solução particular é

$$y_p(t) = \frac{B}{\omega^2 - \gamma^2}\,\cos\gamma\,t. \tag{4.49}$$

Logo, a solução geral de (4.48) é

$$y(t) = a\,\cos\,\omega\,t + b\,\text{sen}\,\omega\,t + \frac{B}{\omega^2 - \gamma^2}\,\cos\gamma\,t\,.$$

É claro que a solução particular obtida em (4.49) é periódica de período $2\pi/\gamma$ e amplitude $B/(\omega^2 - \gamma^2)$. Notemos que, quando γ se aproxima de ω, a amplitude desta solução vai se tornando cada vez maior: isso indica um fenômeno de ressonância. De fato, mostremos que, para $\gamma = \omega$, as soluções da equação (4.48) não permanecem limitadas quando $t \to \infty$. Para $\gamma = \omega$, a equação (4.48) fica

$$y'' + \omega^2 y = B \cos \omega t \tag{4.50}$$

Como $i\omega$ é raiz da equação característica de (4.50), vamos procurar uma solução particular de (4.50) na forma

$$y_p(t) = t\,(c\, \cos\omega t + d\, \mathrm{sen}\,\omega t).$$

Substituindo na equação diferencial, obtemos

$$2\, d\omega\, \cos\omega t - 2\, c\omega\, \mathrm{sen}\,\omega t = B\, \cos\omega t$$

donde obtemos $c = 0$, $d = A/(2\omega)$. Assim, uma solução particular é

$$y_p(t) = \frac{B}{2\,\omega}\; t\, \mathrm{sen}\,\omega t\,,$$

que não é uma função limitada, quando $t \to \infty$.

Exercício 4.6. (Oscilações forçadas amortecidas). *Analise o movimento de um sistema massa mola forçado e amortecido*

$$y'' + b\, y' + \omega^2 y = A\, \cos\gamma t + B\, \mathrm{sen}\,\gamma t\,,$$

em que a, b, A, B e γ são constantes dadas.

As considerações acima aplicam-se igualmente ao movimento de um pêndulo simples, como na figura 4.5 abaixo. Suponhamos que o pêndulo esteja em um meio que oferece uma resistência ao movimento dada por $b\,\theta'$ e que sujeito a uma força externa F. O movimento é descrito pela equação

$$\theta'' + b\,\theta' + \frac{g}{l}\, \mathrm{sen}\,\theta = F(t)\,, \tag{4.51}$$

em que l é o comprimento do pêndulo e g é a aceleração da gravidade. A equação (4.51) é não linear. Não é possível expressar sua solução em termos de funções elementares. Um procedimento adotado é fazer a *aproximação* $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ e considerar a equação linear

$$\theta'' + b\,\theta' + \frac{g}{l}\,\theta = F(t)\,. \tag{4.52}$$

Em alguns problemas das aplicações, como no próximo exemplo, em vez de condições iniciais, as condições naturais associadas a uma equação diferencial são as chamadas *condições de fronteira*.

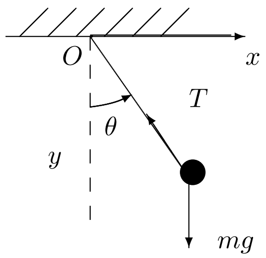


Figura 4.5

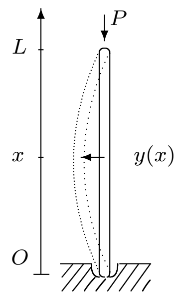


Figura 4.6

Exemplo 4.21. (flambagem de coluna) *Consideremos uma coluna de comprimento L, como na figura 4.6 acima articulada nas duas extremidades, sujeita a uma carga P. A deflexão lateral $y(x)$ observada na viga satisfaz a equação diferencial*

$$y'' + \alpha^2\,y = 0, \qquad 0 < x < L \tag{4.53}$$

e as condições de fronteira $y(0) = y(L) = 0$. Na equação (4.53), $\alpha^2 = P/EI$ em que E e I são constantes que dependem do material e da forma da seção da coluna. A solução geral da equação (4.53) é

$$y(x) = a\,\cos\,\alpha\,x + b\operatorname{sen}\,\alpha\,x$$

A condição de fronteira $y(0) = 0$ implica $a = 0$. Portanto $y(x) = b\operatorname{sen}\,\alpha\,x$. Da condição $y(L) = 0$ temos que o problema tem solução não nula apenas quando $\alpha = n\,\pi/L$, $n = 1, 2, \ldots$, ou seja, $P = n^2\,\pi^2\,EI/L^2$, $n = 1, 2, \ldots$. O primeiro destes valores de P é $P^* = \pi^2\,EI/L^2$ chama-se carga crítica de flambagem. *Quando $P < P^*$, a única solução deste* *problema é a trivial $y(x) = 0$, $\forall x$. Para $P = P^*$, surgem soluções não triviais $y(x) = b\,\text{sen}\,(\pi\, x/L)$ e a coluna curva-se assumindo a forma da linha pontilhada.*

Exercício 4.7. *Encontre a solução geral de cada uma das equações diferenciais abaixo:*

(a) $y'' + 3\,y' = 20\,e^{2t}$	(b) $y'' + 2\,y' + y = -2$
(c) $y'' + 3\,y' = 9$	(d) $y'' + 4\,y' - 5\,y = 13\,\text{sen}\ t$
(e) $y'' + 25\,y = 32\ \cos\ 3t$	(f) $y'' + y = 2\ \cos\ t + 4\,\text{sen}\ t$
(g) $y'' - 7\,y' = 21\,e^{7\,t}$	(h) $y'' + 3\,y' = 18\ \cos\ 3\,t$
(i) $y'' - y' = 6\,(t-1)^2$	(j) $y'' - 8\,y' + 16\,y = (12 - 6\,t)\,e^{4\,t}$
(k) $y'' + 25\,y = 20\,\text{sen}\ 5\,t$	(l) $y'' - 2\,y' + 2\,y = 6\,e^{t}\,(\text{sen}\ \ t - \cos\ t)$

Exercício 4.8. *Resolva os seguintes problemas de valor inicial:*

$(a)\ \begin{cases} y'' + 3\,y' = 9 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$ $\qquad (b)\ \begin{cases} y'' + 3\,y' = 20\,e^{t} \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$

$(c)\ \begin{cases} y'' - y' = (1-t)^2 \\ y(1) = 5, \quad y'(1) = 2 \end{cases}$ $\qquad (d)\ \begin{cases} y'' - 7\,y' = 21\,e^{7t} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = -4 \end{cases}$

$(e)\ \begin{cases} y'' - 4\,y' + 13\,y = 0 \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = -4 \end{cases}$ $\qquad (f)\ \begin{cases} y'' + 2\,y' - 8\,y = 12\,e^{-4\,t} \\ y(0) = 5, \quad y'(0) = -4 \end{cases}$

$(g)\ \begin{cases} y'' + 2\,y' - 8\,y = (10 - 12\,t)\,e^{2\,t} \\ y(0) = -6, \quad y'(0) = -4 \end{cases}$ $\qquad (h)\ \begin{cases} y'' + 2y' + y = 12\,t\,e^{t} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$

$(i)\ \begin{cases} y'' - 6\,y' + 9\,y = 6\,(1-t)\,e^{3t} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$ $\qquad (j)\ \begin{cases} y'' - 4\,y' + 4\,y = 6\,e^{t}\ \cos\ t \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 6 \end{cases}$

$(k)\ \begin{cases} y'' - 8\,y' + 16\,y = (12 - 6\,t)\,e^{4\,t} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$ $\qquad (l)\ \begin{cases} y'' + 25\,y = 10\ \cos\ 5t \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = 10\,. \end{cases}$

4.6 Método de variação dos parâmetros

Sejam $y_1(t)$, $y_2(t)$ duas soluções linearmente independentes (isto é, nenhuma destas funções é múltipla constante da outra) da equação linear homogênea de segunda ordem

$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = 0\,. \tag{4.54}$$

Quaisquer que sejam as constantes c_1 e c_2, a função $z(t) = c_1\, y_1(t) + c_2\, y_2(t)$ é solução de (4.54). Vamos procurar funções $u_1(t)$, $u_2(t)$ de modo que a função

$$y_p(t) = u_1(t)\, y_1(t) + u_2(t)\, y_2(t) \tag{4.55}$$

seja solução da equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea

$$y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = h(t). \tag{4.56}$$

Derivando (4.55), temos

$$y_p'(t) = u_1'(t)\, y_1(t) + u_2'(t)\, y_2(t) + u_1(t)\, y_1'(t) + u_2(t)\, y_2'(t)\,.$$

Para evitar que a expressão da derivada de segunda ordem $y_p''(t)$ fique excessivamente grande, vamos supor que as funções $u_1(t), u_2(t)$ (que estamos procurando) satisfazem a igualdade

$$u_1'(t)\, y_1(t) + u_2'(t)\, y_2(t) = 0. \tag{4.57}$$

Então $y'(t)$ fica

$$y_p'(t) = u_1(t)\, y_1'(t) + u_2(t)\, y_2'(t). \tag{4.58}$$

Derivando (4.58), obtemos

$$y_p''(t) = u_1'(t)\, y_1'(t) + u_1(t)\, y_1''(t) + u_2'(t)\, y_2'(t) + u_2(t)\, y_2''(t). \tag{4.59}$$

Substituindo (4.58) e (4.59) na equação (4.56), obtemos

$$u_1\big(y_1'' + a\, y_1' + b\, y_1\big) + u_2\,\big(y_2'' + a\, y_2' + b\, y_2\big) + u_1'\, y_1' + u_2'\, y_2' = h(t)\,.$$

Como $y_1'' + a\, y_1' + b\, y_1 = 0$ e $y_2'' + a\, y_2' + b\, y_2 = 0$, esta relação fica

$$u_1'\, y_1' + u_2'\, y_2' = h(t)\,.$$

Logo, as funções procuradas $u_1\,, u_2$ devem satisfazer

$$\begin{cases} u_1'\, y_1 + u_2'\, y_2 = 0 \\ u_1'\, y_1' + u_2'\, y_2' = h(t)\,. \end{cases}$$

ou, em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ h(t) \end{bmatrix}$$

Resolvendo este sistema obtemos u_1', u_2'. Integrando estas funções, obtemos u_1, u_2 e portanto a solução $y_p(t)$.

Exemplo 4.22. *Encontrar a solução geral da equação diferencial*

$$y'' - 4\,y' + 4\,y = \frac{2\,e^{2\,t}}{t^3}\,. \tag{4.60}$$

A solução geral da equação homogênea associada é $y_h(t) = e^{2\,t}(a + b\,t)$, $a\,,\,b \in \mathbb{R}$. Procuraremos uma solução particular da equação (4.60) na forma $y_p(t) = u(t)\,e^{2\,t} + v(t)\,t\,e^{2\,t}$. De acordo com a teoria vista acima, as funções u e v devem satisfazer

$$\begin{cases} u'(t)\,e^{2\,t} + v'(t)\,t\,e^{2\,t} = 0 \\ 2\,u'(t)e^{2\,t} + v'(t)(1 + 2\,t)\,e^{2\,t} = \dfrac{2\,e^{2\,t}}{t^3}\,. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtemos $u'(t) = -2/t^2$ e $v'(t) = 2/t^3$. Integrando, temos $u(t) = 2/t$ e $v(t) = -1/t^2$. Portanto, uma solução particular da equação não homogênea é

$$y_p(t) = 2\,\frac{e^{2\,t}}{t} - \frac{e^{2\,t}}{t} = \frac{e^{2\,t}}{t}$$

e a sua solução geral é

$$y(t) = e^{2\,t}\Big(a + b\,t + \frac{1}{t}\Big), \qquad a\,,\,b \in \mathbb{R}\,.$$

Exemplo 4.23. *Encontrar a solução geral da equação diferencial*

$$y'' + y = \text{tg}\ t, \qquad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\ . \tag{4.61}$$

As funções $y_1(t) = \cos\,t$ e $y_2(t) = \text{sen}\ t$ são soluções linearmente independentes da equação homogênea associada. Procuraremos uma solução particular da equação (4.60) na forma

$$y_p(t) = u_1 \cos\,t + u_2\,\text{sen}\ t\,.$$

Então, as funções u_1 e u_2 devem satisfazer

$$\begin{cases} \;\;u_1' \cos\,t + u_2'\,\text{sen}\ t = 0 \\ -u_1'\text{sen}\ t + u_2'\,\cos\,t = \text{tg}\ t\,. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtemos

$$u_1'(t) = \cos t - \sec t \quad \text{e} \quad u_2'(t) = \text{sen } t\,.$$

Integrando estas funções, obtemos:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \text{sen } t - \ln|\sec t + \text{tg } t| \\ u_2(t) &= -\cos t\,. \end{aligned}$$

Logo, a solução geral da equação (4.60) é

$$y(t) = a\cos t + b\,\text{sen } t - (\cos t)\ln|\sec t + \text{tg } t|, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Exercício 4.9. *(I) Usando o método de variação dos parâmetros, encontre uma solução particular para cada uma das equações diferenciais:*

$$\begin{array}{ll} (a)\ y'' + y = \sec t & (b)\ y'' + y = \sec^2 t \\ (c)\ y'' + y = \text{tg}^2 t & (d)\ y'' + y = e^t; \\ (e)\ y'' - y = 2\,t & (f)\ y'' + y = t \\ (g)\ y'' - 3\,y' = 6\,t - 9 & (h)\ y'' - y = 4\,t\,e^t \\ (i)\ y'' + 4y = 6\,\text{sen } t & (j)\ y'' + y = 2\,\text{sen}\,t \end{array}$$

(II) Para cada uma das equações em (I), encontre a solução tal que $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

4.7 Equações de ordem superior

Os métodos discutidos nas seções anteriores para equações de segunda ordem aplicam-se, com adaptações convenientes, a equações de ordem $n \geq 2$

$$y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1\,y' + a_0\,y = h(t). \tag{4.62}$$

A equação característica da equação homogênea associada a (4.62) é

$$\lambda^n + a_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\,\lambda + a_0 = 0. \tag{4.63}$$

Cada raiz λ da equação característica (4.63) fornece uma solução $e^{\lambda t}$ da equação diferencial (4.62). A única dificuldade adicional em relação às equações de segunda ordem é a de encontrar as soluções da equação (4.63).

Exemplo 4.24. *Encontrar a solução geral da equação linear homogênea de quarta ordem*

$$y^{(4)} - 3\,y^{(3)} - 6\,y'' + 28\,y' - 24\,y = 0\,. \tag{4.64}$$

A equação característica é $p(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 - 6\lambda^2 + 28\lambda - 24 = 0$. Os divisores de 24: ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 8, ± 12 e ± 24 são candidatos a raízes de $p(\lambda)$. Como $p(2) = 0$ temos que $\lambda - 2$ é um fator do polinômio $p(\lambda)$. Dividindo $p(\lambda)$ por $\lambda - 2$, temos

$$\lambda^4 - 3\,\lambda^3 - 6\,\lambda^2 + 28\,\lambda - 24 = (\lambda - 2)(\lambda^3 - \lambda^2 - 8\,\lambda + 12).$$

Agora analisamos a equação $q(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 8\,\lambda + 12$. Os divisores de 12, ou seja, $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6$ e ± 12, são candidatos a raízes de $q(\lambda)$. Como $q(2) = 0$ temos que $\lambda - 2$ é um fator do polinômio $q(\lambda)$. Dividindo $q(\lambda)$ por $\lambda - 2$, temos $\lambda^3 - \lambda^2 - 8\,\lambda + 12 = (\lambda^2 + \lambda - 6)(\lambda - 2)$. As raízes da equação $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ são -3 e 2. Portanto

$$\lambda^4 - 3\,\lambda^3 - 6\,\lambda^2 + 28\,\lambda - 24 = (\lambda - 2)^3\,(\lambda + 3)\,.$$

Como 2 é raiz da equação característica com multiplicidade 3, as funções e^{2t}, $t\,e^{2t}$ e $t^2\,e^{2t}$ são soluções linearmente independentes da equação diferencial; a outra raiz, -3, dá origem à solução e^{-3t}. Logo, a solução geral da equação (4.64) é

$$y(t) = (a + b\,t + c\,t^2)\,e^{2t} + d\,e^{-3t}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.25. *Encontrar a solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y^{(3)} - 7\,y' + 6\,y = 6\,t^2 + 22\,t + 10\,e^{2t} \\ y(0) = -3,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 3 \end{cases} \tag{4.65}$$

Analisemos primeiramente a equação homogênea $y^{(3)} - 7\,y' + 6\,y = 0$. A equação característica é $\lambda^3 - 7\,\lambda + 6 = 0$, cujas raízes são $-3, 1$ e 2. Logo, e^{-3t}, e^t e e^{2t} são soluções LI da equação homogênea e a solução geral desta equação é

$$y_h(t) = \alpha\,e^{-3t} + \beta\,e^t + \gamma\,e^{2t}, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Para simplificar os cálculos, vamos separar o termo forçante em duas parcelas. Analisemos a equação não homogênea

$$y^{(3)} - 7\,y' + 6\,y = 6t^2 + 22t.$$

Como a equação homogênea associada não tem soluções constantes não nulas, procuramos uma solução particular da equação (4.65) na forma $y_1(t) = a + b\,t + c\,t^2$. Substituindo na equação diferencial, temos

$$(6c - 6)\,t^2 + (6b - 14c - 22)\,t + 6a - 7b = 0,$$

donde obtemos $a = 7,\ b = 6,\ c = 1$. Assim, uma solução particular é

$$y_1(t) = 7 + 6\,t + t^2.$$

Analisemos agora a equação não homogênea

$$y^{(3)} - 7\,y' + 6\,y = 10\,e^{2t}.$$

Como a função e^{2t} é solução da equação homogênea associada, vamos procurar uma solução particular da equação (4.65) na forma

$$y_2(t) = a\,t\,e^{2t}\,.$$

Substituindo $y_2'(t) = a\,e^{2t}\,(1 + 2t),\ y_2''(t) = 4\,a\,e^{2t}\,(1 + t),\ y_2^{(3)}(t) = 4\,a\,e^{2t}\,(3 + 2t)$ na equação diferencial, temos

$$(12\,a + 8\,a\,t - 7\,a - 14\,a\,t + 6\,a\,t)\,e^{2t} = 10\,e^{2t}\,,$$

donde obtemos $a = 2$. Assim, uma solução particular é $y_2(t) = 2\,t\,e^{2t}$. Logo, a solução geral da equação (4.65) é

$$y(t) = \alpha\,e^{-3t} + \beta\,e^{t} + (\gamma + 2\,t)\,e^{2t} + 7 + 6\,t + t^2, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Impondo as condições iniciais $y(0) = -3,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 3$, obtemos as equações

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -10 \\ -3\,\alpha + \beta + 2\,\gamma = -9 \\ 9\,\alpha + \beta + 4\,\gamma = -7 \end{cases}$$

cuja solução é $\alpha = 0,\ \beta = -11,\ \gamma = 1$. Logo, a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = -11\,e^{t} + (1 + 2\,t)\,e^{2t} + 7 + 6\,t + t^2\,.$$

Exemplo 4.26. *Encontrar a solução geral da equação linear não homogênea de quarta ordem*

$$y^{(4)} - 3\,y^{(3)} - 6\,y'' + 28\,y' - 24\,y = 1500\,t^2\,e^{2t}\,. \tag{4.66}$$

Fazendo $y(t) = e^{2t}\,v(t)$, temos $y' = e^{2t}\,(v' + 2\,v)\,,\ y'' = e^{2t}\,(v'' + 4\,e^{2t}\,v' + 4\,v)\,,\ y^{(3)} = e^{2t}\,(v^{(3)} + 6\,v'' + 12\,v' + 8\,v(t))\,,\ y^{(4)} = e^{2t}\,(v^{(4)} + 8\,v^{(3)} + 24\,v'' + 32\,v' + 16\,v)$. Substituindo estas expressões em (4.66) e cancelando o fator comum e^{2t}, obtemos a equação diferencial

$$v^{(4)} + 5\,v^{(3)} = 1500\,t^2\ . \tag{4.67}$$

Como as funções 1, t e t^2 são soluções da equação $v^{(4)} + 5v^{(3)} = 0$, vamos procurar uma solução particular de (4.67) na forma $v_p(t) = t^3\,(a\,t^2 + b\,t + c) = a\,t^5 + b\,t^4 + c\,t^3$. Substituindo na equação (4.67), obtemos

$$300\,a\,t^2 + 120\,(a+b)\,t + 24\,b + 30\,c = 1500\,t^2\,.$$

Assim, $a = 5,\ b = -5,\ c = 4$ e $v_p(t) = 5\,t^5 - 5\,t^4 + 4\,t^3$. Logo, uma solução particular de (4.66) é $y_p(t) = e^{2t}\,(5\,t^5 + 5\,t^4 + 4\,t^3)$. Combinando este fato com o exemplo 4.24, segue-se que a solução geral da equação (4.66) é

$$y(t) = (a + b\,t + c\,t^2 + 4\,t^3 - 5\,t^4 + 5\,t^5)\,e^{2\,t} + d\,e^{-3\,t}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.27. *Encontrar a solução real geral da equação*

$$y^{(3)} - 5\,y'' + 9\,y' - 5 = 6\,e^t \tag{4.68}$$

A equação característica é $p(\lambda) = \lambda^3 - 5\,\lambda^2 + 9\,\lambda - 5 = 0$; é fácil ver que $\lambda = 1$ é raiz desta equação. Como $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\,\lambda + 5)$, vemos que as outras raízes são $2 + i$ e $2 - i$; estas raízes fornecem as soluções complexas $e^{(2+i)\,t}$ e $e^{(2-i)\,t}$, das quais obtemos as soluções reais $e^{2\,t}\cos t$ e $e^{2\,t}\,\mathrm{sen}\ t$. Portanto, a solução real geral da equação homogênea é

$$y_H(t) = a\,e^t + e^{2\,t}\,(b\,\cos\,t + c\,\mathrm{sen}\ t), \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Como o termo forçante é solução da equação homogênea, procuraremos uma solução particular da equação não homogênea na forma $A\,t\,e^t$. Substituindo na equação diferencial $y_p(t) = A\,t\,e^t,\quad y_p'(t) = A\,e^t + A\,t\,e^t$,

$y_p''(t) = 2A\,e^t + A\,t\,e^t$, $y_p^{(3)}(t) = 3\,A\,e^t + A\,t\,e^t$, obtemos $A = 3$; assim, $y_p(t) = 3\,t\,e^t$. Logo, a solução real geral da equação não homogênea é

$$y(t) = a\,e^t + e^{2\,t}\,(b\,\cos\,t + c\,\mathrm{sen}\,t) + 3\,t\,e^t, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

O método de variação dos parâmetros se estende naturalmente para equações lineares de ordem n: se $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ são soluções linearmente independentes da equação homogênea

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\,y' + a_0(t)\,y = 0\,. \tag{4.69}$$

e as funções $u_1(t)\,, \ldots\,, \,, u_n(t)$ satisfazem

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{bmatrix} \tag{4.70}$$

então a função

$$y_p(t) = u_1(t)\,y_1(t) + \cdots + u_n(t)\,y_n(t) \tag{4.71}$$

é uma solução da equação não homogênea

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\,y' + a_0(t)\,y = f(t)\,. \tag{4.72}$$

Como no caso das equações de segunda ordem, resolvendo o sistema (4.70), encontramos $u_1'\,, \ldots\,, u_n'$. Integrando, obtemos $u_1\,, \ldots\,, u_n$ e, substituindo em (4.71), temos $y_p(t)$.

