Lista de EDO – Equações de 1ª ordem não lineares

1) Resolver as seguintes equações diferenciais (por qualquer método). Note que todas são separáveis. As 5 primeiras são exercícios de integração.

a) $\sqrt{a^2 - y^2} + (b^2 + x^2)y' = 0.$

b) $(2t - 1)(y - 1)^2 + (t - t^2)(1 + y)y' = 0.$

c) $x \operatorname{sen} y + e^{-x}y' = 0.$

d) $\operatorname{sen} y + (1 - \cos t)y' = 0.$

e) $y \ln x dx + (1 + 2y)dy = 0.$

f) $y' = e^{t-y}.$

g) $e^{t+y}y' = e^{2t-y}.$

h) $e^{t^2+y^2}yy' = t + 2t^3.$

2) Utilize dos fatores integrantes para transformar as equações diferenciais em equações exatas e resolva-as.

a) $ty' - y = t^2 + y^2, \qquad \mu = \dfrac{1}{t^2 + y^2}.$

b) $ty' + y + t^4y^4(ty' + y) = 0. \qquad \mu = \dfrac{1}{t^4y^4}.$

c) $3ty + 2t^2y' = 6y^3 + 12ty^2y' \qquad \mu = ty.$

d) $t^2(t + yy') + \sqrt{t^2 + y^2}(ty' - y) = 0, \qquad \mu = \dfrac{1}{t\sqrt{t^2 + y^2}}.$

3) Encontre fatores integrantes para cada equação diferencial abaixo e resolva.

a) $(t^2 + y^2)dt + 3tydy = 0.$

b) $tdy - ydt + t^2y^4(tdy + ydt) = 0..$

c) $tydt + (t^2 + 2y^2 + 2)dy = 0.$

d) $tydt - (2t^2 + 2y^2 + 3)dy = 0.$

4) Mostre que se

$$M = yf(xy), \qquad N = yg(xy),$$

então

$$\mu = \frac{1}{xM - yN}$$

é um fator integrante para

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

5) Modele e resolva os problemas abaixo.

a) A velocidade angular de uma polia é $\omega = 80 - 10t$ rad/s. Quantas voltas dará antes de parar?

b) Uma caixa d'água cilíndrica de 70 dm^2 de base está provida de um orifício de 5 cm^2 de seção praticado na parede lateral. A água escoa com uma velocidade $v = \sqrt{2gh}$, onde $g = 9.8$ m/s^2 e h é a altura do nível da água acima do orifício em metros. Quanto tempo levará para que o nível da água baixe de 4 m a 1 m?

c) Uma bola de naftalina evapora, de modo que o volume diminui com uma taxa proporcional à raiz cúbica do volume elevado ao quadrado. Sendo k a constante de proporcionalidade e V_0 o volume inicial da bola, determine o volume $V(t)$ ao longo do tempo. Após quanto tempo a bola terá evaporado por completo?

d) Uma droga é injetada na corrente sangüínea de um paciente a uma taxa constante de r gramas por minuto. Simultaneamente, a droga é removida a uma taxa proporcional à quantidade $x(t)$ de droga presente no instante t. Determine a quantidade $x(t)$, sendo que o paciente iniciou o tratamento em $t = 0$.

Gabarito

Ex. 1: a) $\operatorname{arcsen}(y/a) = -(1/b)\arctan(x/b) + c \implies y = -a\operatorname{sen}(\frac{1}{b}\arctan(\frac{x}{b}) + c)$,
b) $-\ln|y-1| = \ln|t| + \ln|t-1| + c$,
c) $\ln|\operatorname{cossec} y - \operatorname{cotan} y| = -x\ln|x| + x + c$,
d) $\ln|\operatorname{cossec} y - \operatorname{cotan} y| = -t\ln|t| + t + c$,
e) $2y + \ln y = x - x\ln x + C$,
f) $e^y = e^t + C \implies y = \ln|e^t + C|$,
g) $\frac{1}{2}e^{2t} = e^t + C \implies y = \frac{1}{2}\ln|2e^t + C|$,
h) $\frac{1}{2}e^{y^2} = -e^{-t^2}(t^2 + \frac{3}{2}) \implies y = \pm\sqrt{\ln|D - e^{-t^2}(2t^2+3)|}$
Ex. 2: a) $V(t,y) = \arctan(y/t) - t = -\arctan(t/y) - t$,
b) $V(t,y) = t^2/2 - 1/(3t^3y^3) + y^2/2$,
c) $V(t,y) = t^3y^2 - 3t^2y^4$,
d) $V(t,y) = y/t + \sqrt{t^2+y^2}$
Ex. 3: a) $\mu = t^{-1/3}$, $V = \frac{3}{8}t^{3/8} + \frac{3}{2}y^2t^{2/3}$,
b) $\mu = \dfrac{1}{y^2}$, $V(t,y) = -t/y + \frac{1}{3}t^2y^3$,
c) $\mu = y$, $V = y^4/2 + y^2t^2/2 + y^2$,
d) $\mu = y^{-5}$, $V = \dfrac{2t^2 + 4y^2 + 3}{4y^2}$
Ex. 5: a) Polia pára quando $t = 8$. $\dot\theta = 80 - 10t, \theta(0) = 0$. $\theta(t) = 80t - 5t^2$. R: 50.93 voltas.,
b) $V = \frac{7}{10}h$. Da caixa dai água à taxa de $\dot V = \frac{7}{10}\dot h = -\frac{5}{10^4}\sqrt{19.6h}$, $h(0) = 4$. A equação é separável. Resolvendo, $h(t) = (-\frac{1}{2800}\sqrt{2g}t + 2)^2$ e pergunta-se t tal que $h(t) = 1$. $t = \frac{5400}{\sqrt{2g}} \approx$ 1213.56 s $\approx$ 20.22 min.,
c) $\dot V = -kV^{2/3}$, $V(0) = V_0$. a equação é separável. $V(t) = (-\frac{1}{3}kt + \sqrt[3]{V_0})^3$. $t = \frac{3}{k}\sqrt[3]{V_0}$,
d) $\dot x = r - kx$. $x(t) = \frac{r}{k} + ae^{-kt}$