Teoria Qualitativa de EDO
Vigésima Primeira Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

22 de Novembro de 2019

Decomposição de Morse

Definição

Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *um semigrupo com atrator global* $\mathcal{A}$. *Diremos que um subconjunto não vazio* Ξ *de* $\mathcal{A}$ *é um atrator local se existe um* $\epsilon > 0$ *tal que* $\omega(\mathcal{O}_\epsilon(\Xi)) = \Xi$. *O repulsor* Ξ^* *associado ao atrator local* Ξ *é o conjunto definido por*

$$\Xi^* = \{x \in \mathcal{A} : \omega(x) \cap \Xi = \varnothing\}.$$

O par (Ξ, Ξ^*) *é chamado par atrator repulsor para* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$.

Exercício

Mostre que, se Ξ é um atrator local, então Ξ^* é fechado, invariante e $\Xi \cap \Xi^* = \varnothing$.

Observe que Ξ é um atrator local se, e somente se, é compacto invariante e atrai $\mathcal{O}_\epsilon(\Xi)$ para algum $\epsilon > 0$.

Lema

Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *um semigrupo em* $\mathbb{R}^n$ *com atrator global* $\mathcal{A}$. *Se* Ξ *é um conjunto invariante compacto para* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *e existe um* $\epsilon > 0$ *tal que* Ξ *atrai* $\mathcal{O}_\epsilon(\Xi) \cap \mathcal{A}$ *então, dado* $\delta > 0$ *existe um* $\delta' > 0$ *tal que* $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathcal{O}_\delta(\Xi)$.

Prova: Se, para algum $\delta \in (0,\epsilon)$, não existe $\delta' > 0$ tal que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathcal{O}_\delta(\Xi)$, existem $x \in \Xi$, $\mathbb{R}^n \ni x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ e $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tais que $d(T(t_n)x_n,\Xi) \geq \delta$ e $T(t)x_n \in \mathcal{O}_\delta(\Xi)$, $t \in [0,t_n)$.

Segue de um resultado anterior que existe uma solução global $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tal que $\xi_n : [-t_n,\infty) \to \mathbb{R}^n$ dada por $\xi_n(t) = T(t_n + t)x_n$ satisfaz $\xi_n(t) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

Claramente $\xi(t) \in \overline{\mathcal{O}_\delta(\Xi)} \bigcap \mathcal{A} \subset \mathcal{O}_\epsilon(\Xi) \bigcap \mathcal{A}$ para todo $t \leqslant 0$, $d(\xi(0),\Xi) \geq \delta$, e consequentemente Ξ não pode atrair $\mathcal{O}_\epsilon(\Xi) \cap \mathcal{A}$. $\square$

Lema (2)

Se $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *é um semigrupo em* $\mathbb{R}^n$ *com um atrator global* $\mathcal{A}$*. Se* Ξ *é um atrator local para* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *restrito a* $\mathcal{A}$ *e* K *é um subconjunto compacto de* $\mathcal{A}$ *tal que* $K \cap \Xi^* = \varnothing$*, então* Ξ *atrai* K*. Além disso* Ξ *é um atrator local para* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *em* $\mathbb{R}^n$*.*

Prova: Se $\Xi = \omega(\mathcal{O}_\epsilon(\Xi) \cap \mathcal{A})$ não atrai K e $0 < \delta < \epsilon$, existe $\delta' \in (0, \delta)$, $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $x \in K$ e $K \ni x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ tais que $d(T(t)x_n, \Xi) \geqslant \delta'$, $0 \leqslant t \leqslant t_n$. Isto implica que $d(T(t)x, \Xi) \geqslant \delta'$ para todo $t \geqslant 0$ e, consequentemente, $\omega(x) \cap \Xi = \varnothing$ e portanto $x \in \Xi^*$ o que é uma contradição.

Para a parte restante do resultado note que, do Lema 1, existe $\delta' \in (0, \epsilon)$ tal que $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathcal{O}_\epsilon(\Xi) \cap \mathcal{A}$ e portanto $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \cap \Xi^* = \varnothing$. Da invariância de $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi))$ e da propriedade que Ξ atrai $\mathcal{O}_\epsilon(\Xi) \cap \mathcal{A}$, devemos ter que $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \Xi$. Como $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi))$ atrai $\mathcal{O}_{\delta'}(\Xi)$ o resultado segue. $\square$

Lema

Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *um semigrupo em* $\mathbb{R}^n$ *com um atrator global* $\mathcal{A}$ *e um par atrator-repulsor* (Ξ, Ξ^*).