Exemplo 4.28. *Encontrar uma solução particular da equação*

$$y^{(3)} + y' = \mathrm{tg}\;t\,. \tag{4.73}$$

É fácil ver que $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = \cos\,t$, $y_3(t) = \mathrm{sen}\;t$ são soluções linearmente independentes da equação homogênea $y^{(3)} + y' = 0$. Procuremos u_1 , u_2 , u_3 satisfazendo

$$\begin{cases} u_1' + u_2'\cos\,t + u_3'\,\mathrm{sen}\;t = 0 & (1) \\ \quad - u_2'\,\mathrm{sen}\;t + u_3'\cos\,t = 0 & (2) \\ \quad - u_2'\cos\,t - u_3'\,\mathrm{sen}\;t = \mathrm{tg}\;t & (3) \end{cases}$$

Somando (1) e (3), obtemos $u_1' = \text{tg } t$; portanto $u_1(t) = \ln|\sec t|$. Multiplicando (2) por cos t, (3) por sen t e somando, obtemos $u_2' = \text{sen } t$, donde $u_2(t) = \cos t$. Substituindo este valor em (2), temos $u_3' = \cos t - \sec t$ e, portanto, $u_3(t) = \text{sen } t - \ln|\sec t + \text{tg } t|$. Logo, uma solução particular da equação não homogênea (4.73) é

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \ln|\sec t| + \cos^2 t + (\text{sen } t - \ln|\sec t + \text{tg } t|)\,\text{sen } t \\ &= 1 + \ln|\sec t| - (\text{sen } t)\,\ln|\sec t + \text{tg } t|\,. \end{aligned}$$

Exercício 4.10. *Encontre a solução geral de cada uma das equações diferenciais abaixo:*

$(a)\ y^{(4)} - 16\,y = 0$	$(b)\ y^{(4)} - 5\,y^{(3)} + 6\,y'' + 4\,y' - 8\,y = 0$
$(c)\ y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = 0$	$(d)\ y^{(3)} + 3\,y'' + 3\,y' + y = 0$
$(e)\ y^{(4)} - 4\,y^{(3)} + 4\,y'' = 0$	$(f)\ y^{(5)} + y^{(4)} - y^{(3)} - 3\,y'' + 2y = 0$
$(g)\ y^{(4)} + 16y = 0$	$(h)\ y^{(5)} + y^{(4)} - y^{(3)} - 3y'' + 2y = t^2 + 2t$
$(i)\ y^{(4)} + 2\,y^{(3)} + y'' = e^{4t}$	$(j)\ y^{(4)} - 4\,y^{(3)} + y'' = e^{4t}\,.$
$(l)\ y^{(3)} + y' = \sec t\,.$	

Capítulo 5

Transformações lineares

5.1 Transformações

Sejam U, V dois conjuntos não vazios. Uma **transformação** (ou **função** ou **aplicação**) de U em V é uma correspondência F que, a cada elemento x de U, associa um único elemento $y = F(x)$ de V: denotamos $F\colon U \to V$. O elemento $F(x)$ chama-se **imagem** de x por F. O conjunto U chama-se **domínio** e V o **contra-domínio** de F. Duas aplicações $F\colon U \to V$ e $G\colon U \to V$ são ditas **iguais** se e somente se $F(u) = G(u)$, $\forall u \in U$. O conjunto $graf(F) = \{(u, F(u)) \,:\, u \in U\}$ chama-se **gráfico** de F. Dado $A \subset U$, o conjunto $F(A) = \{F(u) \,:\, u \in A\}$ chama-se **imagem de** A **por** F; se $A = U$, então o conjunto $F(U)$ chama-se **imagem** de F (neste caso, também usamos a notação $\mathrm{Im}\,(F)$). Dado $B \subset V$, o conjunto $F^{-1}(B) = \{u \in U \,:\, v \in B\}$ chama-se **imagem inversa** de B por F.

Exemplo 5.1. *Seja* U *um conjunto não vazio. A transformação* $I_U\colon U \to U$*, tal que* $I_U(x) = x$, $\forall x \in U$*, chama-se transformação* **identidade** *de* U*.*

Uma aplicação F é dita **injetora** (ou **1-1**) quando, quaisquer que sejam $u_1\,, u_2 \in U$ com $u_1 \neq u_2$, tem-se $F(u_1) \neq F(u_2)$, ou, equivalentemente, quando $F(u_1) = F(u_2)$, com $u_1\,, u_2 \in U$, implicar $u_1 = u_2$. Uma aplicação $F\colon U \to V$ é dita **sobrejetora** (ou **sobre**) quando $F(U) = V$, isto é, quando, para todo $v \in V$, existe (ao menos um) $u \in U$ tal que $F(u) = v$. Uma aplicação injetora e sobre é chamada **bijetora**.

Exemplo 5.2. *A aplicação* $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x, -y)$ *é bijetora.*

A aplicação F é sobre, pois cada $(v,w) \in \mathbb{R}^2$ é imagem de $(v,-w)$, isto é, $(v,w) = F(v,-w)$. Para ver que F é injetora, notemos que, se $F(x,y) = F(s,t)$, isto é, $(x,-y) = (s,-t)$, então $x = s$ e $y = t$, ou seja, $(x,y) = (s,t)$.

Note que não podemos traçar o gráfico de F, mas podemos visualizar como F atua em subconjuntos de U, como na Figura 5.1 abaixo (geometricamente, F atua como uma reflexão em relação ao eixo Ox). A imagem do triângulo ABC pela transformação F é o triângulo $A'B'C'$.

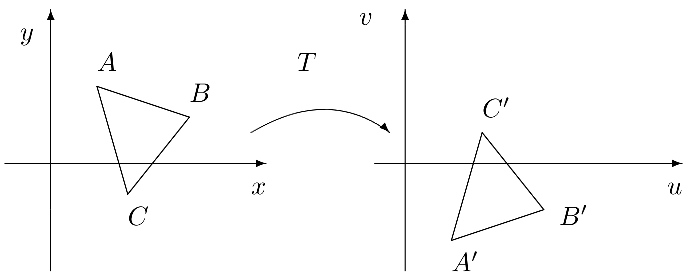


Figura 5.1

Exemplo 5.3. *Seja $\theta \in [0, 2\pi)$ um número fixado. A transformação $R_\theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $R_\theta(x,y) = (x\,\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta, y\,\cos\theta + x\,\mathrm{sen}\,\theta)$ é bijetora; geometricamente, R_θ é uma rotação de ângulo θ no sentido anti-horário.*

Exemplo 5.4. *Seja* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ *fixado. A* **translação** $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, dada por* $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}$ *é uma aplicação bijetora.*

Dadas duas aplicações $F\colon A \to B$ e $G\colon B \to C$, a **composta** de F e G, $G \circ F\colon A \to C$, é definida por: $(G \circ F)(u) = G(F(u))$. Uma aplicação $F\colon A \to B$ é dita **invertível** quando existe $G\colon B \to A$ tal que $G \circ F = I_U$ e $F \circ G = I_V$. A aplicação G chama-se **inversa** de F e é denotada por F^{-1}. Como no caso de funções reais de variável real, vale o seguinte resultado:

Teorema 5.1. *F é invertível se e somente se F é bijetora.*

5.2 Transformações lineares

Sejam U, V espaços vetoriais e $T\colon U \to V$ uma transformação. Dizemos que T é uma **transformação linear** quando:
(a) $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2),\ \forall u_1\,,\ u_2\ \in U$
(b) $T(\alpha\, u) = \alpha\, T(u),\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ u \in U.$
Quando $U = V$, diremos que T é um **operador linear**.

Exemplo 5.5. *Sejam U, V espaços vetoriais quaisquer. A transformação nula* $\mathrm{O}\colon U \to V$, *dada por* $\mathrm{O}(x) = 0,\ \forall x \in U$, *é linear: de fato, dados* $x_1\,,\ x_2 \in U$, *temos* $\mathrm{O}(x_1 + x_2) = 0 = 0 + 0 = \mathrm{O}(x_1) + \mathrm{O}(x_2)$ *e* $\mathrm{O}(\alpha\, x) = 0 = \alpha\, 0 = \alpha\, \mathrm{O}(x)$.

Exemplo 5.6. *Sejam U um espaço vetorial qualquer e $k \in \mathbb{R}$ um número fixado. A* **homotetia** *de razão k, $H\colon U \to U$, $H(x) = k\, x$ é um operador linear.*

De fato, dados $x\,,\ y \in U$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned} &H(x+y) = k\,(x+y) = k\,x + k\,y = H(x) + H(y),\\ &H(\alpha x) = k\,(\alpha x) = \alpha\,(k\,x) = \alpha\, H(x). \end{aligned}$$

Notemos que, se $k \neq 0$, então a homotetia é 1-1 e sobre.

Exemplo 5.7. *A transformação $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (2\,x + y, x + 5\,y - z)$ é linear sobre, mas não é 1-1.*

De fato, dados (a, b, c), $(d, e, f) \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} T[(a,b,c) + (d,e,f)] &= T(a+d, b+e, c+f)\\ &= (2\,(a+d) + b + e, a + d + 5\,(b+e) - (c+f)) =\\ &= (2\,a + b, a + 5\,b - c) + (2\,d + e, d + 5\,e - f) =\\ &= T(a,b,c) + T(d,e,f) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T[\alpha\,(a,b,c)] &= T(\alpha\, a, \alpha b, \alpha\, c) = (2\,\alpha\, a + \alpha\, b, \alpha\, a + 5\,\alpha\, b - \alpha\, c)\\ &= \alpha\,(2\,a + b, a + 5\,b - c) = \alpha\, T(a,b,c). \end{aligned}$$

Fica como exercício mostrar que T é sobre mas não é 1-1.

Notemos que as componentes do vetor $(s,t) = T(x,y,z)$ satisfazem a igualdade

$$\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Denotando $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ e identificando os vetores $\mathbf{u} = (x,y,z)$ e $T(\mathbf{u}) = (s,t)$ com as matrizes colunas $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$, respectivamente, vamos escrever $T(\mathbf{u}) = A\,\mathbf{u}$. □

Mais geralmente, cada matriz $A = \big(a_{ij}\big)$ de ordem $m \times n$ determina uma transformação linear $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ do seguinte modo: a cada vetor $\mathbf{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ associamos o vetor $F(\mathbf{u}) = (y_1, \ldots, y_m)$ tal que

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}\,x_1 + \cdots + a_{1n}\,x_n \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}\,x_1 + \cdots + a_{mn}\,x_n\,. \end{aligned} \tag{5.1}$$

É conveniente escrever (5.1) como uma igualdade matricial:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Usando novamente a identificação entre vetores e matrizes colunas, vamos escrever

$$F(\mathbf{u}) = A\,\mathbf{u}\,. \tag{5.2}$$

A partir da igualdade (5.2) fica fácil ver que F é linear: a linearidade de F é uma conseqüência direta da distributividade da multiplicação de matrizes em relação à adição.

Um fato ainda mais importante nesta relação entre transformações lineares e matrizes é dada no próximo teorema, no qual mostramos que toda transformação linear $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ pode ser escrita na forma (5.2).

Teorema 5.2. *Seja $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear. Então existe uma matriz real A de ordem $m \times n$ tal que $T(\mathbf{u}) = A\,\mathbf{u}$, para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração: Seja $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Cada elemento $\mathbf{u} = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ se escreve como

$$\mathbf{u} = x_1\,\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\,\mathbf{e}_n$$

Como T é linear, temos

$$T(\mathbf{u}) = x_1\,T(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_n\,T(\mathbf{e}_n)$$

Notemos que $T(\mathbf{e}_1), \dots, T(\mathbf{e}_n)$ são vetores de $\mathbb{R}^n$. Escrevendo

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} a_{1\,1} \\ \vdots \\ a_{m\,1} \end{bmatrix}, \; \dots, \; T(\mathbf{e}_n) = \begin{bmatrix} a_{1\,1} \\ \vdots \\ a_{m\,1} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m\,1} & \cdots & a_{m\,n} \end{bmatrix}$$

temos

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}) &= x_1 \begin{bmatrix} a_{1\,1} \\ \vdots \\ a_{m\,1} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1\,1} \\ \vdots \\ a_{m\,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1\,1}\,x_1 + \cdots + a_{1\,n}\,x_n \\ \vdots \\ a_{m\,1}\,x_1 + \cdots + a_{m\,n}\,x_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m\,1} & \cdots & a_{m\,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A\,\mathbf{u} \end{aligned}$$

Exemplo 5.8. *O* operador derivação $D\colon P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$, $D(p) = p'$ *(que a cada polinômio p associa sua derivada) é linear. Isto é conseqüência imediata das propriedades da derivada:*

$$\begin{aligned} &D(f+g) = (f+g)' = f' + g' = D(f) + D(g) \\ &D(\alpha f) = (\alpha f)' = \alpha f' = \alpha D(f). \end{aligned}$$

Notemos que a transformação linear D não é 1-1 (pois $D(1 + t^2) = D(3 + t^2) = 2t$) nem sobre (não existe $p(t) \in P_n(\mathbb{R})$ tal que $D(p) = t^n$).

Exercício 5.1. *Verifique se as transformações abaixo são lineares:*
(*a*) $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = x + 5y - z$
(*b*) $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = x + 5y - z + 2$
(*c*) $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (|x|, y + 2z)$
(*d*) $F\colon P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$, $F(f) = f' + f''$
(*e*) $F\colon M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $F(X) = AX + 2\,X$ *em que* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *é fixada.*

O próximo teorema contém algumas propriedades que decorrem imediatamente da definição de transformação linear.

Teorema 5.3. *Sejam* U, V *espaços vetoriais e seja* $T\colon U \to V$ *uma aplicação linear. Então:*

1. $T(0) = 0$ *(isto é,* T *leva o vetor nulo de* U *no vetor nulo de* V*).*
2. $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$.
3. *Se* $F\colon U \to V$ *e* $G\colon V \to W$ *forem transformações lineares, então a composta* $G \circ F\colon U \to W$ *também é linear.*

Demonstração: As provas das afirmações 1) e 2) ficam como exercício. Mostremos a afirmação 3: dados $x, y \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}(G \circ F)(x + \alpha\, y) &= G[F(x + \alpha\, y)] = G[F(x) + \alpha\, F(y)] = \\ &= G[F(x)] + \alpha\, G[F(y)] = (G \circ F)(x) + \alpha\,(G \circ F)(y).\end{aligned}$$

Logo, $G \circ F$ é linear.

Exercício 5.2. *Seja* $T\colon U \to V$ *uma transformação linear e sejam* $v_1, \dots, v_n \in V$ *e* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$*. Mostre que*

$$T(\alpha_1\, v_1 + \cdots + \alpha_n\, v_n) = \alpha_1\, T(v_1) + \cdots + \alpha_n\, T(v_n).$$

Teorema 5.4. *Seja* $T\colon U \to V$ *uma transformação linear:*
(a) Se W *for um subespaço de* U *então* $T(W)$ *é subespaço de* V*.*
(b) Se Z *for um subespaço de* V *então* $T^{-1}(Z)$ *é subespaço de* U*.*

Demonstração: Mostraremos apenas (b) (a verificação de (a) fica como exercício). Observemos, em primeiro lugar, que $0 \in T^{-1}(Z)$, uma vez que $T(0) = 0$. Dados, $x_1, x_2 \in T^{-1}(Z)$, temos $y_1 = T(x_1) \in Z$ e $y_2 = T(x_2) \in Z$. Então, temos $y_1 + y_2 \in Z$ (pois Z é subespaço) e

$y_1 + y_2 = T(x_1) + T(x_2) = T(x_1 + x_2)$, donde $x_1 + x_2 = T^{-1}(y_1 + y_2)$, que implica que $x_1 + x_2 \in T^{-1}(Z)$. Da mesma maneira, verificamos que, para todo $x \in T^{-1}(Z)$ e todo escalar α, o vetor $\alpha\, x$ pertence a $T^{-1}(Z)$.

O próximo teorema mostra que uma transformação linear fica completamente determinada quando conhecemos seus valores em uma base.

Teorema 5.5. *Sejam U e V espaços vetoriais e $\{u_1\,, \ldots, u_n\}$ uma base de U. Se $S, T\colon U \to V$ são transformações lineares tais que*

$$S(u_1) = T(u_1), \ldots, S(u_n) = T(u_n),$$

então $S(x) = T(x)$, $\forall x \in U$.

Demonstração: Seja $x \in U$. Como $\{u_1\,, \ldots, u_n\}$ é uma base de U, existem escalares $\alpha_1\,, \ldots, \alpha_n$ tais que $x = \alpha_1\, u_1 + \cdots + \alpha_n\, u_n$. Como S e T são lineares e $S(u_1) = T(u_1)\,, \ldots, S(u_n) = T(u_n)$, temos

$$\begin{aligned} S(x) &= S(\alpha_1\, u_1 + \cdots + \alpha_n\, u_n) = \alpha_1\, S(u_1) + \cdots + \alpha_n\, S(u_n) \\ &= \alpha_1\, T(u_1) + \cdots + \alpha_n\, T(u_n) = T(\alpha_1\, u_1 + \cdots + \alpha_n\, u_n) \\ &= T(x) \end{aligned}$$

Logo, S coincide com T. $\square$

Exemplo 5.9. *Encontrar a expressão $F(x, y, z)$ do operador linear $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $F(1, 1, 1) = (1, 1, 0)$, $F(0, 1, 1) = (1, 0, 1)$ e $F(0, 0, 1) = (0, 1, 1)$.*

Primeiramente, expressamos um vetor arbitrário (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ como combinação linear dos vetores $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 0, 1)$: escrevendo $(x, y, z) = \alpha\,(1, 1, 1) + \beta\,(0, 1, 1) + \gamma\,(0, 0, 1)$, temos $\alpha = x$, $\alpha + \beta = y$, $\alpha + \beta + \gamma = z$, donde obtemos, $\alpha = x$, $\beta = y - x$, $\gamma = z - y$. Logo,

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= x\, F(1, 1, 1) + (y - x)\, F(0, 1, 1) + (z - y)\, F(0, 0, 1) \\ &= x\,(1, 1, 0) + (y - x)\,(1, 0, 1) + (z - y)\,(0, 1, 1) \\ &= (y, x - y + z, z - x). \end{aligned}$$

Exemplo 5.10. *Determinar a espressão da transformação linear $F\colon P_3(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ tal que*

$$F(1 - t) = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad F(t^2 - 1) = \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$F(t - t^3) = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad F(t^3) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Fica como exercício mostrar que $B = \{1-t, t^2-1, t-t^3, t^3\}$ é base de $P_3(\mathbb{R})$. Escrevendo $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$ como combinação linear dos elementos de B, $a+bt+ct^2+dt^3 = x(1-t)+y(t^2-1)+z(t-t^3)+wt^3 = (x-y)+(-x+z)t+yt^2+(-z+w)t^3$, obtemos $x-y=a$, $-x+z=b$, $y=c$, $-z+w=d$, donde $x=a+c$, $y=c$, $z=a+b+c$, $w=a+b+c+d$. Assim,

$$p(t) = (a+c)(1-t) + c(t^2-1) + (a+b+c)(t-t^3) + (a+b+c+d)t^3,$$

Logo,

$$\begin{aligned} F[p(t)] = (a+c)\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \\ + (a+b+c)\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} + (a+b+c+d)\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} a-b-2c+d & 16a+11b+24c+4d \\ 8a+8b+8c+3d & -a-2b-2c-2d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exercício 5.3. *Existe uma transformação linear* $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $T(1,1) = (1,2), T(1,0) = (0,0)$ *e* $T(0,1) = (2,1)$*? Existe mais de uma?*

Exercício 5.4. *Existe uma transformação linear* $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $T(1,1,1) = (1,2)$, $T(0,1,1) = (1,0)$ *e* $T(0,0,1) = (0,0)$*? Existe mais de uma?*

Exercício 5.5. *Existe uma transformação linear* $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $T(1,1,1) = (1,2,0)$, $T(0,1,1) = (1,0,0)$ *e* $T(1,0,0) = (0,2,1)$*? Existe mais de uma?*

Exercício 5.6. *Determinar a transformação linear* $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *tal que* $T(1,1,1) = (0,3,1,5)$, $T(1,1,0) = (0,0,0,1)$ *e* $T(1,0,0) = (0,0,0)$.

Exercício 5.7. *Existe uma transformação linear* $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *tal que* $T(1,1,1) = (0,3,1,5)$, $T(1,1,0) = (0,0,0,1)$ *e* $T(0,0,1) = (0,0,0,0)$*? Existe mais de uma?*

Exercício 5.8. *Existe uma transformação linear* $T\colon\ P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $T(1) = (0,2,1)$, $T(1+t) = (1,0,0)$ *e* $T(1+t+t^2) = (1,2,0)$*? Existe mais de uma?*

5.3 Núcleo e imagem

Seja $T\colon U \to V$ uma transformação linear. Definimos os conjuntos

$$\begin{array}{ll} \ker(T) = \{u \in U \;:\; T(u) = 0\,\} = T^{-1}(\{0\}), & \text{chamado } \textbf{núcleo} \text{ de } T, \\ \mathrm{Im}(T) = T(U) = \{T(x) \;:\; x \in U\,\}, & \text{chamado } \textbf{imagem} \text{ de } T. \end{array}$$

Pelo Teorema 5.4, $\ker(T)$ é um subespaço vetorial de U e $\mathrm{Im}(T)$ é subespaço de V. O interesse em estudar o núcleo e a imagem é que estes subespaços dão informações sobre a injetividade e a sobrejetividade da transformação linear: é claro que uma transformação linear é sobre se e somente se $\mathrm{Im}(T) = V$; veremos que T é injetora se e somente se $\ker(T) = \{0\}$.

Exemplo 5.11. *Seja* $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x, y, 0)$. *Então* $\ker(T) = \{(0, 0, c) \;:\; c \in \mathbb{R}\}$ *e* $\mathrm{Im}(T) = \{(a, b, 0) \;:\; a, b \in \mathbb{R}\}$.

Exemplo 5.12. $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T(x, y) = x - 3y$. *Então* $\ker(T) = \{(x, y) \;:\; x = 3y\}$ *e* $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}$ *(dado* $w \in \mathbb{R}$*, é claro que existe* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $T(x, y) = w$*: basta tomar* $x = w,\ y = 0$.*)*

Exemplo 5.13. *Seja* $D\colon P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ *o operador linear definido por* $D(p) = p'$, *isto é,* $D(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) = a_1 + 2\,a_2\,t + 3\,a_3\,t^2$. *Então* $\ker(D) = \{p \;:\; p(t) = a_0\}$, *o conjunto dos polinômios constantes e* $Im(D) = P_2(\mathbb{R})$.

De fato, temos $D(p) = 0 \Leftrightarrow a_1 + 2\,a_2\,t + 3a_3\,t^2 \equiv 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$.
Logo $\ker(D) = \{p \;:\; p(t) = a_0\}$.
Para ver que $\mathrm{Im}(D) = P_2(\mathbb{R})$, notemos que, para todo polinômio $f(t) = a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R})$, temos $f = D(at + \frac{b}{2}\,t^2 + \frac{c}{3}\,t^3)$.

Exemplo 5.14. *Achar o núcleo e a imagem da transformação linear* $F\colon P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ *tal que* $F[t] = (-2, 1, 18, 9)$, $F[1 - t] = (3, 2, -2, -3)$ *e* $F[1 + t^2] = (0, -2, -4, -6)$.

É claro que a imagem de F é o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $(3, 2, -2, -3)$, $(0, 2, 4, 6)$ e $(-2, 1, 18, 9)$. Para determinar o núcleo de F, devemos achar a expressão de F. Deixamos como exercício mostrar que $B = \{1 - t, 1 + t^2, t\}$ é base de $P_2(\mathbb{R})$ e que cada $p(t) = a + bt + ct^2$

em $P_2(\mathbb{R})$ se escreve como combinação linear dos elementos da base B na seguinte forma: $p(t) = (a-c)(1-t) + c(1+t^2) + (a+b-c)t$. Logo,

$$\begin{aligned} F[p] &= (a-c)\,F[1-t] + c\,F[1+t^2] + (a+b-c)\,F[t] = \\ &= (a-c)\,(3,2,-2,-3) + c\,(0,2,4,6) + (a+b-c)\,(-2,1,18,9) \\ &= (a-2\,b-c, 3\,a+b-c, 4\,a+6\,b, 6\,a+9\,b). \end{aligned}$$

O núcleo de F é o conjunto de todos os polinômios $p(t) = a + bt + ct^2$ tais que

$$\begin{cases} \;\;a-2\,b-c=0 \\ 3\,a+\;\;b-c=0 \\ 4\,a+6\,b\qquad=0 \\ 6\,a+9\,b\qquad=0\,. \end{cases}$$

cujas soluções são $b = -2\,a/3$ e $c = 7\,a/3$. Logo, $p(t) = a - (2\,a/3)\,t + (7\,a/3)\,t^2$ e

$$\ker(F) = \{\frac{a}{3}(1-2\,t+7\,t^2)\;:\;c\in\mathbb{R}\} = [1-2\,t+7\,t^2].$$

Teorema 5.6. *Seja $T\colon U\to V$ uma transformação linear. Então, T é injetora se e somente se* $\ker(T) = \{0\}$*.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponhamos T injetora. Vamos mostrar que $\ker(T) = 0$. Seja $u \in \ker(T)$; então $T(u) = 0$. Como $T(0) = 0$ e T é injetora, devemos ter $u = 0$. Portanto $\ker(T) \subset \{0\}$; como sempre temos $\{0\} \subset \ker(T)$, segue-se que $\ker(T) = \{0\}$.
($\Leftarrow$) Suponhamos $\ker(T) = \{0\}$. Vamos mostrar que T é 1-1. Suponhamos $T(u) = T(v)$, com $u, v \in U$. Então $T(u-v) = T(u) - T(v) = 0$; portanto, $u - v \in \ker(T)$. Como $\ker(T) = \{0\}$, devemos ter $u - v = 0$, donde $u = v$. Logo, T é 1-1.

