Teoria Qualitativa de EDO
Vigésima Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

12 de Novembro de 2019

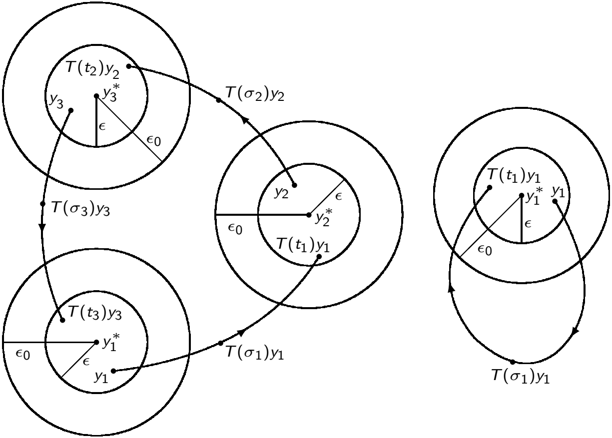
Semigrupos ‘dinamicamente-gradiente’

Definição (Recorrência por cadeias)

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *um semigrupo com um número finito de soluções estacionárias* $\mathcal{E} = \{y_1^*, \cdots y_{\mathfrak{p}}^*\}$ *e* $\delta_0 = \frac{1}{2} \min_{1 \leqslant i < j \leqslant \mathfrak{p}} \|y_i^* - y_j^*\|$.

Seja $\epsilon_0 < \delta_0$, $y^* \in \mathcal{E}$ *e* $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$. *Uma* $\epsilon-$**cadeia** *de* y^* *a* y^* *é um subconjunto* $\{y_{\ell_1}^*, \ldots, y_{\ell_k}^*\}$ *de* $\mathcal{E}$, *juntamente com conjuntos* $\{y_1, \cdots, y_k\}$ *em* $\mathbb{R}^n$ *e* $\{t_1, \sigma_1, \ldots, t_k, \sigma_k\}$ *em* $\mathbb{R}$ *tais que,* $0 < t_i < \sigma_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $k \leqslant \mathfrak{p}$, $\|y_i - y_{\ell_i}^*\| < \epsilon$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $y^* = y_{\ell_1}^* = y_{\ell_{k+1}}^*$, $\mathrm{dist}(T(\sigma_i)y_i, \mathcal{E}) > \epsilon_0$ *e* $\|T(t_i)y_i - y_{\ell_{i+1}}^*\| < \epsilon$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Diremos que $y^* \in \mathcal{E}$ *é* **recorrente por cadeias** *se existe* $\epsilon_0 \in (0, \delta_0)$ *fixo e uma* $\epsilon-$*cadeia de* y^* *a* y^*, *para cada* $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$.



Exemplos de $\epsilon-$cadeias

Definição

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ um semigrupo com um número finito de soluções estacionárias $\mathcal{E} = \{y_1^*, \cdots y_{\mathfrak{p}}^*\}$ e suponha que ele tem um atrator global $\mathcal{A}$.

Dizemos que $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é um semigrupo dinamicamente-gradiente se as seguintes condições são satisfeitas:

$(G1)$ *Dada uma solução global $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ em $\mathcal{A}$, existem $i, j \in \{1, \cdots, \mathfrak{p}\}$ tais que*

$$\lim_{t\to-\infty} \|\xi(t) - y_i^*\| = 0 \ e \ \lim_{t\to\infty} \|\xi(t) - y_j^*\| = 0.$$

$(G2)$ *$\mathcal{E} = \{y_1^*, \cdots, y_{\mathfrak{p}}^*\}$ não contém ponto recorrente por cadeia.*

Os quatro resultados a seguir são de fundamental importância para o desenvolvimento da teoria de atratores para semigrupos.

Lema

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *um semigrupo e* y^* *um ponto de equilíbrio para* $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$*. Dado* $\tau \in \mathbb{R}^+$ *e* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que* $\{T(t)y : 0 \leqslant t \leqslant \tau,\, y \in B_\delta(y^*)\} \subset B_\epsilon(y^*)$*.*

Proposição

Para semigrupo $\{T(t): t \in \mathbb{R}^+\}$, *sejam* $\{\sigma_k\}$ *uma sequência em* $\mathbb{R}^+$ *com* $\sigma_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $\{u_k\}$ *uma sequência limitada em* $\mathbb{R}^n$ *e, para* $\mathbb{J}_k = \{s \in \mathbb{R}: -\sigma_k \leqslant s < \infty\}$, *defina* $\xi^k : \mathbb{J}_k \to \mathbb{R}^n$ *por* $\xi^k(s) = T(s+\sigma_k)u_k$, $s \in \mathbb{J}_k$.