1) *Uma solução global* $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *de* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *com a propriedade que* $\overline{\xi(\mathbb{R})} \cap \Xi^* \neq \varnothing$ *deve satisfazer* $d(\xi(t), \Xi^*) \stackrel{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0$.
2) *Uma solução global* $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *de* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *com a propriedade que* $\xi(t) \in \mathcal{O}_\delta(\Xi^*)$ *para todo* $t \leqslant 0$ *e algum* $\delta > 0$ *tal que* $\mathcal{O}_\delta(\Xi^*) \cap \Xi = \varnothing$ *deve satisfazer* $d(\xi(t), \Xi^*) \stackrel{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0$.

Prova: 1) Faremos a prova por redução ao absurdo. Se a conclusão é falsa, existe $\delta' > 0$ e seqüência $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tal que $d(\xi(-t_n), \Xi^*) \geqslant \delta'$.

Isto nos leva a uma contradição com o fato que Ξ deve atrair o subconjunto compacto $K = \{z \in \mathcal{A} : d(z, \Xi^*) \geqslant \delta'\}$ de $\mathcal{A}$.

Para provar 2) observamos que se $\overline{\xi(\mathbb{R})} \cap \Xi^* = \varnothing$, do Lema 2 temos que $\overline{\xi(\mathbb{R})} \subset \Xi$ o que nos dá uma contradição.

Por outro lado, se $\overline{\xi(\mathbb{R})} \cap \Xi^* \neq \varnothing$, segue de 1) que $d(\xi(t), \Xi^*) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$. Isto completa a demonstração.$\square$

Lema

Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *um semigrupo em* $\mathbb{R}^n$ *com atrator global* $\mathcal{A}$ *e um par atrator-repulsor* (Ξ, Ξ^*). *Se* $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *é uma solução global limitada para* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *por* $x \notin \Xi \cup \Xi^*$, *então* $\xi(t) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi$ *e* $\xi(t) \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} \Xi^*$. *Além disso, se* $x \in \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{A}$ *então,* $T(t)x \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi \cup \Xi^*$.

Prova: Como $x \notin \Xi^*$ temos que $\omega(x) \cap \Xi$ é não vazio e, do fato que Ξ é um atrator local, temos que $\xi(t) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi$.

Se $\overline{\xi(\mathbb{R})} \cap \Xi^* = \varnothing$, então $\xi(\mathbb{R})$ é invariante e, do Lema 2, é atraído por Ξ o que é uma contradição.

Logo, $\overline{\xi(\mathbb{R})} \cap \Xi^*$ é não vazio e, do Lema 3, $d(\xi(t), \Xi^*) \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.

Para $x \in \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{A}$ provemos que $T(t)x \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi \cup \Xi^*$.

Se $\overline{\gamma^+(x)} \cap \Xi \neq \varnothing$ temos que $T(t)x \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi$. Por outro lado, se existe $\delta > 0$ com $\gamma^+(x) \cap \mathcal{O}_\delta(\Xi) = \varnothing$, afirmamos que $T(t)x \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi^*$.

De fato, $\omega(x) \cap \mathcal{O}_\delta(\Xi) = \varnothing$ e da invariância de $\omega(x)$ concluímos que $\omega(x) \subset \Xi^*$. Como $\omega(x)$ atrai x o resultado segue. $\square$

Corolário

Se $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *é um semigrupo em* $\mathbb{R}^n$ *com um atrator global* $\mathcal{A}$ *e* (Ξ, Ξ^*) *é um par atrator-repulsor para* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$*, então* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *é um semigrupo dinamicamente-gradiente relativo à família disjunta de invariantes isolados* $\{\Xi, \Xi^*\}$*.*

Com isto podemos começar a estudar a decomposição de Morse do atrator de um semigrupo dinamicamente-gradiente relativo a a família disjunta de conjuntos invariantes isolados. Começamos fixando a definição de decomposição de Morse que utilizaremos.

Definição

Dada uma família crescente $\varnothing = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = \mathcal{A}$, *de* $n+1$ *atratores locais, para* $j = 1, \cdots, n$, *defina* $\Xi_j := A_j \cap A^*_{j-1}$. *A* n*-upla ordenada* $\boldsymbol{\Xi} := (\Xi_1, \Xi_2, \cdots, \Xi_n)$ *é chamada uma decomposição de Morse de* $\mathcal{A}$.