Exemplo 5.15. *Encontrar uma transformação linear $F\colon P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja o subespaço $[1-t, t^2]$.*

De acordo com o teorema 5.5, basta definir os valores de F nos vetores de uma base de $P_2(\mathbb{R})$. Tomemos a base $B = \{1, 1-t, t^2\}$. Como queremos que $\ker(F) = [1-t, t^2]$, pomos $F(1-t) = F(t^2) = (0,0)$; definimos $F(1) = (1,0)$. Dado $p(t) = a + bt + ct^2 \in P_2(\mathbb{R})$, podemos escrever $p(t) = (a+b) + (-b)t + ct^2$. Logo, $F(p) = (a+b)(1,0) = (a+b, 0)$.

Exemplo 5.16. *Encontrar uma transformação linear* $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *cuja imagem seja o subespaço gerado pelos vetores* $(2,1,0)$ *e* $(1,0,-1)$.

De acordo com o teorema 5.5, basta definir os valores de T nos vetores de uma base de $\mathbb{R}^3$. Tomemos $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$e definamos $T(1,0,0) = (0,0,0)$, $T(0,1,0) = (2,1,0)$, $T(0,0,1) = (1,0,-1)$. Então

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= x\,T(1,0,0) + y\,T(0,1,0) + z\,T(0,0,1) = \\ &= y\,(2,1,0) + z\,(1,0,-1) = \\ &= (2\,y + z, y, -z). \end{aligned}$$

Exercício 5.9. *Determinar um operador linear em* $\mathbb{R}^4$ *cujo núcleo é gerado pelos vetores* $(1,1,0,0)$ *e* $(0,0,1,0)$.

Teorema 5.7. *Seja* $T\colon U \to V$ *uma transformação linear. Então*

$$\dim U = \dim \ker(T) + \dim \operatorname{Im}(T). \tag{5.3}$$

Demonstração: Seja $B_1 = \{u_1, \ldots, u_p\}$ uma base de $\ker(T)$ (assim, $\dim \ker(T) = p$). Usando o Teorema 3.8, podemos estender B_1 a uma base $B = \{u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_r\}$ de U (assim, $\dim U = p + r$). Vamos mostrar que $\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ é uma base de $\operatorname{Im}(T)$ (portanto, $\dim \ker(T) = p$). Com isto ficará mostrada a igualdade (5.3) acima.

Afirmamos que os vetores $T(v_1), \ldots, T(v_r)$ geram $\operatorname{Im}(T)$. De fato, dado $v \in \operatorname{Im}(T)$, existe $x \in U$ tal que $T(x) = v$. Como B é base de U, temos

$$x = \alpha_1\,u_1 + \cdots + \alpha_p\,u_p + \beta_1\,v_1 + \cdots + \beta_r\,v_r.$$

Como $T(u_1) = \cdots = T(u_p) = 0$, pois $u_1, \ldots, u_p \in \ker(T)$, temos

$$\begin{aligned} T(x) &= \alpha_1\,T(u_1) + \cdots + \alpha_p\,T(u_p) + \beta_1\,T(v_1) + \cdots + \beta_r\,T(v_r) \\ &= \beta_1\,T(v_1) + \cdots + \beta_r\,T(v_r), \end{aligned}$$

Logo, qualquer $v \in \operatorname{Im}(T)$ é combinação linear de $T(v_1), \ldots, T(v_r)$.

Afirmamos que os vetores $T(v_1), \ldots, T(v_r)$ são LI. De fato, se

$$\gamma_1\,T(v_1) + \cdots + \gamma_r\,T(v_r) = 0$$

temos

$$T(\gamma_1\,v_1 + \cdots + \gamma_r\,v_r) = 0$$

e assim,

$$\gamma_1\, v_1 + \cdots + \gamma_r\, v_r \in \ker(T)$$

Como $\ker(T) = [\, u_1\,, \ldots, u_p\,]$, existem escalares $\delta_1\,, \ldots, \delta_p$ tais que

$$\gamma_1\, v_1 + \cdots + \gamma_r\, v_r = \delta_1\, u_1 + \cdots + \delta_p\, u_p\,,$$

Como os vetores $u_1\,, \ldots, u_p\,, v_1\,, \ldots, v_r$ são LI, pois formam uma base de U, esta igualdade implica

$$\gamma_1 = \cdots = \gamma_r = \delta_1 = \cdots = \delta_p = 0\,.$$

Logo, $T(v_1), \ldots, T(v_r)$ são LI.

Exemplo 5.17. *Não existe transformação linear $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que seja sobrejetora.*

De fato, pelo teorema anterior, temos

$$\dim\, \mathrm{Im}\,(T) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim\, \ker(F) = 2 - \dim\, \ker(F) \leq 2.$$

Exemplo 5.18. *Não existe transformação linear $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ que seja injetora.*

Como $\dim\, \mathrm{Im}(F) \leq 2$, pelo Teorema anterior, temos

$$\dim\, \ker(F) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Im}\,(F) = 4 - \dim\, \mathrm{Im}(F) \geq 2.$$

Logo, T não pode ser injetora.

Definição 5.1. *Uma transformação linear bijetora entre dois espaços vetoriais U e V é chamada um* **isomorfismo**. *Dizemos, neste caso, que os espaços vetoriais U e V são* **isomorfos**.

É claro que, qualquer que seja o espaço vetorial U, o operador identidade $I_U\colon U \to U$ é um isomorfismo.

Exemplo 5.19. *O operador linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dado por $T(x, y) = (x - y, x + y)$, é um isomorfismo.*

Exemplo 5.20. *A transformação linear $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = x - y$, não é um isomorfismo, pois ela não é 1-1: note que $F(1, 1) = F(0, 0)$.*

Teorema 5.8. *Se* $F\colon U \to V$ *for um isomorfismo, então* $F^{-1}\colon V \to U$ *também é.*

Demonstração: Sendo F um isomorfismo, temos que F é invertível, portanto, a transformação inversa F^{-1} é bijetora. Resta mostrar que F^{-1} é linear. Dados $y_1\,, y_2 \in V$, sejam $x_1\,, x_2 \in U$ tais que $F(x_1) = y_1$ e $F(x_2) = y_2$ (existem tais $x_1\,, x_2$ pois F é bijeção). Então

$$\begin{aligned} F^{-1}\,(y_1 + y_2) &= F^{-1}\,[F(x_1) + F(x_2)] = F^{-1}\,[F(x_1 + x_2)] = x_1 + x_2 \\ &= F^{-1}(y_1) + F^{-1}(y_2). \end{aligned}$$

Analogamente verifica-se que $F^{-1}\,(\alpha\, y) = \alpha\, F^{-1}\,(y)$.

Exercício 5.10. *Sejam* $F, G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dados por* $F(x, y, z) = (x + y, z + y, z)$, $G(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z)$.
(a) Encontre as expressões de $F \circ G$ *e* $G \circ F$
(b) Encontre bases para $\ker(F \circ G)$, $\ker(G \circ F)$, *Im*$(F \circ G)$ *e* *Im*$(G \circ F)$.

Exercício 5.11. *Determine uma base para o núcleo e para a imagem das transformações lineares abaixo:*
(a) $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (2\,x - 6\,y, 3\,x - 9\,y)$
(b) $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (2\,x - 6\,y, 3\,x - 9\,y, 2\,x - 6\,y)$
(c) $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (x - y + 2\,z, 3\,x - y - 2\,z, y - 4\,z)$
(d) $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (x - y + 2\,z, x - 5\,z)$
(e) $F\colon\ P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, $F(a + b\,t + c\,t^2) = a - b + 2\,c + (3\,a - b - - 2\,c)\,t + (b - 4\,c)\,t^2$
(f) $F\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $F(X) = A\,X$, *sendo* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

5.4 Autovalores e autovetores

Para um dado um operador linear $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, queremos encontrar vetores $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ para os quais $T\,\mathbf{v}$ é um múltiplo de $\mathbf{v}$. Esse conceito é de grande importância em diversas áreas de Matemática e nas aplicações. No próximo capítulo, tais vetores desempenharão um papel fundamental no estudo dos sistemas de equações diferenciais lineares.

Seja $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ um operador linear. Um **autovalor** de T é um escalar λ tal que existe um vetor $\mathbf{v} \neq 0$ em $\mathbb{C}^n$ para o qual $T(\mathbf{v}) = \lambda\,\mathbf{v}$.

Qualquer $\mathbf{v} \neq 0$ com esta propriedade é chamado um **autovetor** de T. O conjunto

$$V_\lambda = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \ : \ T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}\}$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{C}^n$ chamado **autoespaço** de T.

Exemplo 5.21. *O escalar $\lambda = 1$ é autovalor do operador identidade $I\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ e qualquer vetor $v \neq 0$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 1$.*

Exemplo 5.22. *Seja $F\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, dado por $F(\mathbf{v}) = A\,\mathbf{v}$, em que $A = \operatorname{diag}(c_1\,,\, c_2\,, c_3)$. Os números $c_1\,,\, c_2\,, c_3$ são autovalores F; o vetor $(1,0,0)$ é um autovetor de F associado a c_1, $(0,1,0)$ é autovetor de F associado a c_2 e $(0,0,1)$ é autovetor associado a c_3.*

Como, pelo Teorema 5.2, os operadores lineares em $\mathbb{C}^n$ são da forma $T(\mathbf{u}) = A\,\mathbf{u}$, para alguma matriz A, encontrar um vetor $\mathbf{v} = (x_1\,, \ldots\,, x_n)$ tal que $T(\mathbf{v}) = \lambda\,\mathbf{v}$ é o mesmo que encontrar uma matriz coluna (que por razões tipográficas escreveremos) $X = \left[x_1\,, \ldots\,, x_n\right]^T$ tal que $A\,X = \lambda\,X$. Essa equação matricial pode ser escrita na forma $A\,X = \lambda\,I\,X$ (em que I denota a matriz identidade), ou seja

$$(A - \lambda\,I)\,X \tag{5.4}$$

A equação matricial (5.4) tem solução não trivial e somente se

$$\det{(A - \lambda I_n)} = 0. \tag{5.5}$$

O determinante da matriz $A - \lambda I_n$ é um polinômio de grau n em λ, chamado **polinômio característico da matriz** A. O escalar λ é chamado um **autovalor** de A e toda matriz $n \times 1$, $X \neq 0$, tal que $AX = \lambda X$ é um **autovetor** de A correspondente ao autovalor λ. Chama-se **multiplicidade algébrica** do autovetor λ a multiplicidade de λ como raiz do polinômio característico de A.

Exemplo 5.23. *Encontrar os autovalores e autovetores de* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

O polinômio característico de A é

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)\ .$$

Logo, os autovalores são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$.
Autovetores associados a $\lambda = 1$: procuramos $X = [\,a\,,\ b\,]^T$ tais que $(A - I)\,X = 0$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} -a + b = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \implies b = a\,.$$

Logo, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 1$ são todas as matrizes $X = [\,a\,,\ a\,]^T = a\,[\,1\,,\ 1\,]^T$, com $a \neq 0$.
Autovetores associados a $\lambda = -1$: procuramos $Y = [\,a\,,\ b\,]^T$ tais que $(A + I)\,Y = 0$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} a + b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \implies b = -a\,.$$

Logo, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = -1$ são todas as matrizes $Y = [\,a\,,\ -a\,]^T = a\,[\,1\,,\ -1\,]^T$, com $a \neq 0$.

Exemplo 5.24. *A matriz* $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *não tem autovalores reais: de fato, o polinômio característico de* A, $p_A(\lambda)$, *é*

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

que não tem raízes reais. No entanto, A *tem dois autovalores complexos:* i *e* $-i$.

Calculemos os autovetores de A.
Autovetores associados a $\lambda = i$: procuramos $X = [\,a\,,\ b\,]^T$ tais que $(A - i\,I)X = 0$.

$$\begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} -i\,a + b = 0 \\ a - i\,b = 0 \end{cases} \implies b = i\,a\,.$$

Logo, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = i$ são todas as matrizes $X = [\,a\,,\ i\,a\,]^T = a\,[\,1\,,\ i\,]^T$, com $a \neq 0$.
Autovetores associados a $\lambda = -i$: procuramos $Y = [\,c\,,\ d\,]^T$ tais que $(A + i\,I)\,Y = 0$.

$$\begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} i\,c + d = 0 \\ c + i\,d = 0 \end{cases} \implies d = -i\,c\,.$$

Logo, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = -i$ são todas as matrizes $Y = [\,c\,,\ -i\,c\,]^T = c\,[\,1\,,\ -i\,]^T$, com $c \neq 0$.

Observação 5.1. *O exemplo anterior mostra a conveniência de se considerar autovalores complexos - a matriz M deste exemplo não tem autovalores reais, mas tem autovalores complexos. Como o polinômio característico de uma A matriz de ordem n tem n raízes complexas (contando multiplicidade; isto é, uma raiz de multiplicidade k é contada k vezes), segue-se que A tem n autovalores.*

Teorema 5.9. *Matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio característico, isto é, se $B = P^{-1}AP$, então $p_A(z) = p_B(z)$. Além disso, se X for um autovetor de A correspondente ao autovalor λ, então $P^{-1}X$ é autovalor de B correspondente a λ.*

Demonstração: De fato, usando a igualdade $\det(P^{-1})\det(P) = 1$, temos

$$\begin{aligned}\det(B - \lambda I_n) &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}I_nP) = \det\, P^{-1}(A - \lambda I_n)P \\ &= \det\, P^{-1}\det(A - \lambda I_n)\det\, P = \det(A - \lambda I_n).\end{aligned}$$

Logo, o polinômio característico de B é igual ao polinômio característico de A.

Para verificar a segunda parte, seja $Y = P^{-1}\,X$; então

$$B\,Y = P^{-1}\,A\,P\,P^{-1}\,X = P^{-1}\,A\,X = P^{-1}\,\lambda\,X = \lambda\,P^{-1}\,X = \lambda\,Y\,.$$

Exemplo 5.25. *Seja T o operador linear $T\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ definido por $T(x,y,z) = (3\,x, x + 4\,y + 3\,z, x + y + 6\,z)$. Encontrar os autovalores, autovetores e autoespaços de T*

É fácil ver que $T(\mathbf{u}) = A\,\mathbf{u}$, em que

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de A é:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 3 \\ 1 & 1 & 6-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 1 & 6-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(3-\lambda)(7-\lambda).$$

Portanto, os autovalores são $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 7$.
Autovetores e autoespaço associados a $\lambda = 3$: procuramos $\mathbf{v} = (a, b, c)$ tais que $(A - 3\,I)\,\mathbf{v} = 0$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad a + b + 3\,c = 0$$

donde obtemos $b = -a - 3\,c$. Logo, os autovetores são

$$\mathbf{v} = (a, -a - 3\,c, c) = a\,(1, -1, 0) + c\,(0, -3, 1), \qquad a,\, c \in \mathbb{R}.$$

O autoespaço associado a $\lambda = 3$ é $V_{(\lambda=3)} = [(1, -1, 0), (0, -3, 1)]$.

Autovetores associados a $\lambda = 7$: procuramos $\mathbf{w} = (a, b, c)$ tais que $(A - 7\,I)\,\mathbf{w} = 0$.

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ a - 3\,b + 3\,c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

donde obtemos $a = 0$, $b = c$. Logo $\mathbf{w} = (0, c, c) = c\,(0, 1, 1)$, $c \in \mathbb{R}$. O autoespaço associado a $\lambda = 7$ é $V_{(\lambda=7)} = [(0, 1, 1)]$.

Observação 5.2. *A matriz A estudada no Exemplo 5.25 tem uma propriedade especial: formemos a matriz P cujas colunas são as coordenadas dos autovetores de A; então $P^{-1}\,A\,P$ é uma matriz diagonal; mais precisamente,*

$$\text{se} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{então} \quad P^{-1}\,A\,P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

O próximo teorema mostra que este fato é verdadeiro em geral.

Teorema 5.10. *Suponhamos que a matriz A tenha n autovetores LI $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ associados aos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Então A é semelhante a uma matriz diagonal: mais precisamente, se $P = \big[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\big]$, então $P^{-1}\,A\,P = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.*

Demonstração: Usando as igualdades $A\,\mathbf{v}_1 = \lambda_1\,\mathbf{v}_1\,, \ldots, A\,\mathbf{v}_n = \lambda_n\,\mathbf{v}_n$ e o Teorema 1.1, temos

$$\begin{aligned} P^{-1}\,A\,P &= P^{-1}\left[A\,\mathbf{v}_1\,, \ldots, A\,\mathbf{v}_n\right] = P^{-1}\left[\lambda_1\,\mathbf{v}_1\,, \ldots, \lambda_n\,\mathbf{v}_n\right] \\ &= \left[\lambda_1\,P^{-1}\,\mathbf{v}_1\,, \ldots, \lambda_n\,P^{-1}\,\mathbf{v}_n\right] \\ &= \operatorname{diag}(\lambda_1\,, \cdots, \lambda_n)\,. \end{aligned}$$

Definição 5.2. *Um operador linear* $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(\mathbf{v}) = A\,\mathbf{v}$ *é dito* **diagonalizável** *quando existe uma base* $B = \{\mathbf{v}_1\,, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *formada por autovetores de* T*. Dizemos neste caso que a matriz* $P = [\mathbf{v}_1\,, \ldots, \mathbf{v}_n]$ **diagonaliza** T *(também dizemos que* P **diagonaliza** A*).*

O operador do Exemplo 5.25 é diagonalizável. Nem todo operador é diagonalizável, como mostra o exemplo seguinte.

Exemplo 5.26. *Encontrar os autoespaços do operador* $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dado por* $T(x,y,z) = (3\,x, x + 4\,y + z, 2\,x + 3\,y + 6\,z)$*.*

Temos $T(\mathbf{x}) = B\,\mathbf{x}$ em que $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$.

O polinômio característico de B é

$$\det(B - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3 & 6-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\det\begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 3 & 6-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(3-\lambda)(7-\lambda).$$

Portanto, os autovalores são $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 7$.

Autovetores associados a $\lambda = 3$: procuramos $\mathbf{v} = [a,b,c]^T$ tais que $(B - 3\,I)\,\mathbf{v} = 0$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2\,a + 3\,b + 3\,c = 0 \end{cases}$$

donde obtemos $a = 0$ e $b = -c$. Portanto $\mathbf{v} = [0,-c,c]^T = c\,[0,-1,1]^T$. O autoespaço associado a $\lambda = 3$ é $V_{(\lambda=3)} = \{\,[0,-x,x]^T \,:\, x \in \mathbb{R}\}$.

Autovetores associados a $\lambda = 7$: procuramos $\mathbf{w} = [d, e, f]^T$ tais que $(B - 7\,I)\,\mathbf{w} = 0$.

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} -4\,d \qquad\quad &= 0 \\ d - 3\,e + f &= 0 \\ 2\,d + 3\,e - f &= 0 \end{aligned} \right.$$

donde obtemos $d = 0$ e $f = 3\,e$. Portanto $\mathbf{w} = d\,[\,0, 1, 3\,]^T$. O autoespaço associado a $\lambda = 7$ é $V_{(\lambda=7)} = \{\,[\,0, x, 3\,x\,]^T\ :\ x \in \mathbb{R}\}$.

Teorema 5.11. *Sejam $\mathbf{v}_1\,, \ldots, \mathbf{v}_p$ autovetores de um operador T associados aos autovalores $\lambda_1\,, \ldots \lambda_p$. Se os autovalores $\lambda_1\,, \ldots \lambda_p$ forem distintos, então os autovetores $\mathbf{v}_1\,, \ldots, \mathbf{v}_p$ são linearmente independentes.*

Demostração: Vamos mostrar o teorema por indução sobre n. Em primeiro lugar, notemos que o resultado é verdadeiro se $n = 1$, pois autovetores são vetores não nulos.

Suponhamos que o resultado seja válido para um número k. Vamos mostrar que ele é verdadeiro para $k + 1$.
Sejam $\mathbf{v}_1\,, \ldots, \mathbf{v}_{k+1}$ autovetores de T. Suponhamos que os números $\alpha_1\,, \ldots, \alpha_{k+1}$ sejam tais que

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1\ +\ \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k + \alpha_{k+1} \mathbf{v}_{k+1} = 0 \tag{5.6}$$

(queremos concluir que esta relação implica $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_{k+1} = 0$). Aplicando T aos dois membros de (5.6) e notando que $\mathbf{v}_1\,, \ldots, \mathbf{v}_{k+1}$ são autovetores de T, obtemos

$$\alpha_1\,\lambda_1\,\mathbf{v}_1\ +\ \cdots + \alpha_k\,\lambda_k\,\mathbf{v}_k + \alpha_{k+1}\,\lambda_{k+1}\,\mathbf{v}_{k+1} = 0. \tag{5.7}$$

Multiplicando (5.6) por λ_{k+1} e subtraindo de (5.7), obtemos

$$\alpha_1\,(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\,\mathbf{v}_1\ +\ \cdots + \alpha_k\,(\lambda_k - \lambda_{k+1})\,\mathbf{v}_k = 0. \tag{5.8}$$

Agora, como o resultado é verdadeiro para k autovetores, temos que $\mathbf{v}_1\,, \ldots, \mathbf{v}_k$ são LI. Portanto

$$\alpha_1\,(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = 0,\ \ldots,\ \alpha_k\,(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0$$

Como, por hipótese, os autovalores são dois a dois distintos, temos $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Substituindo em (5.6), obtemos $\alpha_{k+1}\,\mathbf{v}_{k+1} = 0$. Como $\mathbf{v}_{k+1} \neq 0$, temos $\alpha_{k+1} = 0$. Logo, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k+1}$ são LI. $\square$

Como conseqüência imediata dos Teoremas 5.10 e 5.11, temos:

Corolário 5.1. *Se o operador $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tem n autovalores distintos, então T é diagonalizável.*

Um resultado importante no estudo de autovalores e autovetores, cuja prova omitiremos é:

Teorema 5.12. *Seja A uma matriz $n \times n$ simétrica. Então:*
(i) os autovalores de A são reais;
(ii) existe uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de A.

Exercício 5.12. *Encontre os autovalores e autovetores das matrizes abaixo:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Exercício 5.13. *Encontre os autovalores e autovetores dos operadores lineares abaixo (em (a) e (c), $k \in \mathbb{R}$ é uma constante fixada):*

(*a*) $T(x, y) = (k\,x, k\,y)$ (*b*) $T(x, y) = (x, k\,y)$
(*c*) $T(x, y) = (x + y, x - y)$ (*d*) $T(x, y) = (-x, y)$
(*e*) $T(x, y) = (-x - y, -3x + y)$ (*f*) $T(x, y, z) = (z, y, x)$.

(g) $T(x,y,z) = (3\,x, 2\,y - 5\,z, y - 2\,z)$ (h) $T(x,y,z) = (x, x+2y, x+y)$
(i) $T(x,y,z,w) = (3\,x + y, 3\,y, 4\,z, 3\,w)$
(j) $T(x,y,z,w) = (2\,x + y, 2\,y, z + w, -2\,z + 4\,w)$.

Exercício 5.14. *Verifique se A é diagonalizável, sendo:*

$$(a)\ A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Exercício 5.15. *Quais das matrizes do Exercício 5.12 são diagonalizáveis? Para cada matriz diagonalizável, encontre a matriz que a diagonaliza.*

Exercício 5.16. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) Determine os autovalores e autovetores de A;
b) Determine bases para os autoespaços;
c) Determine uma matriz P que diagonaliza A e calcule $P^{-1}A\,P$.

Exercício 5.17. *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (3x - 4z, 3y + 5z, z)$:*
(a) *Encontre o polinômio característico de T.*
(b) *Para cada autovalor λ de T, encontre o autoespaço $V(\lambda)$ e dê sua dimensão.*
(c) *T é diagonalizável? Justifique.*
(d) *Caso (c) seja verdadeira, ache uma matriz P que diagonaliza T.*

Exercício 5.18. *Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x, 2\,x + 2\,y, x + k\,z)$.*
(a) *Calcular o polinômio característico e os autovalores de T.*
(b) *Determinar todos os valores de k para que T seja diagonalizável.*
(c) *Para tais valores de k, ache uma matriz que diagonaliza T.*

Exercício 5.19. *Que condições os números a e b devem satisfazer para que o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x + z, b\,y, a\,x - z)$ seja diagonalizável?*

Exercício 5.20. *Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear tal que $v_1 = (1,-1)$ e $v_2 = (-1,0)$ são autovetores de T correspondentes aos autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$, respectivamente. Determine $T(x,y)$.*

Exercício 5.21. *Considere o operador linear* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $v = (1, 0, 0)$ *é autovetor com autovalor nulo e* $F(0, 1, 0) = (0, 2, 1)$ *e* $F(0, -1, 1) = (0, 0, 3)$*. Determine* $F(x, y, z)$*.*

Capítulo 6

Sistemas de equações diferenciais lineares

6.1 Introdução

Neste capítulo, estudamos sistemas de equações diferenciais. Sistemas de equações diferenciais ocorrem com freqüencia nas aplicações, especialmente em Mecânica, em virtude da segunda lei de Newton e em Eletricidade no estudo das malhas contendo dois ou mais circuitos elétricos.

