1.ª Prova de Teoria Qualitativa de EDO - SMA 136

Professor: Alexandre Nolasco de Carvalho

Name: ______________________________

11.10.2019

Questão	Grade
01.st	**2**
02.nd	**2**
03.rd	**2**
04.th	**2**
05.th	**2**
06.th	**2**
07.th	**2**
Total	**14**

Cada uma das questões vale 2.0 pontos. Você pode escolher quais questões irá fazer. Se fizer mais que 05 questões sua prova poderá valer mais que 10.

Para todas as questões abaixo vamos considerar o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{aligned} &\dot z = f(z),\\ &z(0) = z_0 \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \tag{1}$$

onde, $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(y-x)+x-x^3 \\ k(x-y)+y-y^3 \end{pmatrix}$ e $k \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

1.ª Questão Mostre que, para cada $z_0 \in \mathbb{R}^2$, (1) tem uma única solução.

Solução da **1.ª Questão** : O Teorema da Existência e unicidade de soluções para (1) afirma que se f é localmente Lipschitz contínua (note que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é independente de t) então, para cada $z_0 \in \mathbb{R}^2$ o problema (1) tem uma única solução. Como f dada em (1) é continuamente diferenciável, segue da desigualdade de valor médio que f é localmente Lipschitz.

2.ª Questão Prove que, para cada $z_0 \in \mathbb{R}^2$, a solução maximal de (1) está definida para todo $t \geq 0$. Sugestão: Prove que $R_M = [-M, M]^2$, $M > 1$, é um subconjunto invariante de $\mathbb{R}^2$, isto é, que uma solução com dado inicial em R_M nunca deixa R_M para tempos positivos.

Solução da **2.ª Questão** : O Teorema de continuação de soluções para (1) afirma que se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é localmente Lipschitz contínua e $z(\cdot, z_0) : [0, \tau_{z_0}) \to \mathbb{R}^2$ é a solução definida no intervalo maximal de existência então, ou $\tau_{z_0} = \infty$ ou

$$\lim_{t \to \tau_{z_0}} \|z(t, z_0)\| = \infty.$$

Observe que, se $R_M = [-M, M]^2$, $M > 1$, então para z em qualquer das faces do retângulo temos que o campo vetorial $f(z)$ aponta para dentro do retângulo. De fato, se $x = M(-M)$ então $\dot x = k(y - M) + M - M^3 < 0(> 0)$ sempre que $y \in [-M, M]$ e se $y = M(-M)$ então $\dot y = k(x - M) + M - M^3 < 0(> 0)$ sempre que $x \in [-M, M]$. Segue que, uma solução que comece em R_M nunca deixa R_M e portando sua norma não explode quando $t \to \tau_{z_0}$. Consequentemente $\tau_{z_0} = \infty$.

$\boxed{\textbf{3.ª Questão}}$ Supondo que (1) tenha 05 pontos de equilíbrio $\mathcal{E} = \{z_1^*, z_2^*, z_3^*, z_4^*, z_5^*\}$ encontre cada um deles. Sugestão: procure-os sobre a diagonal $x = y$ e sobre a diagonal secundária $x = -y$ e calcule $f'(z_i^*) \in M_{2\times 2}$, $1 \leq i \leq 5$.

Solução da **3.ª Questão** : As soluções de

$$\begin{aligned} &k(y-x) + x - x^3 = 0, \\ &k(x-y) + y - y^3 = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

encontradas sobre as retas $x = y$ e $x = -y$ são

$$(1,1),\ (0,0),\ (-1,-1),\ (\sqrt{1-2k}, -\sqrt{1-2k}) \text{ e } (-\sqrt{1-2k}, \sqrt{1-2k}).$$

$\boxed{\textbf{4.ª Questão}}$ Determine os auto-valores e auto-vetores das matrizes $A_i = f'(z_i^*) \in M_{2\times 2}$, $1 \leq i \leq 5$, e faça um esboço do retrato de fase para $\dot{z} = A_i z$, $1 \leq i \leq 5$.

Solução da **4.ª Questão** : Note que, para $x = y$ ou $x = -y$,

$$f'(z) = \begin{pmatrix} (1-k) - 3x^2 & k \\ k & (1-k) - 3x^2) \end{pmatrix}$$

Esta matriz tem como auto-valores $\lambda_\pm^{x^2} = (1-k) - 3x^2 \pm k$ e correspondentes auto-vetores $v_\pm = \left(\begin{smallmatrix} \pm 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Para $z_1^* = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ e $z_3^* = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ temos que $f'(z_1^*) = f'(z_3^*) = \left(\begin{smallmatrix} -(2+k) & k \\ k & -(2+k) \end{smallmatrix}\right)$ com auto-valores $\lambda_+^1 = -2 < 0$ e $\lambda_-^1 = -2 - 2k < 0$ e auto-vetores correspondentes $v_+ = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ e $v_- = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

Para $z_4^* = \left(\begin{smallmatrix} \sqrt{1-2k} \\ -\sqrt{1-2k} \end{smallmatrix}\right)$ e $z_5^* = \left(\begin{smallmatrix} -\sqrt{1-2k} \\ \sqrt{1-2k} \end{smallmatrix}\right)$ temos que $f'(z_3^*) = f'(z_4^*) = \left(\begin{smallmatrix} 5k-2 & k \\ k & 5k-2 \end{smallmatrix}\right)$ com auto-valores $\lambda_+^1 = 2(3k-1) > 0$ e $\lambda_-^1 = 2(2k-1) < 0$ e auto-vetores correspondentes $v_+ = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ e $v_- = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Por fim, para $z_2^* = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ temos que $f'(z_2^*) = \left(\begin{smallmatrix} 1-k & k \\ k & 1-k \end{smallmatrix}\right)$ com auto-valores $\lambda_+^1 = 1 > 0$ e $\lambda_-^1 = 1 - 2k > 0$ e auto-vetores correspondentes $v_+ = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ e $v_- = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Veja esboço na solução da sexta questão.