Se $\{T(s)u_k : k \in \mathbb{N},\ s \in \mathbb{R}^+\}$ *é limitado, existe uma solução global* $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *de* $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *e uma subsequência de* $\{\xi^k\}$ *(que continuamos a denotar* $\{\xi^k\}$*) tal que*

$$\lim_{k\to\infty} \xi^k(s) \to y(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Lema

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *um semigrupo com um número finito de soluções estacionárias* $\mathcal{E} = \{y_1^*, \cdots y_{\mathfrak{p}}^*\}$ *e atrator global* $\mathcal{A}$*.*

Se $\{T(t) : t\in\mathbb{R}^+\}$ *satisfaz* $(G1)$*, dado* $\delta<\delta_0=\frac{1}{2}\min\limits_{1\leqslant i<j\leqslant\mathfrak{p}}\|y_i^* - y_j^*\|$ *e* $B \subset \mathbb{R}^n$ *limitado, existe um* $t_0 = t_0(\delta, B) > 0$ *tal que* $\{T(t)u_0 : 0 \leqslant t \leqslant t_0\} \cap \cup_{i=1}^{\mathfrak{p}} B_\delta(y_i^*) \neq \varnothing$ *para todo* $u_0 \in B$*.*

Lema

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *um semigrupo dinamicamente-gradiente. Denote por* $\mathcal{E} = \{y_1^*, \cdots y_{\mathfrak{p}}^*\}$ *seu conjunto de soluções estacionárias e por* $\mathcal{A}$ *seu atrator global.*

Então, dado $0 < \delta < \delta_0$*, existe* $\delta' > 0$ *tal que, se para algum* $1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{p}$*,* $u_0 \in B_{\delta'}(y_i^*)$ *e* $t_1 > 0$*,* $\|T(t_1)u_0 - y_i^*\| \geqslant \delta$*, então* $\|T(t)u_0 - y_i^*\| > \delta'$ *para todo* $t \geqslant t_1$*.*

Prova: Supponha que, para algum $1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{p}$, existan sequências $\{u_k\}$ em $\mathbb{R}^n$ com $\|u_k - z_i^*\| < \frac{1}{k}$ e $\{\sigma_k\}, \{t_k\}$ em $\mathbb{R}^+$ com $\sigma_k < t_k$ tais que $d(T(\sigma_k)u_k, z_i^*) \geqslant \delta$ e $\|T(t_k)u_k - z_i^*\| < \frac{1}{k}$.

Isto contradiz $(G2)$ e prova o resultado.$\square$

Agora veremos que, para um semigrupo dinamicamente-gradiente, o $\omega-$limite de um ponto é exatamente um ponto de equilíbrio.

Observe que (G_1) é imposta apenas para soluções no atrator.

Lema

Se $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é um semigrupo dinamicamente-gradiente com equilíbrios $\mathcal{E}=\{y_1^*,\cdots,y_{\mathfrak{p}}^*\}$ e atrator global $\mathcal{A}$. Dado $u \in \mathbb{R}^n$ existe um $y_j^* \in \mathcal{E}$ tal que

$$T(t)u \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} y_j^*.$$

Prova: Segue do Lema 3 que, dado $\delta \in (0, \delta_0)$ existe $\delta' \in (0, \delta)$ tal que $\|v - y_i^*\| < \delta'$ e para algum $t_{v,\delta} > 0$, $\|T(t_{v,\delta})v - y_i^*\| \geqslant \delta$, então $\|T(t)v - y_i^*\| > \delta'$ para todo $t \geqslant t_{v,\delta}$.