A posição $\mathbf{x}(t)$ de uma partícula de massa m em um instante t, sujeita a uma força $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t))$ (esta notação significa que a força pode depender do instante t, da posição $\mathbf{x}(t)$ e da velocidade $\mathbf{x}'(t)$ naquele instante) é dada pela *equação diferencial vetorial*

$$m\,\mathbf{x}'' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') \tag{6.1}$$

Em termos das componentes $\mathbf{x}(t) = (x_1\,,\, x_2\,,\, x_3)$, $\mathbf{F} = (f_1\,,\, f_2\,,\, f_3)$, temos

$$\begin{cases} m\,x_1'' = f_1(t, x_1\,,\, x_2\,,\, x_3\,, x_1'\,,\, x_2'\,,\, x_3') \\ m\,x_2'' = f_2(t, x_1\,,\, x_2\,,\, x_3\,, x_1'\,,\, x_2'\,,\, x_3') \\ m\,x_3'' = f_3(t, x_1\,,\, x_2\,,\, x_3\,, x_1'\,,\, x_2'\,,\, x_3') \end{cases} \tag{6.2}$$

Um caso particular importante de (6.1) é o do sistema mecânico formado por duas partículas de massas m_1 e m_2 ligadas a molas, como na figura abaixo. Suponhamos que as massas estejam imersas em meios que oferecem resistências aos seus movimentos e estas resistências sejam proporcionais às correspondentes velocidades das massas.

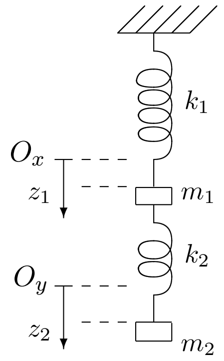


Figura 6.1

De acordo com a segunda lei de Newton, o movimento das partículas é descrito pelo sistema de equações diferenciais

$$\begin{array}{l} m_1\, z_1'' = -k_1\, z_1 - k_2\, z_1 + k_2\, z_2 - b_1\, z_1' \\ m_2\, z_2'' = k_1\, z_2 - k_2\, z_2 - b_2\, z_2'\,. \end{array} \tag{6.3}$$

A Figura 6.2 abaixo mostra uma malha com dois circuitos elétricos contendo uma fonte de força eletromotriz E, dois resistores R_1 e R_2 e dois indutores L_1 e L_2. Usando as Leis de Kirchoff, podemos mostrar que as correntes I_1 e I_2 satisfazem o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} L_1\, I_1' + R_1 I_1 + R_1 I_2 = E \\ R_2\, I_2 + L_2 I_2' - L_1\, I_1' = 0 \end{cases} \tag{6.4}$$

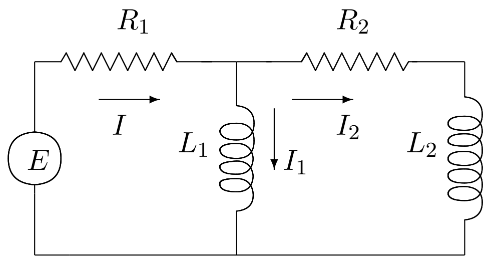


Figura 6.2

A equação diferencial linear de ordem n

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t) y' + a_0(t) y = g(t)$$

pode ser escrita como sistemas de equações diferenciais de primeira ordem. De fato, pondo,

$$z_1 = y,\ z_2 = y',\ \cdots\ ,\ z_n = y^{(n-1)},$$

obtemos o sistema

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \quad\vdots \\ z_{n-1}' = y_n \\ z_n' = g(t) - a_{n-1}(t)\, z_n - \cdots - a_1(t)\, z_2 - a_0(t)\, z_1 \end{cases}$$

Para os nossos objetivos, basta considerar sistemas de equações diferenciais de primeira ordem, pois qualquer equação diferencial de ordem superior a um pode ser transformada em um sistema de equações de primeira ordem.

Os sistemas de equações diferenciais podem geralmente ser escritos na forma

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1\,, \ldots, y_n\,) \\ \quad\vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1\,, \ldots, y_n\,) \end{cases} \tag{6.5}$$

Aqui $f_1(t, y_1\,, \ldots, y_n\,), \ldots, f_n(t, y_1\,, \ldots, y_n\,)$ são funções definidas em um subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$. Estaremos interessados exclusivamente nos sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, que são da forma

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}\, y_1\, + \cdots + a_{1n}\, y_n + g_1(t) \\ \quad\vdots \\ y_n' = a_{n1}\, y_1\, + \cdots + a_{nn}\, y_n + g_n(t)\,, \end{cases} \tag{6.6}$$

em que os coeficientes $a_{ij}\,,\ i\,, j = 1, \ldots, n$, são constantes e as funções $g_i(t),\ i = i, \ldots, n$, contínuas em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Uma **solução** do sistema (6.6) é uma função vetorial continuamente diferenciável $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$, definida num intervalo $J \subset I$, que satisfaz cada uma das equações em (6.6). Por exemplo, a função $\mathbf{y}(t) = (-2e^{-4t}, 2e^{-4t} + 1)$ é solução do sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 5\, y_2 - 5 \\ y_2' = 2\, y_1 - 2\, y_2 + 2\,. \end{cases} \tag{6.7}$$

De fato, se $y_2(t) = -2\,e^{-4t}$ e $y_2(t) = 2\,e^{-4t} + 1$, temos $y_1'(t) = 8\,e^{-4t} = y_1(t) + 5\,y_2(t) - 5$ e $y_2'(t) = -8\,e^{-4t} = 2\,y_1(t) - 2\,y_2(t) + 2$. Como no caso das equações de primeira e de segunda ordem, chamaremos **solução geral** do sistema (6.6) a uma expressão que contenha todas as soluções deste sistema.

Vamos introduzir uma notação mais conveniente para sistemas. Definindo as matrizes $\mathbf{y}$, A e $\mathbf{g}(t)$ por

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}$$

podemos então reescrever o sistema (6.6) na forma

$$\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y} + \mathbf{g}(t) \tag{6.8}$$

A matriz A chama-se **matriz dos coeficientes** e a função vetorial $\mathbf{g}(t)$ chama-se **termo forçante**. Se o termo forçante $\mathbf{g}(t)$ é não nulo, o sistema linear (6.8) é dito **não homogêneo**. Se $\mathbf{g}(t) = \mathbf{0}$, para todo t, o sistema (6.8) é chamado **sistema linear homogêneo**.

Dados um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e um número $t_0 \in I$, associamos ao sistema (6.8) o **problema de valor inicial**, que consiste em encontrar uma solução $\mathbf{y}(t)$ de (6.8) tal que $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{v}$. O próximo teorema afirma que, sob condições razoáveis, o problema de valor inicial associado ao sistema (6.8) tem uma única solução. A demonstração deste teorema envolve conceitos mais elaborados e, por esta razão, será omitida.

Teorema 6.1. *Suponhamos que a função vetorial* $\mathbf{g}(t)$ *seja contínua no intervalo* I *(isto é, as funções* $g_1(t), \ldots, g_n(t)$ *são contínuas em* I*). Então, dados* $t_0 \in I$ *e* $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$*, o sistema (6.8) tem uma única solução* $\mathbf{y}(t)$*, definida em todo o intervalo* I*, tal que* $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$.

6.2 Fatos gerais sobre sistemas lineares

Uma propriedade característica dos sistemas lineares é o chamado Princípio de Superposição, dado no próximo teorema. A demonstração é imediata e será omitida.

Teorema 6.2. *Se* $\mathbf{y}_1(t)$ *é solução do sistema*

$$\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y} + \mathbf{g}_1(t) \tag{6.9}$$

e $\mathbf{y}_2(t)$ *uma solução do sistema*

$$\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y} + \mathbf{g}_2(t)\,. \tag{6.10}$$

então a função $\mathbf{y}(t) = c_1\,\mathbf{y}_1(t) + c_2\,\mathbf{y}_2(t)$ *é uma solução do sistema*

$$\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y} + c_1\,\mathbf{g}_1(t) + c_2\,\mathbf{g}_2(t). \tag{6.11}$$

Como uma conseqüência imediata do princípio de superposição temos

Corolário 6.1. *(a) Se* $\mathbf{x}(t)$ *é uma solução do sistema homogêneo*

$$\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x} \tag{6.12}$$

e $\mathbf{y}(t)$ *é uma solução do sistema linear não homogêneo*

$$\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y} + \mathbf{g}(t)\,, \tag{6.13}$$

então $\mathbf{x}(t)+\mathbf{y}(t)$ *é uma solução do sistema linear não homogêneo (6.13).*
(b) Se $\mathbf{y}_1(t)$ *e* $\mathbf{y}_2(t)$ *são soluções do sistema linear não homogêneo (6.12) então a função* $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}_1(t) - \mathbf{y}_2(t)$ *é uma solução do sistema homogêneo (6.13).*

Tomando $\mathbf{g}_1(t) = \mathbf{g}_2(t) = \mathbf{0}$ no Teorema 6.2, vemos que o conjunto de todas soluções do sistema homogêneo $\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x}$ é um espaço vetorial. O próximo teorema dá a sua dimensão.

Teorema 6.3. *O espaço vetorial* $\mathcal{S}_0$ *das soluções do sistema homogêneo* $\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y}$ *tem dimensão* n.

Demonstração: Fixemos $t_0 \in I$. Seja $B = \{\mathbf{e}_1\,, \mathbf{e}_2\,, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$, isto é

$$\mathbf{e}_1 = (1, \ldots, 0)\,,\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)\,,\ \ldots\,,\ \mathbf{e}_n = (0, \ldots, 1)$$

Pelo Teorema 6.1, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, existe uma única solução $\mathbf{y}_j(t)$ do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\,\mathbf{y} \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{e}_j \end{cases}$$

Afirmamos que as soluções $\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t), \ldots, \mathbf{y}_n(t)$ constituem uma base de $\mathcal{S}_0$. Em primeiro lugar, elas são linearmente independentes, pois se os escalares α_1, α_2, $\ldots, \alpha_n$ são tais que

$$\alpha_1\,\mathbf{y}_1(t) + \alpha_2\,\mathbf{y}_2(t) + \cdots + \alpha_n \mathbf{y}_n(t) = 0, \quad \forall t \in I,$$

então, em particular, para $t = t_0$, temos

$$\alpha_1\,\mathbf{y}_1(t_0) + \alpha_2\,\mathbf{y}_2(t_0) + \cdots + \alpha_n \mathbf{y}_n(t_0) = \alpha_1\,\mathbf{e}_1 + \alpha_2\,\mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n = 0;$$

como $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\ldots, \mathbf{e}_n$ são vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$, temos $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Logo, as funções $\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t), \ldots, \mathbf{y}_n(t)$ são linearmente independentes.

Mostremos agora que toda solução $\varphi(t)$ do sistema $\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y}$ é uma combinação linear das soluções $\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t), \ldots, \mathbf{y}_n(t)$. Em primeiro lugar, como $\mathcal{S}_0$ é um espaço vetorial, é claro que qualquer combinação linear de $\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t), \ldots, \mathbf{y}_n(t)$ é uma solução deste sistema.

Seja $\mathbf{v} = \varphi(t_0)$. Como $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, existem números c_1, $c_2, \ldots, c_n$ tais que

$$\mathbf{v} = c_1\,\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + \cdots + c_n\mathbf{e}_n$$

Consideremos a função

$$\mathbf{z}(t) = c_1\,\mathbf{y}_1(t) + c_2\,\mathbf{y}_2(t) + \cdots + c_n\,\mathbf{y}_n(t)\,.$$

Ela é uma solução do sistema $\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y}$ e satisfaz $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{v}$. Agora, a função $\varphi(t)$ também é solução deste sistema e $\varphi(t_0) = \mathbf{v}$. Como as funções $\varphi(t)$ e $\mathbf{z}(t)$ são soluções do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\,\mathbf{y} \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{v} \end{cases}$$

e como, pelo Teorema 6.1, este problema de valor inicial tem uma única solução, segue-se que $\varphi(t) = \mathbf{z}(t)$, $\forall t \in I$, isto é

$$\varphi(t) = c_1\,\mathbf{y}_1(t) + c_2\,\mathbf{y}_2(t) + \cdots + c_n\,\mathbf{y}_n(t)\,,\ \forall t \in I.$$

ou seja, a solução $\varphi(t)$ é combinação linear de $\mathbf{y}_1(t)$, $\mathbf{y}_2(t)$, $\ldots, \mathbf{y}_n(t)$.

Logo $\{\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t), \ldots, \mathbf{y}_n(t)\}$ é base do espaço vetorial $\mathcal{S}_0$ e portanto $\dim \mathcal{S}_0 = n$. $\square$

De acordo com o Teorema 6.3, se $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ são soluções linearmente independentes do sistema

$$\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x} \tag{6.14}$$

então toda solução de (6.14) é da forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1\,\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_n\,\mathbf{x}_n(t), \qquad c_1\,, \ldots, c_n \in \mathbb{R}. \tag{6.15}$$

Portanto, a função dada por (6.15) é a solução geral de (6.14).

Combinando este fato com o Teorema 6.2 e o Corolário 6.1 temos o seguinte resultado.

Corolário 6.2. *Se* $\mathbf{y}_0(t)$ *é uma* solução particular *do sistema não homogêneo*

$$\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y} + \mathbf{g}(t) \tag{6.16}$$

e se $\mathbf{x}(t) = c_1\,\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_n\,\mathbf{x}_n(t)$, $c_1\,, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, *é a solução geral do sistema homogêneo associado, então a solução geral do sistema não homogêneo (6.16) é*

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0(t) + c_1\,\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_n\,\mathbf{x}_n(t), \qquad c_1\,, \ldots, c_n \in \mathbb{R}. \tag{6.17}$$

Exemplo 6.1. *Consideremos o sistema não homogêneo*

$$\begin{cases} x' = x + 5\,y + 4\,t - 15 \\ y' = 2\,x - 2\,y - 10\,t + 8 \end{cases} \tag{6.18}$$

e o sistema homogêneo associado

$$\begin{cases} x' = x + 5\,y \\ y' = 2\,x - 2\,y \end{cases} \tag{6.19}$$

É fácil ver que as funções vetoriais $\mathbf{x}_1(t) = e^{-4\,t}\,(1,-1)^T$ *e* $\mathbf{x}_2(t) = e^{3\,t}\,(5,2)^T$ *são soluções do sistema homogêneo (6.19); então a solução geral deste sistema é*

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\,e^{-4\,t} + 5\,c_2\,e^{3\,t} \\ -c_1\,e^{-4\,t} + 2\,c_2\,e^{3\,t} \end{bmatrix}, \quad c_1\,,\,c_2 \in \mathbb{R}.$$

Como $\mathbf{y}_0(t) = (3\,t-1, -2\,t+4)^T$ *é uma solução do sistema não homogêneo (6.18), temos que a solução geral do sistema não homogêneo é*

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\,t-1+c_1\,e^{-4\,t}+5\,c_2\,e^{3\,t} \\ -2\,t+4-c_1\,e^{-4\,t}+2\,c_2\,e^{3\,t} \end{bmatrix}, \quad c_1\,,\,c_2 \in \mathbb{R}.$$

Notemos que a solução geral de (6.19) acima pode ser escrita na forma

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-4t} & 5\,e^{3\,t} \\ -e^{-4\,t} & 2\,e^{3\,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \tag{6.20}$$

e que as colunas da matriz do segundo membro de (6.20) são as soluções LI $\mathbf{y}_1(t) = e^{-4\,t}\,[\,1,\ -1\,]^T$ e $\mathbf{y}_2(t) = e^{3\,t}\,[\,5,\ 2\,]^T$ dadas acima; esta matriz desempenhará um papel importante no que segue.

Definição 6.1. *Seja* $\{\,\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)\,\}$ *uma base de soluções do sistema* $\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x}$. *A matriz* $n \times n$

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) & \dots & \mathbf{x}_n(t) \end{bmatrix} \tag{6.21}$$

chama-se **matriz fundamental** *deste sistema.*

No exemplo 6.1, uma matriz fundamental do sistema (6.19) é

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^{-4t} & 5\,e^{3\,t} \\ -e^{-4t} & 2\,e^{3\,t} \end{bmatrix}.$$

A solução geral do sistema (6.1) pode ser escrita na forma $\mathbf{X}(t)\mathbf{v}$, em que $\mathbf{v}$ é um vetor arbitrário de $\mathbb{R}^2$. Essa propriedade é verdadeira em geral: de fato, da relação (6.15) concluimos facilmente o seguinte resultado.

Teorema 6.4. *Se* $\mathbf{X}(t)$ *é uma matriz fundamental do sistema (6.14) e* $\mathbf{v}$ *denota um vetor arbitrário de* $\mathbb{R}^n$, *então a solução geral de (6.14) é* $\mathbf{X}(t)\mathbf{v}$.

6.3 Sistema homogêneo

Nosso objetivo nesta seção é obter a solução geral do sistema homogêneo

$$\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x} \tag{6.22}$$

em que A é uma matriz real constante de ordem n. Para isto, vamos adaptar o procedimento adotado para equações escalares de segunda ordem e procurar soluções de (6.22) na forma $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$. Substituindo esta expressão em (6.22), temos

$$\lambda\, e^{\lambda t}\, \mathbf{v} = A\, e^{\lambda t}\, \mathbf{v}\,. \tag{6.23}$$

Logo,

$$A\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$$

ou seja, $\mathbf{v}$ é autovetor de A com autovalor λ.

Quando a matriz A tem n autovetores linearmente independentes $\mathbf{v}_1\,, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$, correspondentes aos autovalores *reais* $\lambda_1\,, \ldots, \lambda_n$, uma matriz fundamental do sistema (6.22) é

$$\mathbf{X}(t) = \left[\, e^{\lambda_1 t}\, \mathbf{v}_1\ ,\ \ldots,\ e^{\lambda_n t}\, \mathbf{v}_n \,\right]$$

Exemplo 6.2. *Encontrar uma matriz fundamental de soluções para o sistema*

$$\begin{cases} x' = x + 5\,y \\ y' = 2\,x - 2\,y \end{cases}$$

Os autovalores da matriz dos coeficientes $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ são as raízes do polinômio característico

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0\,, \quad \text{ou seja,} \quad \lambda^2 + \lambda - 12 = 0$$

Logo, os autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -4$.

Autovetores de A associados ao autovalor $\lambda_1 = 3$: procuramos vetores $\mathbf{v} = [\,a,\ b\,]^T \neq [\,0,\ 0\,]^T$ tais que $(A - 3\,I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ou seja

$$\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{donde} \qquad 5\,b = 2\,a$$

Pondo $a = 5$, temos $b = 2$. Assim, um correspondente autovetor é $\mathbf{v} = [\,5,\ 2\,]^T$ e uma solução do sistema é $\mathbf{y}_1(t) = e^{3\,t}\,[\,5,\ 2\,]^T$.

Autovetores de A associados ao autovalor $\lambda_2 = -4$: procuramos vetores $\mathbf{v} = [\,c, d\,]^T$ tais que $(A + 4\,I)\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$, ou seja

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{donde} \qquad d = -c$$

Portanto, um correspondente autovetor é $\mathbf{v} = [\,1, -1\,]^T$ e uma solução do sistema é $\mathbf{y}_1(t) = e^{-4\,t}\,[\,1, -1\,]^T$.

Logo, uma matriz fundamental de soluções é

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} 5\,e^{3\,t} & e^{-4\,t} \\ 2\,e^{3\,t} & -e^{-4\,t} \end{bmatrix},$$

e a solução geral do sistema é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\,c_1\,e^{3\,t} + c_2\,e^{-4\,t} \\ 2c_1\,e^{3\,t} - c_2\,e^{-4\,t} \end{bmatrix}, \qquad c_1\,,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 6.3. *Encontrar a solução geral do sistema*

$$\begin{aligned} x' &= 4\,x - 3\,y - z \\ y' &= x - z \\ z' &= -4\,x + 4\,y - z \end{aligned} \tag{6.24}$$

O polinômio característico da matriz A dos coeficientes é

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ -4 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\,\lambda^2 + \lambda - 3$$

Como $p(\lambda) = (-1-\lambda)\,(1-\lambda)\,(3-\lambda)$, os autovalores de A são $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 3$.

Os autovetores associados a $\lambda_1 = -1$ são os vetores $\mathbf{v}_1 = [\,a,\ b,\ c\,]^T$ tais que $(A + I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \left\{ \begin{aligned} 5\,a - 3\,b - c &= 0 \\ a + b - c &= 0 \\ -4\,a + 4\,b &= 0 \end{aligned} \right.$$

donde obtemos $b = a\ c = 2\,a$. Portanto, um autovetor é $\mathbf{v} = [\,1, 1, 2\,]^T$, que dá a solução $\mathbf{x}_1(t) = e^{-t}\,[\,1, 1, 2\,]^T$.

Os autovetores associados a $\lambda_2 = 1$ são os vetores $\mathbf{v}_2 = [\,d,\ e,\ f\,]^T$ tais que $(A - I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, ou seja

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{r} 3d - 3e - f = 0 \\ d - e - f = 0 \\ -4d + 4e - 2f = 0 \end{array} \right.$$

Destas equações, obtemos $d = e,\ f = 0$. Portanto, um autovetor é $\mathbf{v}_2 = [\,1,\ 1,\ 0\,]^T$, que dá a solução $\mathbf{x}_2(t) = e^t\,[\,1,\ 1,\ 0\,]^T$.

Os autovetores associados a $\lambda_3 = 3$ são os vetores $\mathbf{v}_3 = [\,r,\ s,\ w\,]^T$ tais que $(A - 3\,I)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, ou seja

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \left\{ \begin{array}{r} r - 3\,s - \,w = 0 \\ r - 3\,s - \,w = 0 \\ -4\,r + 4\,s - 4\,w = 0 \end{array} \right.$$

Resolvendo este sistema, obtemos $r = -2\,w,\ s = -w$. Portanto, um autovetor é $\mathbf{v} = [\,2,\ \ 1,\ -1\,]^T$, que dá a solução $\mathbf{x}_3(t) = e^{3t}\,[\,2,\ \ 1,\ -1\,]^T$.

Logo, uma matriz fundamental para o sistema é

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} & 2\,e^{3t} \\ e^t & e^{-t} & e^{3t} \\ 0 & 2\,e^{-t} & -e^{3t} \end{bmatrix}$$

e a solução geral deste sistema é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \mathbf{X}(t) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\,e^t + \beta\,e^{-t} + 2\gamma\,e^{3t} \\ \alpha\,e^t + \beta\,e^{-t} + \gamma\,e^{3t} \\ 2\beta\,e^{-t} - \gamma\,e^{3t} \end{bmatrix}, \qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 6.4. *Encontrar uma matriz fundamental para o sistema*

$$\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -10 & 7 & -30 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{6.25}$$

Vimos no Exemplo 5.25, página 146, que os autovalores de A são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $(0, 5, 1)$ é um autovetor associado a $\lambda_1 = 1$ e que $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (0, 6, 1)$ são autovetores associados ao autovalor

$\lambda = 2$. Temos então as seguintes soluções linearmente independentes do sistema (6.25): $\mathbf{x}_1(t) = e^t \begin{bmatrix}0, & 5, & 1\end{bmatrix}^T$, $\mathbf{x}_2(t) = e^{2\,t} \begin{bmatrix}1, & 2, & 0\end{bmatrix}^T$ e $\mathbf{x}_3(t) = e^{2\,t} \begin{bmatrix}0, & 6, & 1\end{bmatrix}^T$. Logo, uma matriz fundamental para o sistema (6.25) é

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & e^{2\,t} & 0 \\ 5\,e^t & 2\,e^{2\,t} & 6\,e^{2\,t} \\ e^t & 0 & e^{2\,t} \end{bmatrix}$$

Autovalores múltiplos

É fácil ver que o fenômeno observado para o sistema (6.25) é verdadeiro em geral: se um autovalor λ_0 for uma raiz com multiplicidade k do polinômio característico e existirem k autovetores linearmente independentes associados a λ_0, então estes autovetores dão origem a k soluções linearmente independentes do sistema de equações diferenciais.

Analisemos agora o caso em que um dos autovalores da matriz A tem multiplicidade algébrica k (isto significa que o polinômio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda\, I)$ fatora-se como $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k\, q(\lambda)$) e a quantidade de autovetores linearmente independentes associados a este autovalor é menor do que a multiplicidade desta raiz. Nosso estudo das equações diferenciais escalares no Capítulo 4 sugere que procuremos as outras soluções na forma $\mathbf{p}(t)\, e^{\lambda\, t}$, em que $\mathbf{p}(t)$ é uma função polinomial cujos coeficientes são vetores de $\mathbb{R}^n$.