$\boxed{\textbf{5.ª Questão}}$ Analise a estabilidade de cada um dos pontos de equilíbrio de (1).

Solução da **5.ª Questão** : Com base na análise feita na questão anterior temos, da propriedade do ponto de sela e dos teoremas de estabilidade sob perturbação vistos em sala de aula que:

- $z_1^* = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ e $z_3^* = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ são assintóticamente estáveis.
- $z_4^* = \left(\begin{smallmatrix} \sqrt{1-2k} \\ -\sqrt{1-2k} \end{smallmatrix}\right)$ e $z_5^* = \left(\begin{smallmatrix} -\sqrt{1-2k} \\ \sqrt{1-2k} \end{smallmatrix}\right)$ são pontos de sela com variedades estáveis e instáveis de dimensão um, portanto instáveis.
- $z_2^* = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ é um nó instável (variedade instável de dimensão 2).

$\boxed{\textbf{6.ª Questão}}$ Supondo que todas as soluções de (1) convergem para um dos pontos de equilíbrios ($V\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \frac{k}{2}(x-y)^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4}$ é tal que $-\nabla V\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$). Faça um esboço tentativo do retrato de fase para (1).

Solução da **6.ª Questão** :

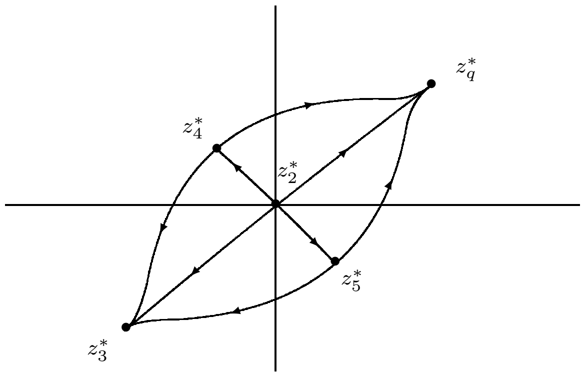

FIGURE 1. Retrato de fase para $k \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

$\boxed{\textbf{7.ª Questão}}$ Para $k \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, (1) possui apenas 05 equilíbrios. Prove esta afirmativa.

Solução da **7.ª Questão** : Note que, isolando y na primeira equação de (2) e substituindo na segunda obtemos

$$kx - (k-1)x - x^3 + \frac{1}{k}[(k-1)x + x^3] - \frac{1}{k^3}[(k-1)x + x^3]^3 = 0$$

que, após expansão do termo cúbico e simplificação, nos dá

$$k^2(2k-1)x + [-2k^3 + 4k^2 - 3k + 1]x^3 - 3(k-1)^2x^5 - 3(k-1)x^7 - x^9 = 0.$$

Cujas soluções não nulas satisfazem (fazendo $x^2 = z$)

$$p(z) := k^2(2k-1) + [-2k^3 + 4k^2 - 3k + 1]z - 3(k-1)^2z^2 - 3(k-1)z^3 - z^4 = 0. \qquad (3)$$

Como as soluções de $x = y$, $x - x^3 = 0$ e $x = -y$, $(1-2k)x - x^3 = 0$ são razízes da equação acima concluímos que o polinômio $q(z) := (1-z)((1-2k)-z) = (1-2k) - 2(1-k)z + z^2$ divide $p(z)$. Dividindo o polinômio $p(z)$ em (3) por $q(z)$ obtemos $r(z) = z^2 + (k-1)z) - k^2$ cujas raízes são

$$z_{\pm} = (1-k) \pm \sqrt{-3k^2 - 2k + 1}$$

observando $-3k^2 - 2k + 1 < 0$ que para $k \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, temos que estas raízes são complexas, não contribuindo para as soluções de (2).

Segue que as únicas raízes são aquelas encontradas nas retas $x = y$ e $x = -y$, quais sejam:

$$(1,1),\ (0,0),\ (-1,-1),\ (\sqrt{1-2k}, -\sqrt{1-2k}) \text{ e } (-\sqrt{1-2k}, \sqrt{1-2k}).$$

Se $k > \frac{1}{2}$ segue que os únicos equilíbrios de (2) são aqueles sobre a diagonal. Se por outro lado, $k \in [0, \frac{1}{3})$ então, temos quatro equilíbrios adicionais dados por

$$\begin{aligned}
z_6^* &= \left(-\sqrt{(1-k) - \sqrt{-3k^2 - 2k + 1}}, \sqrt{(1-k) + \sqrt{-3k^2 - 2k + 1}}\right) \\
z_7^* &= \left(-\sqrt{(1-k) + \sqrt{-3k^2 - 2k + 1}}, \sqrt{(1-k) - \sqrt{-3k^2 - 2k + 1}}\right) \\
z_8^* &= \left(\sqrt{(1-k) + \sqrt{-3k^2 - 2k + 1}}, -\sqrt{(1-k) - \sqrt{-3k^2 - 2k + 1}}\right) \\
z_9^* &= \left(\sqrt{(1-k) - \sqrt{-3k^2 - 2k + 1}}, -\sqrt{(1-k) + \sqrt{-3k^2 - 2k + 1}}\right)
\end{aligned}$$

Os equilíbrios $\{z_6^*, z_7^*, z_8^*, z_9^*\}$ são todos assintóticamente estáveis quando $k \in [0, \frac{1}{3})$.