No que se segue, nosso objetivo é mostrar que, se $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ é um semigrupo dinamicamente-gradiente com equilíbrios $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ e com atrator global $\mathcal{A}$, então uma reordenação de $\mathcal{E}$ é uma decomposição de Morse de $\mathcal{A}$. O resultado a seguir desempenha um papel fundamental neste processo.

Exercício

Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *um semigrupo com atrator global* $\mathcal{A}$ *e* $\Xi \subset \mathcal{A}$ *um conjunto invariante isolado. Mostre que* Ξ *é um atrator local se, e somente se,* $W^{\mathrm{u}}(\Xi) = \Xi$.

Lema

Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *um semigrupo dinamicamente-gradiente com equilíbrios* $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$*. Então, existe um* $1 \leqslant k \leqslant n$ *tal que* $\{\mathbf{e}_k\}$ *é um atrator local para* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *em* $\mathbb{R}^n$.

Prova: Do Exercício 2, se não existe um atrator local em $\mathcal{E}$ temos que, para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, existe uma solução global $\mathbf{e}_i : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ tal que $\xi_i(t) \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} \mathbf{e}_i$ e $\xi_i(t) \stackrel{t\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{e}_j$ com $j \neq i$. Isto produz uma estrutura homoclínica e nos dá uma contradição. $\square$

Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ um semigrupo dinamicamente-gradiente com equilíbrios $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$.

Se (após uma possível reordenação) $\mathbf{e}_1$ é um atrator local para $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ e

$$\{\mathbf{e}_1\}^* = \{a \in \mathcal{A} : \omega(a) \cap \{\mathbf{e}_1\} = \varnothing\}$$

cada $\mathbf{e}_i$, $i > 1$ está em $\{\mathbf{e}_1\}^*$ e para qualquer $a \in \mathcal{A} \backslash \{\{\mathbf{e}_1\} \cup \{\mathbf{e}_1\}^*\}$ e solução global $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ com $\phi(0) = a$ temos que

$$\mathbf{e}_1^* \overset{t \to -\infty}{\longleftarrow} \phi_j(t) \overset{t \to \infty}{\longrightarrow} \mathbf{e}_1.$$

A restrição de $T(t)$ a $\Xi_1^* =: \Xi_{1,0}^*$ é um semigrupo dinamicamente-gradiente em Ξ_1^* com equilíbrios $\{\mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ e podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\mathbf{e}_2$ é um atrator local para esta restrição.

Se $\Xi_{2,1}^*$ é o repulsor de $\mathbf{e}_2$ para $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ restrito a $\{\mathbf{e}_1\}^*$, podemos prosseguir e considerar a restrição de $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ a $\Xi_{2,1}^*$ esta restrição é um semigrupo dinamicamente-gradiente em $\Xi_{2,1}^*$ com equilíbrios $\{\mathbf{e}_3, \cdots, \mathbf{e}_n\}$.

Com este procedimento, após um número finito de passos, obtemos uma reordenação de com equilíbrios $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ de modo que $\mathbf{e}_j$ é um atrator local para a restrição de $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ a $\Xi^*_{j,j-1}$ $(\Xi^*_{0,-1} := \mathcal{A})$.

Com esta construção, se uma solução global $\xi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ satisfaz

$$\mathbf{e}_\ell \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \xi(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{e}_k \tag{1}$$

então $\ell \geqslant k$.

Provaremos que esta reordenação dos $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ (denotaremos da mesma forma) é uma decomposição de Morse para $\mathcal{A}$ com uma seqüência oportunamente escolhida $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n$ de atratores locais.

Defina $A_0 = \varnothing$, $A_1 = \{\mathbf{e}_1\}$ e para $j = 2, 3, \cdots, n$

$$A_j = A_{j-1} \cup W^{\mathrm{u}}(\mathbf{e}_j) = \cup_{i=1}^{j} W^{\mathrm{u}}(\mathbf{e}_j). \tag{2}$$

É claro que $A_n = \mathcal{A}$.

Exercício

Mostre que A_j é compacto.

Teorema

Seja $\{T(t)\!:t\geqslant 0\}$ dinamicamente-gradiente relativamente à família disjunta de invariantes isolados $\boldsymbol{\Xi}=\{\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_n\}$ reordenada de maneira que $\mathbf{e}_j$ é um atrator para a restrição de $\{T(t):t\geqslant 0\}$ a $\Xi^*_{j-1,j-2}$ ($\Xi^*_{0,-1}=\mathcal{A}$).