Se λ é um autovalor com multiplicidade algébrica $k > 1$ e $\mathbf{u}$ é um autovetor correspondente a λ, já sabemos que uma solução é $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda\, t}\, \mathbf{u}$. Vamos procurar uma outra solução do sistema na forma $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda\, t}\, (\mathbf{v} + t\, \mathbf{w})$. Substituindo no sistema (6.22), $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda\, t}\, \mathbf{v} + t\, \mathbf{w}$ e $\mathbf{x}'(t) = e^{\lambda\, t}\, (\lambda\, \mathbf{v} + \mathbf{w} + t\, \lambda\, \mathbf{w})$ e cancelando o fator comum $e^{\lambda\, t}$, temos

$$\lambda\, \mathbf{v} + \mathbf{w} + t\, \lambda\, \mathbf{w} = A\, (\mathbf{v} + t\, \mathbf{w}) = A\, \mathbf{v} + t\, A\, \mathbf{w}\,.$$

Para que esta igualdade seja verdadeira para todo t, devemos ter $A\, \mathbf{w} = \lambda\, \mathbf{w}$ e $A\, \mathbf{v} = \lambda\, \mathbf{v} + \mathbf{w}$, que escrevemos na forma mais conveniente

$$\begin{aligned} (A - \lambda\, I)\, \mathbf{w} &= \mathbf{0} \\ (A - \lambda\, I)\, \mathbf{v} &= \mathbf{w} \end{aligned} \tag{6.26}$$

A primeira destas relações nos diz que $\mathbf{w}$ é um autovetor de A; a partir de $\mathbf{v}$, obtemos o vetor $\mathbf{w}$.

Exemplo 6.5. *Encontrar a solução geral do sistema* $\begin{cases} x' = 4\,x + y \\ y' = -x + 6\,y \end{cases}$

Os autovalores da matriz dos coeficientes do sistema são dados pela equação

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 6-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(6-\lambda) + 1 = 0$$

ou $\lambda^2 - 10\,\lambda + 25 = 0$. Portanto $\lambda = 5$ é autovalor de A com multiplicidade 2. Os correspondentes autovetores $\mathbf{u} = [\,a\ b\,]^T$ satisfazem

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \quad b = a$$

Portanto, um autovetor de A é $\mathbf{u} = [\,1, 1\,]^T$, que dá a solução $\mathbf{x}_1(t) = e^{5\,t}\,[\,1, 1\,]^T$. O sistema tem uma solução da forma $\mathbf{x}_2(t) = e^{5\,t}\,(\mathbf{v} + t\,\mathbf{u})$, em que $(A - 5\,I)\,\mathbf{v} = \mathbf{u}$; escrevendo $\mathbf{v} = [\,c\ d\,]^T$ temos

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{donde} \quad d = 1 + c$$

Tomando $c = 0$, temos $d = 1$; assim, $\mathbf{v} = [\,0\ 1\,]^T$ e outra solução é

$$\mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = e^{5\,t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\,e^{5\,t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{5\,t} \begin{bmatrix} t \\ 1+t \end{bmatrix}$$

Logo, a solução geral do sistema é $\mathbf{x}(t) = \alpha\,\mathbf{x}_1(t) + \beta\,\mathbf{x}_2(t)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{5\,t} \begin{bmatrix} \alpha + \beta\,t \\ \alpha + \beta + \beta\,t \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

Caso o procedimento acima não forneça k soluções LI do sistema (6.22), procuramos soluções na forma

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda\,t}\,[\mathbf{v} + t\,\mathbf{w} + \frac{t^2}{2!}\,\mathbf{z}]$$

Substituindo no sistema (6.22), vemos que os vetores $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{z}$ devem satisfazer

$$\begin{aligned} &(A - \lambda\,I)\,\mathbf{z} = \mathbf{0} \\ &(A - \lambda\,I)\,\mathbf{w} = \mathbf{z} \\ &(A - \lambda\,I)\,\mathbf{v} = \mathbf{w}\,. \end{aligned} \tag{6.27}$$

Repetindo este procedimento, se necessário, obteremos k soluções LI do sistema (6.22).

Exemplo 6.6. *Encontrar a solução geral do sistema linear homogêneo*

$$\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{6.28}$$

É fácil ver que o polinômio característico de A é

$$p(\lambda) = (3-\lambda)^3(2-\lambda).$$

Logo, os autovalores são $\lambda_1 = 3$ (com multiplicidade 3) e $\lambda_2 = 2$.

Os autovetores $\mathbf{u} = [\,a,\ b,\ c,\ d\,]^T$ associados a $\lambda = 2$ satisfazem $(A - 2\,I)\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou seja} \quad \left\{ \begin{aligned} a - b + 2\,c - d &= 0 \\ b + c + 2\,d &= 0 \\ c + 5\,d &= 0 \end{aligned} \right.$$

e, assim, $\mathbf{u} = [\,14,\ 3,\ -5,\ 1\,]^T$ é um autovetor associado a $\lambda = 2$ e a correspondente solução do sistema (6.28) é $\mathbf{x}_1(t) = e^{2\,t}\,[\,14,\ 3,\ -5,\ 1\,]^T$.

Os autovetores $\mathbf{v} = [\,a,\ b,\ c,\ d\,]^T$ associados a $\lambda = 3$ são dados por

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou seja} \quad \left\{ \begin{aligned} -b + 2\,c - d &= 0 \\ c + 2\,d &= 0 \\ 5\,d &= 0 \end{aligned} \right.$$

donde $\mathbf{v} = a\,[\,1,\ 0,\ 0,\ 0\,]^T$ e a correspondente solução do sistema (6.28) é $\mathbf{x}_2(t) = e^{3\,t}\,[\,1,\ 0,\ 0,\ 0\,]^T$.

Para obter outra solução usamos as relações (6.26) e temos $\mathbf{x}_3(t) = e^{3\,t}\big([\,0,\ -1,\ 0,\ 0\,]^T + t\,[\,1,\ 0,\ 0,\ 0\,]^T\big) = e^{3\,t}\,[\,t,\ -1,\ 0,\ 0\,]^T$.

Para obter uma terceira solução correspondente ao autovalor $\lambda = 3$, usamos as relações (6.27) e temos $\mathbf{x}_4(t) = e^{3\,t}\big([\,0,\ -2,\ -1,\ 0\,]^T + t\,[\,0,\ -1,\ 0,\ 0\,]^T + (t^2/2)\,[\,1,\ 0,\ 0,\ 0\,]^T\big) = e^{3\,t}\,[\,t^2/2,\ -2-t,\ -1,\ 0\,]^T$.

Logo, a solução geral do sistema (6.28) é

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 14\,a\,e^{2\,t} + (b + c\,t + d\,t^2/2)\,e^{3\,t} \\ 3\,a\,e^{2\,t} + (-c - 2\,d - d\,t)\,e^{3\,t} \\ -5\,a\,e^{2\,t} - d\,e^{3\,t} \\ a\,e^{2\,t} \end{bmatrix}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}\,.$$

Autovalores Complexos

Analisemos agora o caso em que um autovalor de A tem parte imaginária diferente de zero. Estamos assumindo que a matriz A é real. Os próximos lemas indicam como obter soluções reais para o sistema.

Em primeiro lugar, mostramos que autovalores e autovetores complexos ocorrem aos pares.

Lema 6.1. *Seja A uma matriz real $n \times n$. Então:*
(a) *Se $\mathbf{v}$ é autovetor de A com autovalor λ, então $\bar{\mathbf{v}}$ é autovetor com autovalor $\bar{\lambda}$.*
(b) *Se $\mathbf{v} = \mathbf{u} + i\,\mathbf{w}$, com $\mathbf{u}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, é autovetor associado a um autovalor complexo λ com parte imaginária não nula, então $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ são linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração: (a) Se $A\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$, então, tomando conjugado complexo nos dois membros desta igualdade, temos $\overline{A\,\mathbf{v}} = \overline{\lambda\,\mathbf{v}}$. Como $\overline{A\,\mathbf{v}} = \bar{A}\,\bar{\mathbf{v}} = A\,\bar{\mathbf{v}}$ e $\overline{\lambda\,\mathbf{v}} = \bar{\lambda}\,\bar{\mathbf{v}}$, segue-se que $A\,\bar{\mathbf{v}} = \bar{\lambda}\,\bar{\mathbf{v}}$. Logo, $\bar{\mathbf{v}}$ é autovetor de A com autovalor $\bar{\lambda}$.
(b) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ fossem linearmente dependentes, um deles seria múltiplo do outro: analisaremos apenas o caso $\mathbf{w} = k\,\mathbf{u}$ (o caso $\mathbf{u} = k\,\mathbf{w}$ é análogo). Então, como $\mathbf{v} = (1 + i\,k)\,\mathbf{u}$ é autovetor com autovalor $\lambda = \alpha + i\,\beta$, temos

$$(1 + i\,k)\,A\mathbf{u} = \lambda(1 + i\,k)\,\mathbf{u}$$

donde, cancelando $1+i\,k$, obtemos $A\mathbf{u} = \lambda\,\mathbf{u}$, uma igualdade impossível, uma vez que o primeiro membro pertence a $\mathbb{R}^n$ e o segundo membro é um vetor cujas componentes têm partes imaginárias não nulas. Logo, os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ são linearmente independentes.

Lema 6.2. *Seja A uma matriz $n \times n$ real, e sejam $\mathbf{f}(t)$ e $\mathbf{g}(t)$ funções vetoriais reais contínuas. Se $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) + i\,\mathbf{y}(t)$, em que $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ são* *funções vetoriais reais, é uma solução do sistema*

$$\mathbf{z}' = A\,\mathbf{z} + \mathbf{f}(t) + i\,\mathbf{g}(t),$$

então $\mathbf{x}$ *é solução de*

$$\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$$

e $\mathbf{y}(t)$ *é solução de*

$$\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y} + \mathbf{g}(t)\,.$$

Em particular, para $\mathbf{f} = \mathbf{g} = \mathbf{0}$*, temos: se* $\mathbf{z}(t)$ *é uma solução complexa do sistema homogêneo* $\mathbf{z}' = A\,\mathbf{z}$*, então* $\mathbf{x}(t)$ *e* $\mathbf{y}(t)$ *são soluções reais deste sistema.*

Demonstração: Como $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) + i\,\mathbf{y}(t)$, temos

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{x}'(t) + i\,\mathbf{y}'(t) \quad \text{e} \quad \mathbf{z}'(t) = A\mathbf{x}(t) + i\,A\mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(t) + i\,\mathbf{g}(t),$$

donde

$$\mathbf{x}'(t) + i\,\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) + i\,[A\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(t)].$$

Igualando partes reais e partes imaginárias, obtemos

$$\mathbf{x}'(t) = A\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{y}'(t) = A\,\mathbf{y}(t) + i\,\mathbf{g}(t)\,.$$

A afirmação para o sistema homogêneo é conseqüência direta do caso não homogêneo.

Lema 6.3. *Seja* A *uma matriz* $n \times n$ *real. Se* $\mathbf{v} = \mathbf{u} + i\,\mathbf{w}$ *é um autovetor de* A *associado ao autovalor* $\lambda = \alpha + i\,\beta$*, em que* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, com* $\beta \neq 0$ *e* $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$*, então as funções*

$$e^{\alpha\,t}(\mathbf{u}\cos\beta\,t - \mathbf{w}\,\text{sen}\,\beta\,t) \qquad e \qquad e^{\alpha\,t}(\mathbf{u}\,\text{sen}\,\beta\,t + \mathbf{w}\cos\beta\,t)$$

são soluções linearmente independentes do sistema $\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x}$*.*

Demonstração: Pelo Lema 6.2, a solução complexa

$$e^{\lambda\,t}\mathbf{v} = e^{\alpha\,t}\big[(\mathbf{u}\cos\beta\,t - \mathbf{w}\,\text{sen}\,\beta\,t) + i\,(\mathbf{u}\,\text{sen}\,\beta\,t + \mathbf{w}\cos\beta\,t)\big]$$

dá origem às soluções reais

$$\mathbf{x}(t) = e^{\alpha\,t}(\mathbf{u}\cos\beta\,t - \mathbf{w}\,\text{sen}\,\beta\,t) \quad \text{e} \quad \mathbf{y}(t) = e^{\alpha\,t}(\mathbf{u}\,\text{sen}\,\beta\,t + \mathbf{w}\cos\beta\,t).$$

Como $\mathbf{x}(0) = \mathbf{u}$ e $\mathbf{y}(0) = \mathbf{w}$ são vetores linearmente independentes, segue-se que as funções vetoriais $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ também o são.

Exemplo 6.7. *Encontrar uma matriz fundamental para o sistema*

$$\begin{cases} x' = 3\,x + 4\,y \\ y' = -2\,x + 7\,y\,. \end{cases}$$

O polinômio característico é

$$\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -2 & 7-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 29\,.$$

Portanto os autovalores são $\lambda_1 = 5 + 2\,i$ e $\lambda_2 = 5 - 2\,i$. Os autovetores associados a $\lambda_1 = 5 + 2\,i$ são os vetores $\mathbf{v} = [\,a, b\,]^T$ tais que

$$\begin{bmatrix} -2-2\,i & 4 \\ -2 & 2-2\,i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou seja} \quad a = (1-i)\,b\,.$$

Portanto, um autovetor é $\mathbf{v} = [\,1-i, 1\,]^T$, que fornece a solução complexa

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= e^{(5+2\,i)t} \begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix} = e^{5t}(\cos 2t + i\,\mathrm{sen}\,2t)\Big(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Big) \\ &= e^{5\,t}\left(\cos 2\,t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \mathrm{sen}\,2\,t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \\ &\quad + i\,e^{5\,t}\left(\mathrm{sen}\,2\,t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \cos 2\,t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= e^{5\,t} \begin{bmatrix} \cos 2\,t + \mathrm{sen}\,2\,t \\ \cos 2\,t \end{bmatrix} + i\,e^{5\,t} \begin{bmatrix} \mathrm{sen}\,2\,t - \cos 2\,t \\ \mathrm{sen}\,2\,t \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

que dá origem às soluções reais linearmente independentes

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} = e^{5t} \begin{bmatrix} \cos 2t + \mathrm{sen}\,2t \\ \cos 2t \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = e^{5t} \begin{bmatrix} \mathrm{sen}\,2t - \cos 2t \\ \mathrm{sen}\,2t \end{bmatrix}.$$

Logo, uma matriz fundamental de soluções reais é

$$\mathbf{X}(t) = e^{5\,t} \begin{bmatrix} \cos 2\,t + \mathrm{sen}\,2\,t & \mathrm{sen}\,2\,t - \cos 2\,t \\ \cos 2\,t & \mathrm{sen}\,2\,t \end{bmatrix}.$$

6.4 Sistema não homogêneo

Nesta seção estudamos sistemas não homogêneos

$$\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y} + \mathbf{f}(t) \tag{6.29}$$

em que A é uma matriz constante e $\mathbf{f}(t)$ é uma função vetorial definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ com valores em $\mathbb{R}^n$. De acordo com o princípio de superposição, a solução geral do sistema (6.29) é a soma de uma solução particular de (6.29) com a solução geral do sistema homogêneo associado

$$\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x}\,.$$

Para encontrar uma solução particular do sistema (6.29), temos o método dos coeficientes a determinar e a fórmula de variação das constantes, que apresentamos a seguir.

6.5 Método dos coeficientes a determinar

As considerações sobre o método dos coeficientes a determinar para sistemas de equações diferenciais escalares são essencialmente as mesmas vistas para equações escalares.

Exemplo 6.8. *Encontrar a solução geral do sistema linear não homogêneo*

$$\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y} + e^{-t}\,\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{y} + e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Analisemos primeiro o sistema homogêneo associado. O polinômio característico da matriz A é

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\,\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)\,.$$

Portanto, os autovalores de A são 2 e 3. Os autovetores $\mathbf{z} = [\,a,\ b\,]$ de A associados ao autovalor 2 são dados por

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad a = 2\,b.$$

Portanto $\mathbf{z} = [\,2,\ 1\,]^T$ e uma solução é $\mathbf{x}_1(t) = e^{2\,t}\,[\,2,\ 1\,]^T$.

Os autovetores $\mathbf{z} = [\,c,\ d\,]^T$ de A associados a $\lambda = 3$ são dados por

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad d = c.$$

Portanto $\mathbf{z} = [\,1\ 1\,]^T$ e uma solução é $\mathbf{x}_2(t) = e^{3\,t}\,[\,1,\ 1\,]^T$.

Logo, a solução geral do sistema homogêneo associado é

$$\mathbf{x}_H(t) = \begin{bmatrix} 2\,a\,e^{2\,t} + b\,e^{3\,t} \\ a\,e^{2\,t} + b\,e^{3\,t} \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Como -1 não é autovalor de A, procuraremos uma solução particular do sistema na forma $\mathbf{y}_p(t) = e^{-t}\,[\,a\ b\,]^T$. Substituindo esta expressão na equação, temos

$$-e^{-t} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} 2\,a + 2\,b = 0 \\ -a + 5\,b = -6 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad a = 1\,, \quad b = -1\,.$$

Portanto

$$\mathbf{y}_p(t) = e^{-t}\,[1\ \ -1\,]^T.$$

Logo, a solução geral do sistema não homogêneo é

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} + 2\,a\,e^{2\,t} + b\,e^{3\,t} \\ -e^{-t} + a\,e^{2\,t} + b\,e^{3\,t} \end{bmatrix}, \; a, b \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 6.9. *Encontrar a solução geral do sistema linear não homogêneo*

$$\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y} + \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 2\cos t \\ -3\,\text{sen}\ t \end{bmatrix}. \tag{6.30}$$

O polinômio característico de A é

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = [\,\lambda - (\,1+i\,)\,]\,[\,\lambda - (\,1-i\,)\,]\,.$$

Os autovetores $\mathbf{v} = [\,a,\ b\,]^T$ associados a $\lambda = 1 + i$ são dados por

$$\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad a = i\,b\,.$$

Portanto, um autovetor é $\mathbf{v} = [\,i,\ 1\,]^T$ que dá a solução complexa

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= e^{(1+i)\,t} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = e^t\,(\cos\,t + i\,\mathrm{sen}\;t)\Big(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Big) \\ &= \begin{bmatrix} e^t\,(-\mathrm{sen}\;t + i\,\cos\,t) \\ e^t\,(\cos\,t + i\,\mathrm{sen}\;t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^t\,\mathrm{sen}\;t \\ e^t\,\cos\,t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} e^t\,\cos\,t \\ e^t\,\mathrm{sen}\;t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A parte real e a parte imaginária de $\mathbf{z}(t)$ são soluções reais linearmente independentes deste sistema. Logo, a solução real geral do sistema homogêneo é

$$\mathbf{x}_H(t) = e^t \begin{bmatrix} -a\,\mathrm{sen}\;t + b\,\cos\,t \\ a\,\cos\,t + b\,\mathrm{sen}\;t \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Analisemos agora o sistema não homogêneo. Vamos procurar uma solução deste sistema na forma

$$\mathbf{y}_p(t) = \begin{bmatrix} a\,\cos\,t + b\,\mathrm{sen}\;t \\ c\,\cos\,t + d\,\mathrm{sen}\;t \end{bmatrix}.$$

Substituindo esta expressão nas equações diferenciais, obtemos o sistema algébrico

$$\begin{cases} a - b - c \phantom{{}-d} = -2 \\ a + b \phantom{{}+c} - d = 0 \\ a \phantom{{}+b} + c - d = 0 \\ \phantom{a+{}} b + c + d = 3\,, \end{cases}$$

cujas soluções são $a = 0,\ \ b = c = d = 1$. Logo, uma solução particular do sistema é

$$\mathbf{y}_p(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{sen}\;t \\ \cos\,t + \mathrm{sen}\;t \end{bmatrix}.$$

e a solução geral do sistema não homogêneo é

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{sen}\;t + e^t\,(-a\,\mathrm{sen}\;t + b\,\cos\,t) \\ \cos\,t + \mathrm{sen}\;t + e^t\,(a\,\cos\,t + b\,\cos\,t) \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Observação 6.1. *Outro modo de calcular uma solução particular para o sistema não homogêneo é notar que o termo forçante* $[\,2\cos t,\ -3\,\mathrm{sen}\ t\,]$ *é a parte real da função complexa* $e^{i\,t}\,[\,2,\ 3\,i\,]^T$*, resolver a equação com valores complexos e tomar a parte real da solução obtida.*

Procuremos uma solução particular do sistema (6.30) na forma $\mathbf{z}_p(t) = e^{i\,t}\,[\,z,\ w\,]^T$ (em que z e w são constantes complexas a serem determinadas. Substituindo no sistema (6.30), temos

$$i\,e^{i\,t}\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = e^{i\,t}\begin{bmatrix} z-w \\ z+w \end{bmatrix} + e^{i\,t}\begin{bmatrix} 2 \\ 3\,i \end{bmatrix}.$$

Cancelando $e^{i\,t}$ e agrupando os termos semelhantes, obtemos o sistema

$$\begin{cases} (1-i)\,z - w = -2 \\ z + (1-i)\,w = -3\,i\,. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema de equações, obtemos $z = -i$ e $w = 1-i$. Então uma solução complexa do sistema (6.30) é

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_p(t) = e^{i\,t}\begin{bmatrix} -i \\ 1-i \end{bmatrix} &= (\cos\,t + i\,\mathrm{sen}\ t)\begin{bmatrix} -i \\ 1-i \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathrm{sen}\ t \\ \cos\,t + \mathrm{sen}\ t \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} -\cos\,t \\ \mathrm{sen}\ t - \cos\,t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, a solução particular procurada é $\mathbf{x}(t) = (\mathrm{sen}\ t, \mathrm{sen}\ t + \cos\,t)^T$.

