Lista de EDO – Sistemas Lineares de Equações

Prof. Miguel Frasson

1) Reescrever as equações diferenciais (ou sistemas) como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem na *forma matricial*, e resolver os sistemas que resultarem ser lineares de coeficientes constantes.

a) $\ddot{y} - 2\dot{y} + y = t + 1$

b) $e^t \dddot{y} - t\ddot{y} + \dot{y} - e^t y = 0$

c) $\begin{cases} \ddot{x} = -x - y \\ \dot{y} = -2\dot{x} + 2y \end{cases}$

2) Encontrar a solução geral para os seguintes sistemas de equações diferenciais homogêneos.

a) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x$

b) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x$

c) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x$

d) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} x$

e) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$

f) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} x$

g) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$

3) Resolva os segguntes sistemas usando transformada de Laplace.

a) $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y + \cos t \\ \dot{y} = -2x + 3y + t \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \ddot{x} = y \\ \dot{y} = 2\dot{x} + y + 12 \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad y(0) = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 6y + \delta(t-1) \\ \dot{y} = x \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0 \end{cases}$

4) Encontre a solução geral dos sistemas abaixo, ou quando uma condição inicial for dada, encontre a única solução. Para encontrar a solução particular, use ou método dos coeficientes a determinar ou a fórmula da variação dos parâmetros.

Dica: A inversa de uma matriz 2×2 é dada por $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$.

a) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + t \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 3x_2 - 1 \end{cases}$

b) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -2 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$

d) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \sec t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

5) (Extra) É possível resolver sistemas de equações diferenciais pelo *Método por eliminação*, um método simples, da seguinte forma: I) Da primeira equação, isole y (em função de $\dot{x}$, x e do termo não homogêneo) II) então derive a primeira equação, e nesta expressão, substitua $\dot{y}$ pelo que encontramos na 2ª equação e III) persistindo uma ocorrência de y nesta última expressão, substitua o valor encontrado no passo I). Desta forma, obtenha uma equação diferencial de 2ª ordem para x e uma expressão (a do passo I) de y em função de $\dot{x}$ e x.

Para cada uma das equações abaixo, aplique e resolva os sistemas utilizando o método por eliminação.

a) $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 3x + 2y \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 3y + t \\ \dot{y} = -x - y - 1 \end{cases}$

Gabarito

Ex. 1: a) $\dot{x} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right) x + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ t+1 \end{smallmatrix}\right)$, $y = c_1 e^t + c_2 t e^t + t + 3$, b) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -e^{-t} & te^{-t} \end{pmatrix} x$, c) $\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} z$, $x = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t}$, $y = 5c_3 e^{2t}$

Ex. 2: a) $x(t) = c_1 e^{-t} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) + c_2 e^{4t} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, b) $x(t) = c_1 e^{-3t} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) + c_2 e^{-3t} \left(\begin{smallmatrix} 1-t \\ t \end{smallmatrix}\right)$, c) $x(t) = c_1 e^t \left(\begin{smallmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{smallmatrix}\right) + c_2 e^t \left(\begin{smallmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\cos t \end{smallmatrix}\right)$, d) $x(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, e) $x(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, f) $x(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} t^2/2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$, g) $x(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ 0 \\ cost \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

Ex. 3: a) $x = (e^t + e^{-t})/2 = \cosh t$, $y = (e^t - e^{-t})/2 = \operatorname{senh} t$, b) $x(t) = \frac{3}{2} \cos t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} t + \frac{7}{2} e^t - 5e^{-t} - 4t$, $y(t) = \cos t + \frac{7}{2} e^t - \frac{5}{2} e^{-t} - 1 - 3t$, c) $x(t) = e^{2t} - 4e^{-t} + 3 - 6t$, $y(t) = 4e^{2t} - 4e^{-t}$, d) $x(t) = u_1(t)(3e^{3(t-1)} - 2e^{2(t-1)}) + 3e^{3t} - 2e^{2t}$, $y(t) = u_1(t)(e^{3(t-1)} - e^{2(t-1)}) + e^{3t} - e^{2t}$

Ex. 4: a) $x_1(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} - \frac{3}{2} t + \frac{9}{4}$, $x_2(t) = c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} - t - \frac{3}{2}$, b) $x(t) = c_1 e^{-t} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) + c_2 e^{4t} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) - \frac{1}{2} e^t \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, c) $x(t) = \begin{pmatrix} e^t/2 - e^{-t} + \frac{3}{2} \operatorname{sen} t - \frac{1}{2} \cos t + 8 \\ e^t/2 - e^{-t}/2 + \operatorname{sen} t + 6 \end{pmatrix}$, d) $x(t) = \begin{pmatrix} (2\cos t - \operatorname{sen} t) \ln(cost) + t(\cos t + 2 \operatorname{sen} t) \\ \cos t \ln(\cos t) + t \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

Ex. 5: a) $\ddot{x} - 3\dot{x} - 4x = 0$ e $y = (\dot{x} - x)/2 \implies x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t}, y = -c_1 e^{-t} + \frac{3}{2} c_2 e^{4t}$, b) $\ddot{x} - 2\dot{x} + t - 2$ e $y = (\dot{x} - 3x - t)/3 \implies \frac{1}{8}(-2t^2 - 18t - 6) + c_1 - 3c_2 e^{2t}$, $y = \frac{1}{8}(2t^2 + 14t) - c_1 + c_2 e^{2t}$