Então A_j definido em (2) é um atrator local para $\{T(t)\!:t\geqslant 0\}$ em $\mathbb{R}^n$,

$$\{\mathbf{e}_j\}=A_j\cap A^*_{j-1}.$$

e $\boldsymbol{\Xi}$ é uma decomposição de Morse de $\mathcal{A}$.

Prova: Do Lema 2, é suficiente provar que $A_j = A_{j-1} \cup W^{\mathrm{u}}(\mathbf{e}_j)$ é um atrator local para $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ restrito ao atrator global $\mathcal{A}$.

Escolha $d > 0$ tal que $\mathcal{O}_d(\bigcup_{i=1}^{j} W^u(\mathbf{e}_i)) \cap (\bigcup_{i=j+1}^{n} \mathbf{e}_i) = \varnothing$.

Se existem $\delta < d$ e $\delta' < \delta$ tais que $\gamma^+(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j) \cap \mathcal{A}) \subset \mathcal{O}_\delta(A_j) \cap \mathcal{A}$, então $\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j) \cap \mathcal{A})$ atrai $\mathcal{O}_{\delta'}(A_j) \cap \mathcal{A}$ e $(\omega(\mathcal{O}_{\delta'}(A_j) \cap \mathcal{A})$ é invariante) está contido em A_j provando que A_j é um atrator local em $\mathcal{A}$.

Se este não é o caso, existe uma seqüência $\{x_k\}$ em $\mathcal{A}\backslash A_j$ com $d(x_k, A_j) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, para cada x_k uma solução global $\xi_k : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ por x_k e uma seqüência $t_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, tal que $d(\xi_k(t), A_j) \leqslant \delta$ para todo $t \in [0, t_k)$ e $d(\xi_k(t_k), A_j) \geq \delta$.

Desta maneira, construímos uma solução global $\xi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ tal que $d(\xi(t), A_j) \leqslant \delta$ para todo $t \leqslant 0$ e $d(\xi(0), A_j) = \delta$. Isto nos dá uma contradição.

Para provar que $\Xi_j = A_j \cap A^*_{j-1}$ note que $A_j \supset \bigcup_{i=1}^{j}\{\mathbf{e}_i\}$ (veja (2)) e $A^*_{j-1} = \{z \in \mathcal{A} : \omega(z) \cap A_{j-1} = \varnothing\} \supset \bigcup_{i=j}^{n}\{\mathbf{e}_i\}$ e $A_j \cap A^*_{j-1} \supset \Xi_j$.

Portanto, dado $z \in A_j \cap A^*_{j-1}$ temos que uma solução global $\xi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ por z deve satisfazer

$$\mathbf{e}_\ell \xleftarrow{t \to -\infty} \xi(t) \xrightarrow{t \to \infty} \mathbf{e}_k .$$

com $k \leqslant \ell \leqslant j$ (do fato que $z \in A_j$) e $j \leqslant k \leqslant \ell$ (do fato que $z \in A^*_{j-1}$) e $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ é dinamicamente-gradiente relativamente à família disjunta de invariantes isolados $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$, obtemos que $z \in \mathbf{e}_j$.

Logo $A_j \cap A^*_{j-1} \subset \Xi_j$ e a igualdade segue. $\square$

Proposição

Seja $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *um semigrupo dinamicamente-gradiente relativamente à família disjunta de conjuntos invariantes isolados* $\boldsymbol{\Xi} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ *reordenados de maneira que constituam uma decomposição de Morse de* $\mathcal{A}$. *Então,*

$$\bigcap_{j=0}^{n} (A_j \cup A_j^*) = \bigcup_{j=1}^{n} \{\mathbf{e}_j\}.$$

Prova: Claramente $\bigcup_{j=1}^{n}\{\mathbf{e}_j\} \subset \bigcap_{j=0}^{n}(A_j \cup A_j^*)$.

Agora, seja $z \in \bigcap_{j=0}^{n}(A_j \cup A_j^*)$, $k \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $z \in A_j$, $k \leqslant j \leqslant n$, e $z \in A_j^*$, $1 \leqslant j \leqslant k-1$.

Segue do Teorema 1 que $z \in A_k \cap A_{k-1}^* = \{\mathbf{e}_k\}$. Isto completa a prova.$\square$