Notemos que a função vetorial $\mathbf{y}(t) = [\,-\cos\,t\,,\ \mathrm{sen}\ t - \cos\,t\,]^T$, parte imaginária da solução $\mathbf{z}_p$, é solução do sistema $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x} + [\,2\,\mathrm{sen}\ t,\ 3\,\cos\,t\,]^T$ (este sistema é *parte imaginária* do sistema $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x} + e^{i\,t}\,[\,2,\ 3\,i\,]^T$). □

Como no caso das equações escalares não homogêneas, para procurar uma solução particular do sistema

$$\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x} + p(t)\,e^{\gamma\,t}\,\mathbf{w}\,, \tag{6.31}$$

em que $p(t)$ é um polinômio, pode ser vantajoso escrever $\mathbf{x}(t) = e^{\gamma\,t}\,\mathbf{v}(t)$. Esta mudança transforma o sistema (6.31) no sistema

$$\mathbf{v}' = (A - \gamma\,I)\,\mathbf{v} + p(t)\,\mathbf{w} \tag{6.32}$$

Exemplo 6.10. *Encontrar a solução geral do sistema linear não homogêneo*

$$\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y} + e^t\,\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y} + e^t \begin{bmatrix} -10 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de A é

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = (\lambda - 3)(\lambda + 1).$$

Os autovetores $\mathbf{v} = [\,a,\ b\,]^T$ associados ao autovalor -1 são dados por

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad a = -2\,b.$$

Portanto, um autovetor é $\mathbf{v} = [\,-2,\ 1\,]$ que dá a solução

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Os autovetores $\mathbf{v} = [\,a,\ b\,]^T$ associados ao autovalor 3 são dados por

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad a = 2\,b.$$

Portanto, um autovetor é $\mathbf{v} = [\,2,\ 1\,]$ que dá a solução

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{3\,t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Consideremos agora o sistema não homogêneo. Fazendo $\mathbf{x}(t) = e^t\,\mathbf{v}(t)$, temos $\mathbf{x}' = e^t\,(\,\mathbf{v}' + \mathbf{v}\,)$. Substituindo no sistema e cancelando o fator comum e^t, temos $\mathbf{v}' + \mathbf{v} = A\,\mathbf{v} + \mathbf{u}$, ou

$$\mathbf{v}' = (A - I)\,\mathbf{v} + \mathbf{u}.$$

O sistema tem uma solução na forma $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0$: substituindo na equação, temos $\mathbf{v}_0 = (A-I)^{-1}\,\mathbf{u} = [\,2\,,\,5\,]^T$. Logo, uma solução particular do sistema não homogêneo é $\mathbf{x}(t) = e^t\,[\,2\,,\,5\,]^T$ e a solução geral do sistema é $\mathbf{x}(t) = c_1\,e^{-t}\,[-2\,,\,1\,]^T + c_2\,e^{3\,t}\,[\,2\,,\,1\,]^T + e^t\,[\,2\,,\,5\,]^T$, ou seja,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -2\,c_1\,e^{-t} + 2\,c_2\,e^{3\,t} + 2\,e^t \\ c_1\,e^{-t} + c_2\,e^{3\,t} + 5\,e^t \end{bmatrix}, \qquad c_1\,,\,c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 6.11. *Encontrar a solução geral do sistema linear não homogêneo*

$$\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y} + t\,e^{2\,t}\,\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{y} + t\,e^{2\,t} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Vimos no Exemplo 6.8 que a solução geral do sistema homogêneo associado é $\mathbf{x}_H(t) = a\,e^{2\,t}\,[\,2,1\,]^T + b\,e^{3\,t}\,[\,1,1\,]^T$, $a, b \in \mathbb{R}$. Como o sistema homogêneo associado tem uma solução da forma $e^{2\,t}\mathbf{z}$, procuraremos solução particular deste sistema na forma

$$\mathbf{y}_p(t) = e^{2\,t}(\mathbf{u} + t\,\mathbf{v} + \frac{t^2}{2}\,\mathbf{w}).$$

Então $\mathbf{y}_p'(t) = e^{2\,t}\big[(2\,\mathbf{u} + \mathbf{v}) + t\,(2\,\mathbf{v} + \mathbf{w}) + t^2\,\mathbf{w}\big]$ e $A\,\mathbf{y}_p + t\,e^{2\,t}\,\mathbf{z} = e^{2\,t}\big[A\mathbf{u} + t\,(A\mathbf{v} + \mathbf{z}) + (t^2/2)\,A\mathbf{w}\big]$. Igualando estas expressões de $\mathbf{y}_p'(t)$ e $A\,\mathbf{y}_p + t\,e^t\,\mathbf{z}$, vemos que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ precisam satisfazer

$$(\,A - 2\,I\,)\,\mathbf{w} = \mathbf{0} \tag{6.33}$$

$$(\,A - 2\,I\,)\,\mathbf{v} = \mathbf{w} - \mathbf{z} \tag{6.34}$$

$$(\,A - 2\,I\,)\,\mathbf{u} = \mathbf{v}\,. \tag{6.35}$$

De (6.33) vemos que $\mathbf{w}$ precisa ser um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda = 2$, ou seja, $\mathbf{w} = [\,2\,\alpha,\ \alpha\,]^T$, para algum α; sejam $\mathbf{v} = [\,a,\ b\,]^T$ e $\mathbf{u} = [\,c,\ d\,]^T$. A equação (6.34) é

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,\alpha - 1 \\ \alpha - 5 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -a + 2\,b = 2\,\alpha - 1 \\ -a + 2\,b = \alpha - 5\,. \end{cases}$$

Para que este sistema tenha solução, devemos ter $2\,\alpha - 1 = \alpha - 5$, ou $\alpha = -4$; portanto, $\mathbf{w} = [\,-8,\ -4\,]^T$. Para $\alpha = -4$, temos $a = 2\,b + 9$; portanto $\mathbf{v} = [\,2\,b + 9,\ \ b\,]^T$. Substituindo este valor em (6.35), temos

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,b + 9 \\ b \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -c + 2\,d = 2\,b + 9 \\ -c + 2\,d = b\,. \end{cases}$$

Para que este sistema tenha solução, devemos ter $2\,b + 9 = b$, ou $b = -9$; portanto, $\mathbf{v} = [\,-9,\ -9\,]^T$. Para este valor de b, temos $c = 2\,d + 9$; portanto $\mathbf{u} = [\,2\,d + 9,\ \ d\,]^T = d\,[\,2,\ \ 1\,]^T + [\,9,\ \ 0\,]^T$ (cada escolha de d fornece uma solução particular para o sistema; estas soluções diferem uma da outra por uma parcela da forma $d\,e^{2t}\,[\,2,\ 1\,]^T$, que é uma solução do sistema homogêneo). Escolhendo $d = -4$, temos $\mathbf{u} = [\,1,\ -4\,]^T$ e uma solução particular é

$$\mathbf{y}_p(t) = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 - 9t - 4t^2 \\ -4 - 9t - 2t^2 \end{bmatrix}.$$

Logo, a solução geral do sistema não homogêneo é

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t}\,(2a + 1 - 9t - 4t^2) + b\,e^{3t} \\ e^{2t}\,(a - 4 - 9t - 2t^2) + b\,e^{3t} \end{bmatrix}, \qquad a,\, b \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 6.12. *Encontrar a solução do sistema linear não homogêneo*

$$\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x} + e^{3t}\,\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{y} + e^{3t}\begin{bmatrix} -10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tal que $\mathbf{x}(0) = [\,2\ ,\ 1\,]^T$.

No Exemplo 6.10, vimos que a solução geral do sistema homogêneo associado é

$$\mathbf{x}_H(t) = \begin{bmatrix} -2\,c_1\,e^{-t} + 2\,c_2\,e^{3t} \\ c_1\,e^{-t} + c_2\,e^{3t} \end{bmatrix}$$

Vamos procurar uma solução particular do sistema não homogêneo fazendo $\mathbf{x}(t) = e^{3t}\,\mathbf{v}(t)$; temos $\mathbf{x}' = e^{3t}\,(\,\mathbf{v}' + 3\,\mathbf{v}\,)$. Substituindo no sistema e cancelando o fator comum e^{3t}, temos $\mathbf{v}' + 3\,\mathbf{v} = A\,\mathbf{v} + \mathbf{u}$, ou

$$\mathbf{v}' = (A - 3\,I)\,\mathbf{v} + \mathbf{u}\,.$$

Como a matriz $A - 3\,I$ é não invertível (pois 3 é autovalor de A), procuramos uma solução do sistema na forma $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1\,t$: substituindo na equação, temos

$$\mathbf{v}_1 = (A - 3\,I)\,\mathbf{v}_0 + t\,(A - 3\,I)\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}\,, \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

Para que a igualdade acima seja verdadeira para todo t, devemos ter $(A - 3\,I)\,\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, ou seja $\mathbf{v}_1$ é um conveniente autovetor de A associado ao autovalor $\lambda = 3$, isto é, $\mathbf{v}_1 = [\,2\,\alpha, \alpha\,]^T$ e $\mathbf{v}_0 = [\,a\ ,\ b\,]^T$ deve satisfazer $\mathbf{v}_1 = (A - 3\,I)\,\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 2\,\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} -2\,a + 4\,c = 2\,\alpha - 10 \\ a - 2\,c = \alpha - 1 \end{cases}$$

Para que este sistema tenha solução devemos ter $\alpha = -3$. Para $\alpha = -3$, este sistema reduz-se à equação $a - 2\,b = -4$: para $b = 0$, temos $a = -4$. Assim, uma solução particular do sistema não homogêneo é $\mathbf{x}(t) = e^{3\,t}\,[-4 - 6\,t\,,\,-3\,t\,]^T$ e a solução geral do sistema é $\mathbf{x}(t) = c_1\,e^{-t}\,[-2\,,\,1\,]^T + c_2\,e^{3\,t}\,[\,2\,,\,1\,]^T + e^{3\,t}\,[-4 - 6\,t\,,\,-3\,t\,]^T$, ou seja,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -2\,c_1\,e^{-t} + 2\,c_2\,e^{3\,t} - (4 + 6\,t)\,e^{3\,t} \\ c_1\,e^{-t} + c_2\,e^{3\,t} - 3\,t\,e^{3\,t} \end{bmatrix}$$

Impondo a condição inicial $\mathbf{x}(0) = [\,2\ ,\ 1\,]$, obtemos $c_1 = -1$ e $c_2 = 2$. Logo, a solução do PVI é

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2\,e^{-t} + 2\,e^{3\,t} - (4 + 6\,t)\,e^{3\,t} \\ -e^{-t} + 2\,e^{3\,t} - 3\,t\,e^{3\,t} \end{bmatrix}.$$

6.6 Fórmula de variação das constantes

De acordo com o Teorema 6.4, página 160, se $\mathbf{X}(t) = \big[\,\mathbf{x}_1(t)\ \ldots, \mathbf{x}_n(t)\big]$ é uma matriz fundamental do sistema linear homogêneo $\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x}$, então toda solução desse sistema é da forma $\mathbf{X}(t)\,\mathbf{v}$, para algum vetor constante $\mathbf{v}$.

Consideremos agora o sistema não homogêneo

$$\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y} + \mathbf{g}(t) \tag{6.36}$$

em que $\mathbf{g}(t)$ é uma função contínua num intervalo I. Vamos procurar uma solução deste sistema na forma $\mathbf{y}(t) = \mathbf{X}(t)\,\mathbf{u}(t)$, em que $\mathbf{u}(t)$ é uma função continuamente derivável. Então $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{X}'(t)\,\mathbf{u}(t) + \mathbf{X}(t)\,\mathbf{u}'(t)$. Substituindo no sistema (6.36), temos

$$\mathbf{X}'(t)\,\mathbf{u}(t) + \mathbf{X}(t)\,\mathbf{u}'(t) = A\,\mathbf{X}(t)\,\mathbf{u}(t) + \mathbf{g}(t)\,. \tag{6.37}$$

Como $\mathbf{X}(t)$ é matriz fundamental do sistema $\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x}$, temos

$$\mathbf{X}'(t) = \big[\,\mathbf{x}_1'(t)\ \ldots, \mathbf{x}_n'(t)\big] = \big[A\,\mathbf{x}_1(t)\ \ldots, A\,\mathbf{x}_n(t)\big] = A\,\mathbf{X}(t).$$

Substituindo essa igualdade em (6.37), temos

$$A\,\mathbf{X}(t)\,\mathbf{u}(t) + \mathbf{X}(t)\,\mathbf{u}'(t) = A\,\mathbf{X}(t)\,\mathbf{u}(t) + \mathbf{g}(t)$$

donde obtemos

$$\mathbf{X}(t)\,\mathbf{u}'(t) = \mathbf{g}(t). \tag{6.38}$$

ou

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{X}^{-1}(t)\,\mathbf{g}(t). \tag{6.39}$$

Integrando essa igualdade, temos

$$\mathbf{u}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{X}^{-1}(s)\,\mathbf{g}(s)\,ds$$

em que $t_0 \in I$ é um instante fixado; como procuramos uma solução particular, estamos tomando $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{0}$. Logo, uma solução do sistema não homogêneo (6.36) é

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{X}(t)\,\mathbf{u}(t) = \mathbf{X}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{X}^{-1}(s)\,\mathbf{g}(s)\,ds. \tag{6.40}$$

A igualdade (6.40) fornece uma solução do sistema linear não homogêneo a partir da matriz fundamental do sistema homogêneo correspondente e uma integração. Combinando (6.40) com o Corolário 6.2, página 159, vemos que, se $\mathbf{v}$ designa um vetor arbitrário em $\mathbb{R}^n$, então a solução geral do sistema não homogêneo (6.36) é

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{X}(t)\,\mathbf{v} + \mathbf{X}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{X}^{-1}(s)\,\mathbf{g}(s)\,ds, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

e a solução $\mathbf{y}(t)$ de (6.36) tal que $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{X}(t)\,\mathbf{X}^{-1}(t_0)\,\mathbf{y}_0 + \mathbf{X}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{X}^{-1}(s)\,\mathbf{g}(s)\,ds.$$

Exemplo 6.13. *Usando a fórmula de variação das constantes, encontrar uma solução particular do sistema linear não homogêneo*

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{y} + e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Vimos no exemplo 6.8 que uma matriz fundamental do sistema homogêneo é

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} 2\,e^{2\,t} & e^{3\,t} \\ e^{2\,t} & e^{3\,t} \end{bmatrix};$$

sua inversa é

$$\mathbf{X}^{-1}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2\,t} & -e^{-2\,t} \\ -e^{-3\,t} & 2\,e^{-3\,t} \end{bmatrix}.$$

Pela fórmula de variação das constantes, uma solução particular do sistema não homogêneo é

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= \mathbf{X}(t) \int_0^t \mathbf{X}^{-1}(s)\, e^{-s}\, \mathbf{z}\, ds = \\
&= \begin{bmatrix} 2\,e^{2\,t} & e^{3\,t} \\ e^{2\,t} & e^{3\,t} \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2\,s} & -e^{-2\,s} \\ -e^{-3\,s} & 2\,e^{-3\,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} e^{-s}\, ds = \\
&= \begin{bmatrix} 2\,e^{2\,t} & e^{3\,t} \\ e^{2\,t} & e^{3\,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\,(e^{-3\,t} - 1) \\ -3\,(e^{-4\,t} - 1) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} e^{-t} - 4\,e^{2\,t} - 3\,e^{3\,t} \\ -e^{-t} - 2\,e^{2\,t} - 3\,e^{3\,t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2\,e^{2\,t} \\ e^{2\,t} \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} e^{3\,t} \\ e^{3\,t} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Exemplo 6.14. *Encontrar uma solução particular do sistema linear não homogêneo*

$$\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y} + \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} \sec t \\ -\text{cossec } t \end{bmatrix}. \tag{6.41}$$

O polinômio característico de A é

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\,(\lambda + 1) + 2 = \lambda^2 + 1\,.$$

Os autovetores $\mathbf{v} = [\,a,\ b\,]^T$ associados ao autovalor i são dados por

$$\begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad b = (1-i)\,a\,.$$

Portanto, um autovetor é $\mathbf{v} = [\,1,\ 1-i\,]^T$ e uma solução complexa é

$$\begin{aligned}\mathbf{z}(t) = e^{i\,t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix} &= (\cos\,t + i\,\mathrm{sen}\,t)\Big(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\Big) \\ &= \begin{bmatrix} \cos\,t \\ \mathrm{sen}\,t + \cos\,t \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} \mathrm{sen}\,t \\ \mathrm{sen}\,t - \cos\,t \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

A parte real e a parte imaginária de $\mathbf{z}(t)$ são soluções reais linearmente independentes do sistema homogêneo. Logo, uma matriz fundamental do sistema homogêneo é

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{sen}\,t & \cos\,t \\ \mathrm{sen}\,t - \cos\,t & \mathrm{sen}\,t + \cos\,t \end{bmatrix}$$

e sua inversa é

$$\mathbf{X}^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \cos\,t + \mathrm{sen}\,t & -\cos\,t \\ \cos\,t - \mathrm{sen}\,t & \mathrm{sen}\,t \end{bmatrix}$$

Substituindo em (6.39), temos

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{X}^{-1}(t)\,\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} \cos\,t + \mathrm{sen}\,t & -\cos\,t \\ \cos\,t - \mathrm{sen}\,t & \mathrm{sen}\,t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sec\,t \\ -\mathrm{cossec}\,t \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \mathrm{tg}\,t + \mathrm{cotg}\,t \\ -\mathrm{tg}\,t \end{bmatrix}$$

Integrando (e omitindo as constantes de integração, pois procuramos uma solução particular), temos

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} t + \ln|\sec\,t| + \ln|\mathrm{sen}\,t| \\ \ln|\cos\,t| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t + \ln|\mathrm{tg}\,t| \\ \ln|\cos\,t| \end{bmatrix}$$

Logo, uma solução particular do sistema é

$$\mathbf{x}_p(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{sen}\,t\,(t + \ln|\mathrm{tg}\,t|) + \cos\,t\,\ln|\cos\,t| \\ (\mathrm{sen}\,t - \cos\,t)\,(t + \ln|\mathrm{tg}\,t|) + (\mathrm{sen}\,t + \cos\,t)\,(\ln|\cos\,t|) \end{bmatrix}.$$

Consideremos uma equação diferencial de segunda ordem

$$z'' + p\,z' + q\,z = f(t). \qquad (6.42)$$

Definindo as variáveis $y_1 = z$ e $y_2 = z'$ podemos escrever esta equação como um sistema de equações de primeira ordem

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -q\,y_1 - p\,y_2 + f(t) \end{cases}$$

ou

$$\mathbf{y}(t) = A\,\mathbf{y} + \mathbf{g}(t) \tag{6.43}$$

em que

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}.$$

Se $z_1(t)$ e $z_2(t)$ são duas soluções linearmente independentes da equação (6.42), uma matriz fundamental do sistema (6.43) é

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ z_1'(t) & z_2'(t) \end{bmatrix}.$$

Escrevendo $\mathbf{u}(t) = \big[\, u_1(t)\,,\ u_2(t) \,\big]^T$, a igualdade (6.38) fica

$$\begin{cases} u_1'(t)\,z_1(t) + u_2'(t)\,z_2(t) = 0 \\ u_1'(t)\,z_1'(t) + u_2'(t)\,z_2'(t) = f(t)\,, \end{cases}$$

que coincide com as condições vistas no estudo de equações escalares de segunda ordem.

Exercício 6.1. *Para cada um dos sistemas abaixo, encontre uma matriz fundamental e a solução geral:*

(a) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$ $\qquad$ (b) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

(c) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{x}$ $\qquad$ (d) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

$$(e)\ \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (f)\ \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$(g)\ \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (h)\ \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$(i)\ \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (j)\ \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Exercício 6.2. *Resolva os seguintes problemas de valor inicial:*

$$(a) \begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 4\,x + y, \\ x(0) = 2,\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} x' = x - y, \\ y' = 5\,x - 3\,y, \\ x(0) = 1,\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x' = 3\,x + 8\,y, \\ y' = -x - 3\,y, \\ x(0) = 6,\ y(0) = -2 \end{cases} \qquad (d) \begin{cases} x' = -y, \\ y' = x, \\ x(0) = 1,\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x' = 4\,x - 5\,y, \\ y' = x, \\ x(0) = 0,\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (f) \begin{cases} x' = x + y + t, \\ y' = x - 2\,y + 2\,t, \\ x(0) = 7/9,\ y(0) = -5/9 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} x' = y + z \\ y' = x + z \\ z' = y + z \\ x(0) = z(0) = 0, \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (h) \begin{cases} x' = y + z \\ y' = 3\,x + z \\ z' = 3\,x + y \\ x(0) = y(0) = 1 \\ z(0) = 0\,. \end{cases}$$

Exercício 6.3. *Resolva os seguintes problemas de valor inicial:*

(a) $\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x}$, *$A$ é dada no exercício 6.1* (h) *e* $\mathbf{x}(0) = (1,\,2,\,-1,\,1)^T$

(b) $\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x}$, *$A$ é dada no exercício 6.1* (g) *e* $\mathbf{x}(0) = (1,\,1,\,2)^T$

$$(c)\ \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}\,; \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Capítulo 7

Transformada de Laplace

Nesta seção apresentamos a transformada de Laplace, uma ferramenta muito útil para resolver equações diferenciais com coeficientes constantes. Com o objetivo de não estender muito a discussão e levando em conta as aplicações que pretendemos fazer, vamos simplificar a exposição, deixando implícitas algumas hipóteses fundamentais nos enunciados: uma dessas hipóteses é que todas as funções $f(t)$ com as quais trabalharemos sejam **de ordem exponencial**, isto é, existem constantes $M,\ \alpha,\ t_0 > 0$ tais que $|f(t)| \leq Me^{\alpha\, t}$, para todo $t \geq t_0$. É fácil ver que toda função limitada é de ordem exponencial; as funções t^n e $e^{k\, t}$, embora não sejam limitadas, são de ordem exponencial. A função e^{t^2} não é de ordem exponencial.

7.1 Definição e propriedades

Seja $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ uma função integrável em cada intervalo $[0,T]$, com $T > 0$; a **transformada de Laplace** de $f(t)$, que denotamos por $L[f(t)]$, é a função $F(s)$ definida por

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-s\, t} f(t)\, dt\,. \tag{7.1}$$

O domínio da função F é o conjunto de todos os valores de s para os quais a integral imprópria em (7.1) é convergente; lembremos que a convergência desta integral imprópria significa que existe (e é finito) o

limite
$$\int_0^\infty e^{-s\,t} f(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-s\,t} f(t)\,dt\ .$$
A tabela a seguir mostra as transformadas de Laplace de algumas funções:

$f(t)$	1	$e^{k\,t}$	t^n	$\cos\omega\,t$	$\operatorname{sen}\omega\,t$
$F(s)$	$\dfrac{1}{s}$	$\dfrac{1}{s-k}$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Calculemos algumas destas transformadas:
$$L[1] = \int_0^\infty e^{-s\,t}\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-s\,t}\,dt = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{e^{-s\,t}}{-s}\right]_0^T = \frac{1}{s}$$
$$L[e^{k\,t}] = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{(k-s)\,t}\,dt = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{e^{(k-s)\,t}}{k-s}\right]_0^T = \frac{1}{s-k}\,.$$
Integrando por partes, temos
$$L[t] = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-s\,t}\,t\,dt = \lim_{T\to\infty}\left(\left[\frac{t\,e^{-s\,t}}{-s}\right]_0^T + \frac{1}{s}\int_0^T e^{-s\,t}\,dt\right) = \frac{1}{s^2}\ .$$
Integrando por partes repetidas vezes, temos
$$L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad n \geq 1\,.$$
Fica como exercício obter $L[\operatorname{sen}\omega\,t]$ e $L[\cos\omega\,t]$. Decorre imediatamente da definição (7.1) a seguinte propriedade:

Propriedade 1: L é linear, isto é, se a e b são constantes, então
$$L[a\,f(t) + b\,g(t)] = a\,L[f(t)] + b\,L[g(t)]\ . \tag{7.2}$$
Combinando esta propriedade com as informações da tabela acima, podemos calcular transformadas de Laplace de outras funções. Por exemplo, a transformada de Laplace de uma função polinomial é
$$L[a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + \cdots + a_n\,t^n] = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{2\,a_2}{s^3} + \cdots + \frac{n!\,a_n}{s^{n+1}}\ .$$

Notando que $\cosh k\,t = \dfrac{1}{2}\,(e^{k\,t} + e^{-k\,t})$ e usando (7.2), temos

$$L\,[\cosh k\,t] = \frac{1}{2}\,\{\,L\,[\,e^{k\,t}\,] + L\,[e^{-k\,t}]\,\} = \frac{1}{2}\,\Big(\,\frac{1}{s-k} + \frac{1}{s+k}\,\Big)$$

$$= \frac{s}{s^2 - k^2}\;.$$

Usando a identidade trigonométrica $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2\,t}{2}$, temos

$$L[\,\cos^2\,t\,] = \frac{1}{2}\,\big(\,L[1] + L[\cos 2\,t]\,\big) = \frac{1}{2}\,\Big(\,\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4}\Big)$$
$$= \frac{s^2+2}{s\,(s^2+4)}\;.$$

Exercício: Mostre que $L\,[\mathrm{sen\,h}\,k\,t] = \dfrac{k}{s^2-k^2}$ e $L[\mathrm{sen}^{\,2} t] = \dfrac{2}{s(s^2+4)}$.

A função $f(t)$ em (7.1) pode ter valores complexos e, na Propriedade 1, as constantes a e b podem ser complexas. É fácil ver que, no cálculo de $L[e^{k\,t}]$, a constante k pode ser complexa. Os cálculos de $L[\mathrm{sen}\,\omega\,t]$ e $L[\cos\omega\,t]$ ficam consideravelmente simplificados se usarmos a igualdade

$$e^{i\,\omega\,t} = \cos\omega\,t + i\,\mathrm{sen}\,\omega\,t\;.$$

Como

$$L[e^{i\,\omega\,t}] = \frac{1}{s - i\,\omega} = \frac{s + i\,\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2} + i\,\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\;,$$

vemos que

$$L[\cos\omega\,t] = \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad \text{e} \quad L[\mathrm{sen}\,\omega\,t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\;.$$

Uma propriedade útil no cálculo da transformada é:

Propriedade 2: Se $L\,[f(t)] = F(s)$, então

$$L\,[e^{a\,t}\,f(t)] = F(s-a)\,. \tag{7.3}$$

De fato

$$L\,[e^{a\,t}\,f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-s\,t}\,e^{a\,t}\,f(t)\,dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)\,t}\,f(t)\;dt = F(s-a).$$

Combinando esta propriedade com os exemplos acima, temos

$$L\,[e^{k\,t}\,\cos\omega\,t] = \frac{s-k}{(s-k)^2+\omega^2} \quad \text{e} \quad L\,[e^{k\,t}\,\text{sen}\,\omega\,t] = \frac{\omega}{(s-k)^2+\omega^2}\,.$$

Pode-se mostrar que:

Propriedade 3: A função $F(s)$ é derivável e sua derivada é calculada derivando-se sob o sinal de integral, ou seja,

$$F'(s) = -\int_0^{\infty} e^{-s\,t}\,t\,f(t)\,dt\,. \tag{7.4}$$

A igualdade (7.4) também pode ser reescrita como

$$L[t\,f(t)] = -F'(s)\,. \tag{7.5}$$

A derivada de ordem 2 de $F(s)$ é

$$F''(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\,t}\,t^2\,f(t)\,dt\,, \tag{7.6}$$

que reescrevemos como

$$L[t^2\,f(t)] = F''(s)\,. \tag{7.7}$$

Mais geralmente, temos

$$L[t^n\,f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s)\,. \tag{7.8}$$

Usando a igualdade (7.8) e a tabela acima, podemos calcular transformadas de novas funções. Por exemplo,

$$L[t\,e^{k\,t}] = -\left(\frac{1}{s-k}\right)' = -\,\frac{-1}{(s-k)^2} = \frac{1}{(s-k)^2} \tag{7.9}$$

$$L[t\,\cos\omega\,t] = -\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)' = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2} \tag{7.10}$$

$$L[t\,\text{sen}\,\omega\,t] = -\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)' = \frac{2\,\omega\,s}{(s^2+\omega^2)^2}\,. \tag{7.11}$$

A propriedade fundamental da transformada de Laplace para aplicações a equações diferenciais é:

Propriedade 4:

$$L[f'(t)] = s\,L[f(t)] - f(0)\ . \tag{7.12}$$

Integrando por partes, temos, para todo $T > 0$

$$\int_0^T e^{-s\,t}\, f'(t)\, dt = e^{-s\,T}\, f(T) - f(0) + s \int_0^T e^{-s\,t}\, f(t)\, dt\ .$$

Agora, fazemos $T \to \infty$: como f é uma função de ordem exponencial, temos $e^{-s\,T}\, f(T) \to 0$, a integral do primeiro membro tende a $L[f'(t)]$ e a do segundo membro tende a $L[f(t)]$.

Observação 7.1. *A propriedade 4 estende-se a derivadas de ordens superiores. Para a derivada de ordem 2, temos*

$$L[f''(t)] = s\,L[f'(t)] - f'(0) = s^2\,L[f(t)] - s\,f(0) - f'(0)\ . \tag{7.13}$$

Mais geralmente, para a derivada de ordem n, temos

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n\,L[f(t)] - s^{n-1}\, f(0) - s^{n-2}\, f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)\ . \tag{7.14}$$

Exercício 7.1. (a) *Use a igualdade (7.13) para calcular* $L[\mathrm{sen}\,\omega\, t]$ *e* $L[\cos\omega\, t]$. *Sugestão:* $(\mathrm{sen}\,\omega\, t)'' = -\omega^2\, \mathrm{sen}\,\omega\, t$ *e* $(\cos\omega\, t)'' = -\omega^2\, \cos\omega\, t$.
(b) *Calcule as seguintes transformadas:*

(i) $L[7\,\cos 3\,t - 4\,\mathrm{sen}\,3\,t]$	(ii) $L[5\,e^{-3\,t}]$	(iii) $L[e^{-3\,t}\,\mathrm{sen}\,4\,t]$
(iv) $L[e^{-3\,t}\,\cos 2\,t]$	(v) $L[t^3\,e^{-5\,t}]$	(vi) $L[e^{-2\,t} - 4\,t^3]$
(vii) $L[\cosh 2\,t - 3\,\mathrm{sen\,h}\,2\,t]$	(viii) $L[t^2\,\cos\,t]$	(ix) $L[t\,e^{3\,t} - \mathrm{sen}\,2\,t]$
(x) $L[4\,\cos 2\,t - t\,\cos 2\,t]$	(xi) $L[t\,e^{3\,t}\,\mathrm{sen}\,4\,t]$	(xii) $L[3\,\cos 2\,t - t\,e^{5\,t}]$
(xiii) $L[\mathrm{sen}\,t - t\,\cos\,t]$	(xiv) $L[(e^t - 2\,t)^2]$	(xv) $L[t\,e^{-3\,t}\,\cos 4\,t]$

(c) (i) *Mostre que, se f é $T-$periódica (isto é, $f(t+T) = f(t)$, para todo $t \geq 0$), então* $L[f(t)] = \dfrac{1}{1 - e^{-s\,T}} \displaystyle\int_0^T e^{-s\,t}\, f(t)\, dt$.

(ii) *Mostre que, se f é $2-$periódica e* $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < t < 1 \\ -1, & \text{se } 1 < t < 2\,, \end{cases}$ *então* $L[f(t)] = \dfrac{1}{s}\,\mathrm{tg\,h}\,\dfrac{s}{2}$.

(iii) *Mostre que, se f é $2\pi-$periódica e* $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & \textit{se } 0 \leq t \leq \pi \\ 0, & \textit{se } \pi \leq t \leq 2\pi, \end{cases}$

então $L[f(t)] = \dfrac{1}{(1-e^{-\pi s})(s^2+1)}$.

7.2 Transformada inversa

Analisaremos agora o problema inverso: dada uma função $F(s)$, encontrar uma função $f(t)$, definida para todo $t > 0$, tal que $L[f(t)] = F(s)$. Uma tal função $f(t)$ será chamada **transformada inversa** de $F(s)$ e será denotada por $L^{-1}[F(s)]$. Como a transformada de Laplace é definida por uma integral, muitas funções podem ter a mesma transformada de Laplace. Por exemplo, as funções

$$f(t) = e^t \qquad \text{e} \qquad g(t) = \begin{cases} e^t, & \text{para todo } t \neq 1 \\ 0, & \text{se } \ t = 1\,. \end{cases}$$

têm a mesma transformada de Laplace, que é $1/(s-1)$. Pode-se mostrar que, se duas funções (ambas de ordem exponencial) têm a mesma transformada de Laplace, então elas coincidem em todo ponto em que ambas são contínuas. Sempre que possível, para uma dada $F(s)$, tomaremos como transformada inversa de $F(s)$ a função contínua $f(t)$ tal que $L[f(t)] = F(s)$; com isto queremos dizer, por exemplo, que a transformada inversa de $1/(s-k)$ é a função e^{kt}: vamos denotar

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s-k}\right] = e^{kt}\,.$$

Da mesma maneira, vamos escrever

$$L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right] = \cos\omega t \quad \text{e} \quad L^{-1}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right] = \operatorname{sen}\omega t\,.$$

Para calcular transformadas inversas, usaremos as propriedades acima, o *completamento de quadrado* e a decomposição de uma função racional em frações parciais. Tais procedimentos são suficientes para as aplicações que faremos. Outros métodos podem ser encontrados nos livros “Operational Mathematics”, de R. Churchill e “Transformada de Laplace”, de S. Lipschutz.

Exemplo 7.1. *Calcular* $L^{-1}\left[\dfrac{1}{(s^2-10\,s+25)^4}\right]$.

Notemos que $s^2-10\,s+25=(s-5)^2$; assim

$$\frac{1}{(s^2-10\,s+25)^4}=\frac{1}{(s-5)^8}\,.$$

Agora, como $L[t^7]=\dfrac{7!}{s^8}$, temos

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2-10\,s+25)^4}\right]=\frac{1}{7!}\,L^{-1}\left[\frac{7!}{(s-5)^8}\right]=\frac{1}{7!}\,e^{5\,t}\,t^7\,.$$

Exemplo 7.2. *Calcular* $L^{-1}\left[\dfrac{8\,s+6}{s^2-6\,s+34}\right]$.

Completando o quadrado, temos $s^2-6\,s+34=s^2-6\,s+9+25=(s-3)^2+5^2$. Podemos então escrever

$$\frac{8\,s+6}{s^2-6\,s+34}=\frac{8\,(s-3)+30}{(s-3)^2+5^2}=8\,\frac{s-3}{(s-3)^2+5^2}+6\,\frac{5}{(s-3)^2+5^2}\,.$$

Como $L^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+5^2}\right]=\cos 5t$ e $L^{-1}\left[\dfrac{5}{s^2+5^2}\right]=\operatorname{sen}5t$, pela Propriedade 2, temos

$$L^{-1}\left[\frac{s-3}{(s-3)^2+5^2}\right]=e^{3\,t}\cos 5t \;\text{ e }\; L^{-1}\left[\frac{5}{(s-3)^2+5^2}\right]=e^{3\,t}\operatorname{sen}5\,t\,.$$

Logo,

$$L^{-1}\left[\frac{8\,s+6}{s^2-6\,s+34}\right]=8\,e^{3\,t}\,\cos 5\,t+6\,e^{3\,t}\operatorname{sen}5\,t\,.$$

Exemplo 7.3. *Calcular* $L^{-1}\left[\dfrac{s^2+2\,s+17}{(s+3)(s^2-3\,s+2)}\right]$.

Como $s^2-3\,s+2=(s-1)\,(s-2)$, podemos escrever

$$\frac{s^2+2\,s+17}{(s+3)(s^2-3\,s+2)}=\frac{A}{s+3}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{s-2}\,.$$

Multiplicando os dois membros por $(s+3)\,(s-1)\,(s-2)$, obtemos

$$A\,(s-1)\,(s-2)+B(s+3)\,(s-2)+C(s+3)\,(s-1)=s^2+2\,s+17\,.$$

Substituindo $s=-3$, obtemos $A=1$; substituindo $s=1$, obtemos $B=-5$ e substituindo $s=2$, obtemos $C=5$. Assim,

$$\frac{s^2+2\,s+17}{(s+3)(s^2-3\,s+2)}=\frac{1}{s+3}-\frac{5}{s-1}+\frac{5}{s-2}$$

Logo

$$L^{-1}\left[\frac{s^2+2\,s+17}{(s+3)(s^2-3\,s+2)}\right]=e^{-3\,t}-5\,e^{t}+5\,e^{2\,t}\,.$$

Exemplo 7.4. *Calcular* $L^{-1}\left[\dfrac{2\,s^2-3\,s-14}{(s^2+4)\,(s-1)}\right]$.

Escrevendo

$$\frac{2\,s^2-3\,s-14}{(s^2+4)\,(s-1)}=\frac{A\,s+B}{s^2+4}+\frac{C}{s-1}=\frac{(A+C)\,s^2+(B-A)\,s-B+4\,C}{(s^2+4)\,(s-1)}$$

temos

$$\left\{\begin{array}{rcr} A+\quad +C &=& 2\\ -A+B\qquad &=& -3\\ -B+C &=& -14\end{array}\right.$$

donde obtemos $A=5,\ B=2,\ C=-3$. Assim,

$$\frac{2\,s^2-3\,s-14}{(s^2+4)\,(s-1)}=\frac{5\,s+2}{s^2+4}-\frac{3}{s-1}$$

Como

$$\frac{5\,s+2}{s^2+4}=\frac{5\,s}{s^2+4}+\frac{2}{s^2+4}=5\,L[\cos 2\,t]+L[\operatorname{sen} 2\,t]\quad \text{e}\quad \frac{3}{s-1}=3\,L[e^t]\,,$$

temos

$$L^{-1}\left[\frac{2\,s^2-3\,s-14}{(s^2+4)\,(s-1)}\right]=5\,\cos 2\,t+\operatorname{sen} 2\,t-3\,e^{t}\,.$$

Exercício 7.2. *Calcule* $L^{-1}[F(s)]$ *, sendo:*

(a) $F(s)=\dfrac{12}{s^2+6\,s+13}$ (b) $F(s)=\dfrac{3\,s+15}{s^2+3\,s}$ (c) $F(s)=\dfrac{9}{(s-2)^2}$

(d) $F(s)=\dfrac{8\,s}{s^2-6\,s+13}$ (e) $F(s)=\dfrac{3\,s-9}{s^3+9\,s}$ (f) $F(s)=\dfrac{s-7}{s^2+s-6}$

(g) $F(s)=\dfrac{2\,s^2+6\,s+9}{s^3+9\,s}$ (h) $F(s)=\dfrac{6\,s}{s^2+9}$ (i) $F(s)=\dfrac{s^2-9}{(s^2+9)^2}$

7.3 Aplicações a equações diferenciais

A Transformada de Laplace é de grande utilidade para resolver sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, como mostram os exemplos a seguir.

Exemplo 7.5. *Usando a Transformada de Laplace, encontrar a solução do P.V.I.*

$$\begin{cases} y'' - 3\,y' + 2\,y = 20\,e^{-3\,t} \\ y(0) = 1, \;\; y'(0) = 2. \end{cases} \tag{7.15}$$

Denotando $L[y(t)] = Y(s)$, temos

$$\begin{aligned} L[y'(t)] &= s\,L[y(t)] - 1 = s\,Y - 1. \\ L[y''(t)] &= s^2\,Y - s - 2. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Aplicando a transformada aos dois membros de (7.15) e substituindo as igualdades de (7.16), temos

$$(s^2 - 3\,s + 2)\,Y - s + 1 = \frac{20}{s+3},$$

ou

$$Y(s) = \frac{s^2 + 2\,s + 17}{(s+3)(s^2 - 3\,s + 2)}\;.$$

Usando o Exemplo 7.3, vemos que a solução $y(t)$ do P.V.I. é

$$y(t) = e^{-3\,t} - 5\,e^{t} + 5\,e^{2t}\,. \qquad \square$$

Exemplo 7.6. *Usando transformada de Laplace, encontrar a solução do PVI*

$$\begin{cases} y''' - y' = 6\,e^{2\,t} \\ y(0) = 1, \;\; y'(0) = -1, \;\; y''(0) = 1\,. \end{cases}$$

Denotemos $Y(s) = L[y(t)]$. Pela propriedade 4, temos

$$\begin{aligned} L[y'(t)] &= s\,Y(s) - y(0) = s\,Y(s) - 1 \\ L[y''(t)] &= s\,L[y'(t)] - y'(0) = s^2\,Y(s) - s + 1 \\ L[y'''(t)] &= s\,L[y''(t)] - y''(0) = s^3\,Y(s) - s^2 + s - 1 \end{aligned}$$

Aplicando a transformada de Laplace aos dois membros da equação, temos

$$(s^3 - s)\,Y(s) - s^2 + s = \frac{6}{s-2}$$

ou

$$Y(s) = \frac{6}{s\,(s-1)\,(s+1)\,(s-2)} + \frac{1}{s+1}$$

Decompondo em frações parciais, temos

$$Y(s) = \frac{3}{s} - \frac{3}{s-1} + \frac{1}{s-2}$$

Portanto,

$$y(t) = 3 - 3\,e^t + e^{2\,t}$$

Os sistemas de equações diferenciais lineares são tratados do mesmo modo.

Exemplo 7.7. *Resolver o P.V.I.* $\left\{\begin{array}{l} x' = 3\,y + 4\,e^{5\,t} \\ y' = \quad x - 2\,y \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0\,. \end{array}\right.$

Aplicando a transformada a ambos os membros das equações do sistema acima e denotando $X(s) = L[x(t)]$ e $Y(s) = L[y(t)]$, temos

$$\left\{\begin{array}{l} s\,X - 1 = 3\,Y + \dfrac{4}{s-5} \\ s\,Y = X - 2\,Y\,. \end{array}\right.$$

Da segunda equação, tiramos $X = (s+2)\,Y$. Substituindo na primeira equação obtemos

$$s\,(s+2)\,Y(s) - 1 = 3\,Y(s) + \frac{4}{s-5}$$

donde obtemos

$$Y(s) = \frac{1}{8}\Big(\frac{1}{s-5} - \frac{1}{s+3}\Big) \text{ e } X(s) = \frac{1}{8}\Big(\frac{7}{s-5} + \frac{1}{s+3}\Big).$$

Logo,

$$\left[\begin{array}{c} x(t) \\ y(t) \end{array}\right] = \frac{1}{8}\left[\begin{array}{l} 7\,e^{5\,t} + e^{-3\,t} \\ e^{5\,t} - e^{-3\,t} \end{array}\right]. \qquad \Box$$

Com a transformada de Laplace podemos resolver equações diferenciais cujos termos forçantes apresentam algum tipo de descontinuidade. Para estudar estas equações, vamos apresentar uma outra propriedade da transformada de Laplace. Para facilitar o enunciado desta propriedade, introduzimos a **função degrau unitário**, que é definida por

$$H_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ t < a \\ 1, & \text{se } \ t \geq a\,. \end{cases}$$

Sua transformada de Laplace é

$$L[H_a t] = \lim_{T\to\infty} \int_a^T e^{-s\,t}\, dt = \lim_{T\to\infty} \left.\frac{e^{-s\,t}}{-s}\right|_a^T = \frac{e^{-a\,s}}{s}\,.$$

Exemplo 7.8. *Calcular* $L[f(t)]$, *sendo* $f(t) = \begin{cases} 0, & se \ \ 0 \leq t < a \\ c, & se \ \ a \leq t < b \\ 0, & se \ \ t \geq b\,. \end{cases}$

Como $f(t) = c\,\big[H_a(t) - H_b(t)\big]$, temos

$$L[f(t)] = c\,\big(\,L[H_a(t)] - L[H_b(t)]\big) = \frac{c}{s}\,\left(e^{-a\,s} - e^{-b\,s}\right)\,. \qquad \square$$

As figuras abaixo mostram os gráficos das funções $H_a(t)$ e $f(t)$.

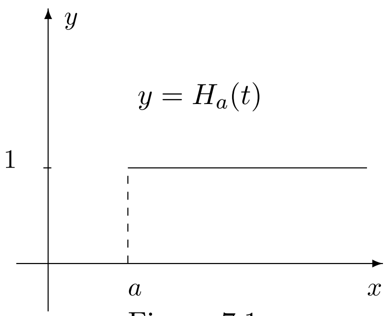


Figura 7.1

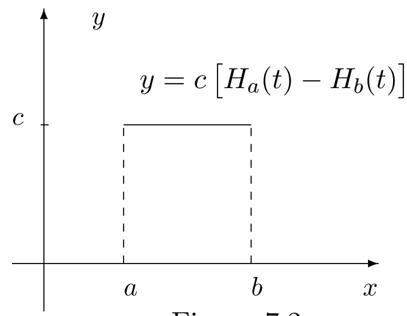


Figura 7.2

Exercício 7.3. *Denotemos por* $f(t) = [\![\,t\,]\!]$ *a função* maior inteiro. *Mostre que:*

$$L\big[\,[\![\,t\,]\!]\,\big] = \frac{1}{s\,(e^s - 1)} \qquad \text{e} \quad L\big[\,[\![\,t\,]\!] - t\,\big] = \frac{s - 1 - e^s}{s^2\,(e^s - 1)}\,.$$

Dada uma função $f(t)$, definida para todo $t \geq 0$ e um número $a > 0$, consideremos a função

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ 0 \leq t < a \\ f(t-a), & \text{se } \ t \geq a \ . \end{cases}$$

O gráfico de g é o gráfico de f deslocado de a unidades à direita (veja as figuras 7.3 e 7.4 abaixo). Usando a função degrau unitário, podemos escrever

$$g(t) = H_a(t) f(t-a) \ .$$

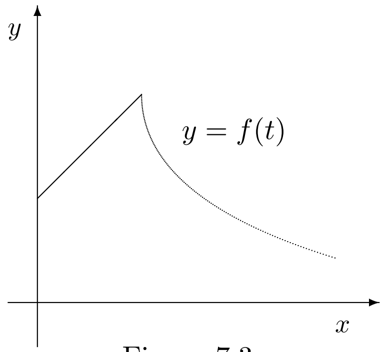


Figura 7.3

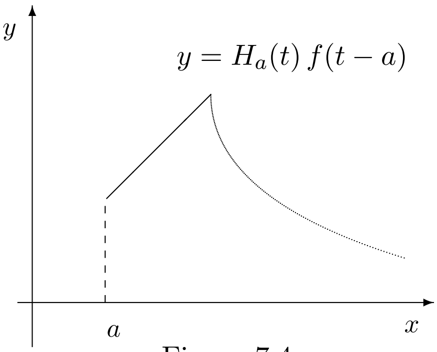


Figura 7.4

A relação entre as transformadas de Laplace das funções $f(t)$ e $g(t)$ é:

Propriedade 5:

$$L[H_a(t) f(t-a)] = e^{-a\,s}\, L[f(t)] \ . \tag{7.17}$$

Fazendo a mudança de variável $u = t - a$, temos

$$\begin{aligned} L[H_a(t) f(t-a)] &= \lim_{T\to\infty} \int_a^T e^{-s\,t}\, f(t-a)\, dt = \\ &= \lim_{T\to\infty} \int_0^{T-a} e^{-s\,(u+a)}\, f(u)\, du = \\ &= e^{-s\,a} \int_0^{\infty} e^{-s\,u}\, f(u)\, du = e^{-a\,s}\ L[f(t)] \, . \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 7.9. *No circuito representado ao lado, a resistência é $R = 8$ ohms, a indutância é $L = 1$ henry. A corrente é inicialmente nula. Entre os instantes $t = 0$ e $t = 5\,s$ uma força eletromotriz de 200 volts é aplicada ao circuito. Determinar a intensidade da corrente $i(t)$ em um instante $t > 0$.*

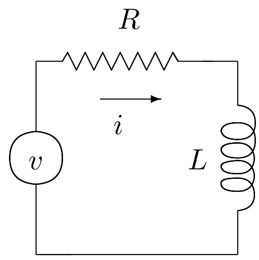


Figura 7.5

A função $i(t)$ é a solução do PVI $\begin{cases} i' + 8\,i = v(t) \\ i(0) = 0 \end{cases}$ em que $v(t) = \begin{cases} 200, & \text{se } 0 \le t < 5 \\ 0, & \text{se } t \ge 5 \end{cases}$. Aplicando transformada aos dois membros da equação, denotando $I(s) = L[i(t)]$ e notando que $L[v(t)] = 200(1 - e^{-5\,s})/s$, temos

$$s\,I + 8\,I = V(s) = \frac{200}{s}\left(1 - e^{-5\,s}\right)$$

donde

$$I(s) = 200\,\frac{1}{s(s+8)}\left(1 - e^{-5\,s}\right)$$

Usando frações parciais, temos

$$I(s) = 25\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+8}\right)\left(1 - e^{-5\,s}\right).$$

Logo,

$$i(t) = 25\left(1 - e^{-8\,t}\right) - 25\left(1 - e^{-8\,(t-5)}\right)H(t-5)$$

ou

$$i(t) = \begin{cases} 25\left(1 - e^{-8\,t}\right), & \text{se } 0 \le t < 5 \\[2ex] 25\,e^{-8\,t}\left(e^{40} - 1\right), & \text{se } t \ge 5\,. \end{cases}$$

O gráfico da corrente tem o seguinte aspecto:

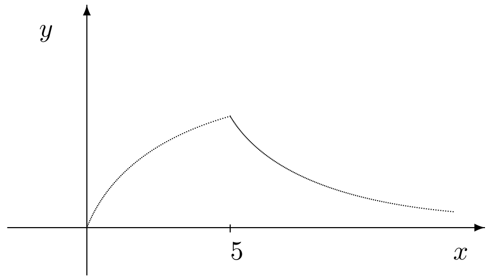


Figura 7.6

Exercício 7.4. *Encontre a solução de cada PVI:*

(*a*) $\begin{cases} y' + 3\,y = 18\,t \\ y(0) = 5. \end{cases}$ (*b*) $\begin{cases} y' - 5\,y = e^t \\ y(0) = 7,\ y'(0) = 11. \end{cases}$

(*c*) $\begin{cases} y'' + 9\,y = 36 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = -2. \end{cases}$ (*d*) $\begin{cases} y'' - 3\,y' + 2\,y = 20\,\mathrm{sen}\,t \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0. \end{cases}$

(*e*) $\begin{cases} y'' + 4\,y = 0 \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 6. \end{cases}$ (*f*) $\begin{cases} y^{(3)} - 2\,y' = 4\,t \\ y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 4. \end{cases}$

(*g*) $\begin{cases} y'' + y = 8\,t \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 10. \end{cases}$ (*h*) $\begin{cases} y^{(3)} - 2\,y'' = 0 \\ y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 32. \end{cases}$

Exercício: Dadas f , $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ o **produto de convolução** de f e g é a função

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t)\,g(x-t)\,dt$$

Pode-se mostrar que $L[f * g] = L[f]\,L[g]$.

(a) Calcule $L^{-1}\left[\dfrac{12}{(s-1)\,(s-3)}\right]$ e $L^{-1}\left[\dfrac{1}{s\,(s^2+1)}\right]$.

Observação: Usando a propriedade acima podemos encontrar soluções de *equações integrais* do tipo convolução. Calculemos, por exemplo, a solução da equação integral

$$y(t) = 3\,t + 2\int_0^t y(z)\,\cos(t-z)\,dz.$$

Essa equação integral pode ser escrita na forma

$$y(t) = 3\,t + 2\,(y * \cos)(t).$$

Aplicando transformada de Laplace aos dois membros, temos

$$Y(s) = \frac{3}{s^2} + \frac{2\,s\,Y(s)}{s^2+1}\,.$$

donde

$$Y(s) = \frac{3\,s^2+3}{s^2\,(s-1)^2} = \frac{6}{s} + \frac{3}{s^2} - \frac{6}{s-1} + \frac{6}{(s-1)^2}\,.$$

Logo,

$$y(t) = 6 + 3\,t - 6\,e^t + 6\,t\,e^t\,. \qquad \square$$

Capítulo 8

Algumas respostas

Capítulo 1
Exercícios 1.28: (a) $(0,-1,-2)$ (b) $(6,-1,-2)$ (c) $(-6,-1,-2)$
(d) $(3,-1,-2)$ (e) $(1,-1,-2)$ (f) $(-3,3,-3\,i,3\,i)$
(g) $(4,2\,(-1+i\,\sqrt{3}),\ 2\,(-1-i\,\sqrt{3})$ (h) $(-1,1+\sqrt{2},1-\sqrt{2})$
(i) $(-2,1+\sqrt{3},1-\sqrt{3})$
Exercício 1.29 $a=3,\ (1\pm i\,\sqrt{11})/2$
Exercício 1.30 $1/3$ e $3/2$
Exercício 1.31 $-1/2$ e $1/2$

Capítulo 2
Exercícios 2.2 (a) $y=-1/(t^3+\cos\,t+K)$ (b) $y=-1/(\text{sen}\ t+K)$
(c) $y^4=2\,t^3+K$ (d) $y^2=c\,(1+y^2)\,(1+t^2)$
(e) $y=6\,x/(1-C\,x^6)$ (f) $y^2=t^2+K$ (g) $\text{arc tg}\ y=\text{arc tg}\ x+\text{arc tg}\ C$
ou $y=(x+C)/(1-C\,x)$ (h) $z^2=x^2+K$
Exercícios 2.3 (a) $y(t)=1/(2-t^3-\cos\,t)$ (b) $y(t)=-1/(1+\text{sen}\ t)$
(c) $y=(x-1)/(x+1)$ (d) $y=\sec t$
Exercícios 2.4 (a) $y(t)=K\,t^2$ (b) $y(t)=K\,\cos t$ (c) $y(t)=\text{sen}\,t+K\,e^{-t}$ (d) $y(t)=\cos t\,\ln(\sec t+\text{tg}\,t)+1+K\,\cos t$ (e) $y(t)=K\,t^{-1}+e^t\,(1-2\,t^{-1})$ (f) $y(t)=t^3+K\,t^2$ (g) $z(t)=2\,t^2\,e^{-t^2}+K\,e^{-t^2}$
(h) $y(t)=3+K\,e^{-e^t}$
Exercícios 2.5 (a) $y(t)=-t\,\ln t-t+t^2$ (b) $y(t)=(2\,t^3+5)/(1+t^2)$
(c) $y(t)=\cos\,t+3/\text{sen}\ t$ (d) $y(t)=(t^3-3\,t^2-6)/(t-2)$
Exercícios 2.6 (a) $a\,x^2+b\,x\,y+a\,y^2=C$ (b) $x\,e^y+\text{sen}\ x=C$
(c) $e^x\,\cos\,y=C$ (d) $\ln\,x-y^2/x=C$.

Exercícios 2.7 (a) fator integrante e^x; curvas integrais $e^x \cos y = C$ (b) fator integrante x^{-2}; curvas integrais $\ln x - y^2/x = C$ (c) fator integrante t; curvas integrais $4\,t^3 + 3\,t^4 - 6\,t^2\,y^2 = C$
Exercício 2.8 $y(x) = -2\,e^{3\,x}$
Exercício 2.9 $P(h) = P_0\,e^{\alpha\,h},\ \alpha = -\ln 2/6000 \approx -1,1552 \times 10^{-4}$
Exercício 2.10 $N(t) = N(0)\,e^{\alpha\,t}$, $\alpha = \ln 2/24 \approx 0,02875$, $T \approx 160\,h$.

Capítulo 3

Exercícios 3.1 (a), (b), (c) e (d): são espaços vetoriais, (e) não é: falha, p. ex., (EV8)
Exercícios 3.2 (a), (b) e (d): são subespaços; (c) e (e) não são
Exercícios 3.3, 3.4 e 3.4: todos são subespaços
Exercícios 3.9 (a) não: (b) sim
Exercícios 3.10 (b) sim para todas as perguntas, por exemplo, $\mathbf{u} = (1/2)\mathbf{v}_1 + (3/2)\mathbf{v}_2 - (1/2)\mathbf{v}_3$.
Exercícios 3.12 $p(t) = (1/2)\,q(t) + (3/2)\,r(t) - (1/2)\,f(t)$
Exercícios 3.13 (a) $[S] = \mathbb{R}^2$, (b) $[S] = \{(x, x, y)\ :\ x,\, y \in \mathbb{R}\}$,
(c) $[S] = \{a + b\,t + c\,t^2 + (a + c - b)\,t^3\ :\ a,\, b,\, c \in \mathbb{R}\}$,
(d) $[S] = \{a + b\,t^2 - b\,t^3\ :\ a,\, b \in \mathbb{R}\}$
Exercícios 3.15 (a), (b), (d), (e), (g), (h), (i), (k): LI
(c), (f), (j), (l): LD
Exercícios 3.16 (a) e (b): LI
Exercícios 3.17 (a): LI, (b): LD
Exercícios 3.18 LD
Exercícios 3.19 (a): sim, (b) não (não são LI nem geram $\mathbb{R}^2$)
Exercícios 3.20 (a): sim, (b) não (c): sim, (d)sim
Exercícios 3.21 (a): sim, (b) não, eles são LD.
Exercícios 3.22 (a): $[3, -1, -1]^T$, (b) $[1, 1, 1]$ (c) $[1, 0, 2]^T$, (d): $[3, -4, 2]^T$.
Exercícios 3.23 (b) $[2, 2, -1, 1]^T$
Exercícios 3.24 $[7, -3, -7, 2]^T$
Exercícios 3.25 (a): $[10, 0, 1]^T$, (b) $[10, -1, 1]$ (c) $[0, 6, -1]^T$
Exercícios 3.26 (a) e (c) não (b) sim
Exercícios 3.27 (a) e (b) sim (c) não
Exercício 3.30 $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0),\ \mathbf{v}_2 = (0, 1, 0),\ \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$,
Exercícios da Seção 3.8

1 (a) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ (b) $\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$,

2 (a) $U = \{a\,(1-t^3) + b\,(t-t^3) + c\,(t^2-t^3)\ :\ a,b,c \in \mathbb{R}\}$, uma base de U é $\{1-t^3, t-t^3, t^2-t^3\}$, $W = \{a + b\,t\ :\ a,b \in \mathbb{R}\}$, uma base de W é $\{1,t\}$; $U \cap W = \{a\,(1-t)\ :\ a \in \mathbb{R}\}$, uma base de $U \cap W$ é $\{1-t\}$.
5 (a) $B = \{(1,4,-1,3),\ (2,1,-3,-1),\ (0,1,1,1)\}$
(b) $B = \{(1,1,0,-3),\ (0,0,1,0)\}$
(c) $B = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$
(d) $B = \{1,t\}$ (e) $B = \{t^3 + 4\,t^2 - t + 3,\ t^3 + 5\,t^2 + 5\}$

Capítulo 4

Exercícios 4.1 $c_1\,\cos(5\,t) + c_2\,\text{sen}\,(5\,t) + 5\,t^3 + 4\,t^5$
Exercícios 4.2 $c_1\,e^{3\,t} + c_2\,e^{5\,t} + 3\,\cos(2\,t)$
Exercícios 4.3
(a) $y(t) = t^{-1/2}$ (b) $y(t) = t^{-1}$ (c) $y(t) = t^{-1/2}$ (d) $y(t) = t\,\ln\,t$
Exercícios 4.4
(em todos os itens c_1 e c_2 denotam constantes reais arbitrárias)
(a) $y(t) = c_1\,e^{2\,t} + c_2\,e^{-2\,t}$; (b) $y(t) = c_1\,e^{-t} + c_2\,e^{5\,t}$; (c) $y(t) = c_1 + c_2\,e^{4\,t}$; (d) $y(t) = e^t\,(c_1\,\cos\,t + c_2\,\text{sen}\,t)$; (e) $y(t) = c_1\,\cos\,(5\,t) + c_2\,\text{sen}\,(5\,t)$; (f) $y(t) = e^{-2\,t}\,(c_1\,\cos\,(3\,t) + c_2\,\text{sen}\,(3\,t))$; (g) $y(t) = c_1 + c_2\,e^{-25\,t}$; (h) $y(t) = e^{-2\,t}\,(c_1 + c_2\,t)$.
Exercícios 4.5
(a) $y(t) = 2 - e^{2\,t}$ (b) $y(t) = 8\,e^t + e^{-5\,t}$ (c) $y(t) = e^t\,(\cos\,t + 2\,\text{sen}\,t)$
(d) $y(t) = e^{2\,t}\,(3-t)$ (e) $y(t) = 3\,\text{sen}\,(5\,t) + 5\,\cos(5\,t)$
(f) $y(t) = e^{-2\,t}\,[3\,\cos\,(3\,t) + 2\,\text{sen}\,(3\,t)]$.
Exercícios 4.7
(em todos os itens c_1 e c_2 denotam constantes reais arbitrárias)
(a) $y(t) = c_1 + c_2\,e^{-3\,t} + 2\,e^{2\,t}$ (b) $y(t) = e^{-t}(c_1 + c_2\,t) - 2$
(c) $y(t) = c_1 + c_2\,e^{-3\,t} + 3\,t$ (d) $y(t) = c_1\,e^t + c_2\,e^{-5\,t} - \cos\,t - (3/2)\,\text{sen}\,t$
(e) $y(t) = c_1\,\cos\,(5\,t) + c_2\,\text{sen}\,(5\,t) + 2\,\cos\,(3\,t)$ (f) $y(t) = c_1\,\cos\,(5\,t) + c_2\,\text{sen}\,(5\,t) + t\,(-2\,\cos\,t + \text{sen}\,t)$, (g) $y(t) = c_1 + c_2\,e^{-3\,t} + 3\,t\,e^{7\,t}$
(h) $y(t) = c_1 + c_2\,e^{-3\,t} + \text{sen}\,(3\,t) - \cos(3\,t)$ (i) $y(t) = c_1 + c_2\,e^t - 2\,t^3 - 6\,t$
(j) $y(t) = e^{4\,t}\,(c_1 + c_2\,t + 6\,t^2 - t^3)$; (k) $y(t) = c_1\,\cos(5\,t) + c_2\,\text{sen}\,(5\,t) - 2\,\cos(5\,t)$ (l) $y(t) = e^t\,\big[(c_1 - 3)\,\cos\,t + (c_2 + 3)\,\text{sen}\,t\big]$.

Exercícios 4.8
(a) $y(t) = e^{-3t} + 3t$ (b) $y(t) = -2 + e^{-3t} + e^{2t}$
(c) $y(t) = -1 + 14\,e^{t-1} - 2\,t^3 - 6\,t$ (d) $y(t) = 1 - e^{7t} + 3\,t\,e^{7t}$
(e) $y(t) = e^{2t}\,[2\,\cos(3\,t) - 3\,\mathrm{sen}\,(3\,t)] + e^t$ (f) $y(t) = 3\,e^{2t} + (2 - 2\,t)\,e^{-4t}$
(g) $y(t) = (-5 + 2\,t - t^2)\,e^{2t} - e^{-4t}$ (h) $y(t) = e^t\,(t + 2\,t^3)$
(i) $y(t) = e^{3t}\,(t + 3\,t^2 - t^3)$ (j) $y(t) = e^{2t}\,(2 + 5\,t) - 3\,e^t\,\mathrm{sen}\,t$
(k) $y(t) = e^{4t}\,(2\,t^3 - 3\,t^2 + t)$ (l) $y(t) = 3\,\cos(5\,t) + (2 + t)\,\mathrm{sen}\,(5\,t)$.
Exercícios 4.9
(a) $y(t) = (\cos t)\ln|\cos t| + t\,\mathrm{sen}\,t$; (b) $y(t) = -1 + (\mathrm{sen}\,t)\ln|\sec t + \mathrm{tg}\,t|$
(c) $y(t) = -2 + (\mathrm{sen}\,t)\ln|\sec t + \mathrm{tg}\,t|$; (d) $y_p(t) = e^t/2$ (e) $y_p(t) = -2\,t$
(f) $y_p(t) = t$ (g) $y_p(t) = -t^2 + (7\,t + 7)/9$ (h) $y(t) = e^t(t^2 - t + 1/2)$
(i) $y(t) = -2\,\mathrm{sen}^3\,t\,\cos(2\,t) + \mathrm{sen}\,(2\,t)(3\,\cos t - 2\,\cos^3 t)$
(j) $y(t) = t\,(\mathrm{sen}\,t - \cos t)$.
Exercício 4.10
(em todos os itens c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 denotam constantes reais arbitrárias)
(a) $y(t) = c_1\,e^{2t} + c_2\,e^{-2t} + c_3\,\cos 2\,t + c_4\,\mathrm{sen}\,2\,t$;
(b) $y(t) = c_1\,e^{-t} + e^{2t}\,(c_2 + c_3\,t + c_4\,t^2)$;
(c) $y(t) = c_1\,e^{-t} + c_2\,e^t + c_3\,e^{2t}$; **(d)** $y(t) = e^{-t}\,(c_1 + c_2\,t + c_3\,t^2)$;
(e) $y(t) = c_1 + c_2\,t + (c_3 + c_4\,t)\,e^{2t}$;
(f) $y(t) = c_1\,e^{-t} + (c_2 + c_3\,t)\,e^t + e^{-t}\,(c_4\,\cos t + c_5\,\mathrm{sen}\,t)$;
(g) $y(t) = e^{2t}\,\big[\,c_1\,\cos(2\,t) + c_2\,\mathrm{sen}\,(2\,t)\,\big] + e^{-2t}\big[\,c_3\,\cos(2\,t) + c_4\,\mathrm{sen}\,(2\,t)\,\big]$;
(h) $y(t) = 3 + 2\,t + t^2 + c_1\,e^{-t} + (c_2 + c_3\,t)\,e^t + e^{-t}\,(c_4\,\cos t + c_5\,\mathrm{sen}\,t)$;
(i) $y(t) = (e^{4t}/400) + c_1 + c_2\,t + (c_3 + c_4\,t)\,e^{-t}$;
(j) $y(t) = (e^{4t}/64) + c_1 + c_2\,t + (c_3 + c_4\,t)\,e^{2t}$.

Capítulo 5

Exercícios 5.1 As transformações em (a), (b), (d) e (e) são lineares. A transformação em (c) não é linear: tome $\mathbf{u} = (1,0,0)$ e $\alpha = -1$.
Exercício 5.3 Não. Se T é linear, então $T(1,1) = T\big[(1,0) + (0,1)\big] = T(1,0) + T(0,1) = (0,0) + (2,1) = (2,1) \neq (1,2)$.
Exercício 5.4 Sim. $T(x,y,z) = (y, 2\,x)$
Exercício 5.5 Sim. $T(x,y,z) = (y, 2\,x - 2\,y + 2\,z, z - y)$
Exercício 5.6 Sim. $T(x,y,z) = (0, 3\,z, z, y + 4\,z)$.
Exercício 5.7 Não. Se T é linear, então $T(1,1,1) = T\big[(1,1,0) + (0,0,1)\big] = T(1,1,0) + T(0,0,1) = (0,0,0,1) + (0,0,0,0) = (0,0,0,1) \neq (0,3,2,5)$.

Exercício 5.8 Sim. $T(a + b\,t + c\,t^2) = (b, 2\,a - 2\,b + 2\,c, c - b)$.

Exercício 5.9: Um tal operador é $T(x, y, z, w) = (0, y - x, 0, w)$.
Exercício 5.10:
$(F \circ G)(x, y, z) = (x + 3\,y - z, x + y + z, x + 2\,z)$,
$(G \circ F)(x, y, z) = (x + 3\,y + 2\,z, y, x + y + 2\,z)$.
$\ker(F \circ G) = [(-2, 1, 1)]$ $\ker(G \circ F) = [(-2, 0, 1)]$
$\mathrm{Im}(F \circ G) = [(1, 1, 1),\ (0, 2, 3)]$, $\mathrm{Im}(G \circ F) = [(1, 0, 1),\ (0, 1, -2)]$
(existem infinitas bases).

Exercícios 5.11:
(a) $\ker(F) = [(3, 1)]$, $\mathrm{Im}\,(F) = [(2, 3)]$
(b) $\ker(F) = [(3, 1)]$; $\mathrm{Im}\,(F) = [(2, 3, 2)]$.
(c) $\ker(F) = [(2, 4, 1)]$; $\mathrm{Im}\,(F) = [(1, 3, 0),\ (0, 2, 1)]$.
(d) $\ker(F) = [(5, 7, 1)]$; $\mathrm{Im}\,(F) = [(1, 1), (-1, 0)]$.
(e) $\ker(F) = [2 + 4\,t + t^2]$; $\mathrm{Im}\,(F) = [1 + 3\,t,\ -1 - t + t^2]$.
(f) $\ker(F) = \left[\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$
$\mathrm{Im}\,(F) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right]$.

Exercício 5.12: Os autovetores de A são: $a\,(1, 0, 0),\ a \in \mathbb{R}$, correspondentes ao autovalor $\lambda = 1$; , $b\,(1, -1, 0),\ b \in \mathbb{R}$, correspondentes ao autovalor $\lambda = -1$ e $c\,(1, 0, 3),\ c \in \mathbb{R}$, correspondentes ao autovalor $\lambda = -2$.

Os autovetores de B são: $a\,(1, 0, 0),\ a \in \mathbb{R}$, correspondentes ao autovalor $\lambda = 3$; , $b\,(0, 2 + i, 1),\ a \in \mathbb{R}$, correspondentes ao autovalor $\lambda = i$ e $c\,(0, 2 - i, 1),\ a \in \mathbb{R}$, correspondentes ao autovalor $\lambda = -i$.

Os autovetores de C são: $a\,(0, 0, 1, 3),\ a \in \mathbb{R}$, correspondentes ao autovalor $\lambda = 4$; , $b\,(1, 0, 0, 0) + c\,(0, 0, 1, 1),\ b\,, c \in \mathbb{R}$, correspondentes ao autovalor $\lambda = 2$ (que tem multiplicidade 3).

Exercício 5.13: **(a)** $\lambda = k$, todo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ é autovetor.
(b) autovetores $a\,(1, 0),\ a \in \mathbb{R}$, correspondentes ao autovalor $\lambda = 1$; $b\,(0, 1),\ b \in \mathbb{R}$, correspondentes ao autovalor $\lambda = k$.
(c) autovetores $a\,(1 + \sqrt{2}, 1),\ a \in \mathbb{R}$, correspondentes ao autovalor $\lambda = \sqrt{2}$; $b\,(1 - \sqrt{2}, 1),\ b \in \mathbb{R}$, correspondentes ao autovalor $\lambda = -\sqrt{2}$.

(d) autovetores: $a\,(1,0)$, $a\in\mathbb{R}$, correspondentes ao autovalor $\lambda=-1$; $b\,(0,1)$, $b\in\mathbb{R}$, correspondentes ao autovalor $\lambda=k$.
(e) autovetores $a\,(1,-3)$, $a\in\mathbb{R}$, correspondentes ao autovalor $\lambda=2$; $b\,(1,1)$, $b\in\mathbb{R}$, correspondentes ao autovalor $\lambda=-2$.
(f) autovetores $a\,(1,0,1)+b\,(0,1,0)$, $a\,,\,b\in\mathbb{R}$, correspondentes ao autovalor $\lambda=1$; $c\,(1,0,-1)$, $c\in\mathbb{R}$, correspondentes ao autovalor $\lambda=-1$.
(g) autovetores $a\,(1,0,0)$, $a\in\mathbb{R}$, correspondentes ao autovalor $\lambda=3$; $b\,(0,2{+}i,1)$, $b\in\mathbb{R}$, correspondentes ao autovalor $\lambda=i$; $c\,(0,2{-}i,1)$, $b\in\mathbb{R}$, correspondentes ao autovalor $\lambda=-i$.
(h) autovetores $a\,(1,-1,0)$, $a\in\mathbb{R}$, correspondentes ao autovalor $\lambda=1$; $b\,(0,2,1)$, $b\in\mathbb{R}$, correspondentes ao autovalor $\lambda=2$ e $c\,(0,0,1)$, $c\in\mathbb{R}$, correspondentes ao autovalor $\lambda=0$.
(i) autovetores $a\,(1,0,0,0)+b\,(0,0,0,1)$, $a\,,\,b\in\mathbb{R}$, correspondentes ao autovalor $\lambda=3$ (que tem multiplicidade 3 e $c\,(0,0,1,0)$, $c\in\mathbb{R}$, correspondentes ao autovalor $\lambda=4$.
(j) autovetores $a\,(1,0,0,0)+b\,(0,0,1,1)$, $a\,,\,b\in\mathbb{R}$, correspondentes ao autovalor $\lambda=2$ (que tem multiplicidade 3 e $c\,(0,0,1,2)$, $c\in\mathbb{R}$, correspondentes ao autovalor $\lambda=3$.
Exercício 5.14: nos dois casos, A é diagonalizável: ambas tem 3 autovalores distintos: 1, $(5+\sqrt{17})/2$ e $(5-\sqrt{17})/2$.

Capítulo 6

Exercícios 6.1

(em todos os itens, $c_1\,,\,c_2\,,\,c_3\,,\,c_4$ denotam constantes arbitrárias)

(a) $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} c_1\,e^{-t}-2\,c_2\,e^{2\,t}\\ -2\,c_1\,e^{-t}+c_2\,e^{2\,t}\end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{x}(t)=e^{2\,t}\begin{bmatrix} c_1\,\cos\,t+c_2\,\mathrm{sen}\;t\\ -c_1\,(\cos\,t+\mathrm{sen}\;t)+c_2\,(\cos\,t-\mathrm{sen}\;t)\end{bmatrix}.$

(c) $\mathbf{x}(t)=e^{5\,t}\begin{bmatrix} c_1\,(\cos 2\,t+\mathrm{sen}\,2\,t)+c_2\,(\mathrm{sen}\,2\,t-\cos 2\,t)\\ c_1\,\cos 2\,t+c_2\,\mathrm{sen}\,2\,t\end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} 5\,c_1\,e^{3\,t}+c_2\,e^{-4\,t}\\ 2\,c_1\,e^{3\,t}-c_2\,e^{-4\,t}\end{bmatrix}$ (e) $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} c_1\,e^{-t}+2\,c_3\,e^{8\,t}\\ -2\,(c_1+2\,c_2)\,e^{-t}+c_3\,e^{8\,t}\\ c_2\,e^{-t}+2\,c_3\,e^{8\,t}\end{bmatrix}$

(f) $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} c_1\,e^{t}+c_2\,e^{-t}+c_3\,e^{4\,t}\\ -2\,c_1\,e^{t}+c_3\,e^{4\,t}\\ c_1\,e^{t}-c_2\,e^{-t}+c_3\,e^{4\,t}\end{bmatrix}$

$$\text{(g) } \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -c_3\, e^{3\,t} \\ c_2\, e^{3\,t} + c_3\, t\, e^{3\,t} \\ c_1\, e^{-t} \end{bmatrix}$$

Exercício 6.3 (b) $\mathbf{x}(t) = [e^{3\,t}, e^{3\,t} - t\, e^{3\,t}, 2\, e^{t}]^T$

Capítulo 7

Exercício 7.1 **(b)** (i) $\frac{7\,s-12}{s^2+9}$ (ii) $\frac{5}{s+3}$ (iii) $\frac{4}{s^2+6\,s+25}$ (iv) $\frac{s+3}{s^2+6\,s+13}$ (v) $\frac{6}{(s+5)^4}$ (vi) $\frac{s^4-24\,s-48}{s^4\,(s+2)}$ (vii) $\frac{s-6}{s^2-4}$ (viii) $\frac{2\,s^3-6\,s}{(s^2+1)^3}$ (ix) $\frac{-s^2+12\,s-14}{(s-3)^2(s^2+4)}$ (x) $\frac{4\,s^3-s^2+16\,s+4}{(s^2+4)^2}$ (xi) $\frac{8\,s-24}{(s^2-6\,s+25)^2}$ (xii) $\frac{3\,s^3-11\,s^2+75\,s-4}{(s^2+4)^2\,(s-5)^2}$ (xiii) $\frac{2}{(s^2+1)^2}$ (xiv) $\frac{1}{s-2} - \frac{4}{(s-1)^2} + \frac{8}{s^3}$ (xv) $\frac{s^2+6\,s-7}{(s^2+6\,s+25)^2}$

Exercício 7.2 (a) $e^{-3\,t}\operatorname{sen} 2\,t,$ (b) $5 - 2\,e^{3\,t},$ (c) $9\,e^{2\,t}\,t,$ (d) $8\,e^{3\,t}\cos 2\,t - 12\,e^{3\,t}\operatorname{sen} 2\,t,$ (e) $\cos 3\,t + 3\operatorname{sen} 3\,t - 1,$ (f) $3\cos 3t + \dfrac{4}{3}\operatorname{sen} 3t - 5,$ (g) $3\cos 3\,t + 2\operatorname{sen} 3\,t - 1,$ (h) $t\operatorname{sen} 3\,t,$ (i) $t\cos 3\,t$.

Exercício 7.4 (a) $y(t) = 6\,t - 2 + 3\,e^{-3\,t}$ (b) $y(t) = e^{5\,t} + 6\,e^{t}$ (c) $y(t) = 4 - \operatorname{sen} 3\,t$ (d) $y(t) = 4\,e^{2\,t} - 10\,e^{t} + 6\cos t + 2\operatorname{sen} t$ (e) $y(t) = 2\cos 2\,t + 3\operatorname{sen} 2\,t$ (f) $y(t) = 2\,e^{t} + 2\,e^{-t} - t^2 - 4$ (g) $y(t) = 2\operatorname{sen} t + 8\,t$ (h) $y(t) = 2\,e^{4\,t} - 8\,t - 2$