Por outro lado, como $\gamma^+(u)$ é limitada, segue do Lema 2 que, dado δ' existe um $t_{\delta'} = t_{\delta'}(\gamma^+(u)) \in \mathbb{R}$ tal que, para cada $v \in \gamma^+(u)$,

$$\{T(t)v : 0 \leqslant t \leqslant t_{\delta'}\} \cap \cup_{i=1}^{\mathfrak{p}} B_{\delta'}(y_i^*) \neq \varnothing.$$

Do fato de que $\mathcal{E}$ é finito segue que existe um $y_j^* \in \mathcal{E}$ e, para cada $\delta \in (0, \delta_0)$, um $s_\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $T(s)u \in B_\delta(y_j^*)$ para todo $s \geqslant s_\delta$. Isto completa a prova do resultado.$\square$

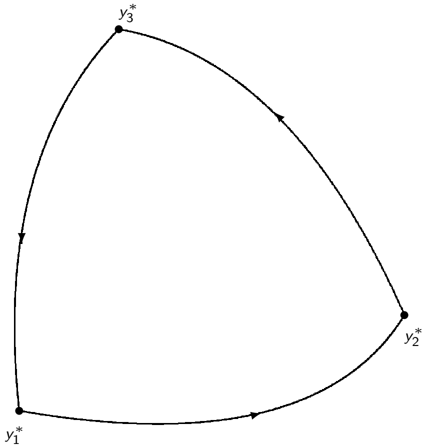
Estruturas Homoclínicas

Definição

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *um semigrupo com um número finito de soluções estacionárias* $\mathcal{E} = \{y_1^*, \cdots y_{\mathfrak{p}}^*\}$ *e um atrator global* $\mathcal{A}$*.*

Uma **estrutura homoclínica** *em* $\mathcal{A}$ *é um conjunto* $\{y_{\ell_1}^*, \cdots, y_{\ell_k}^*\} \subset \mathcal{E}$ *e um conjunto de soluções globais* $\{\xi^{(i)} : \mathbb{R} \to \mathcal{A},\ 1 \leqslant i \leqslant k\}$ *tal que,*

$$\lim_{t\to-\infty} \xi^{(i)}(t) = y_{\ell_i}^*,\ \lim_{t\to+\infty} \xi^{(i)}(t) = y_{\ell_{i+1}}^*,\ 1 \leqslant i \leqslant k,\ \text{e } y_{\ell_{k+1}}^* := y_{\ell_1}^*.$$



$$\text{Estrutura homoclínica} \qquad (1)$$

Agora podemos provar o seguinte resultado relacionando $(G1)$ e $(G2)$ à não-existência de estruturas homoclínicas.

Lema

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *uma semigrupo que possui um número finito de soluções estacionárias* $\mathcal{E} = \{y_1^*, \cdots y_{\mathfrak{p}}^*\}$ *e um atrator global* $\mathcal{A}$.

Se $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *satisfaz* $(G1)$, *então* $(G2)$ *estará satisfeita se, e somente se,* $\mathcal{A}$ *não possuir estruturas homoclínicas.*

Prova: Se $\mathcal{A}$ tem uma estrutura homoclínica e y^* é um equilíbrio nesta estrutura é fácil ver que y^* é recorrente por cadeias.

Por outro lado, se $y^* \in \mathcal{E}$ é recorrente por cadeia, existem $\delta < \delta_0$, $\{y^*_{\ell_1}, \cdots, y^*_{\ell_{r+1}}\} \subset \mathcal{E}$ e para cada $\mathbb{N} \ni k > \frac{1}{\delta}$, pontos $y_1^k, \cdots, y_{r+1}^k$, $t_1^k > \tau_1^k, \cdots, t_r^k > \tau_r^k$ tais que

$$\|y_i^k - y^*_{\ell_i}\| < \frac{1}{k},\ d(T(\tau_i^k)y_i^k, \mathcal{E}) > \delta,\ \|T(t_i^k)y_i^k - y^*_{\ell_{i+1}}\| < \frac{1}{k},\ 1 \leqslant i \leqslant r.$$

Escolha $\sigma_i^k > 0$ tal que $\|T(\sigma_i^k)y_i^k - y^*_{\sigma_i}\| = \delta$ e $\|T(t)y_i^k - y^*_{\sigma_i}\| < \delta$, para todo $0 \leqslant t < \sigma_i^k$. De um lema anterior, segue que $\sigma_i^k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Para $t \in [-\sigma_i^k, \infty)$ seja $\xi^{i,k}(t) = T(\sigma_i^k + t)y_i^k$.

Da proposição anterior existe solução global $\xi^{(i)}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ que satisfaz $\xi^{(i)}(t) \in \bar{B}_\delta(y_{\ell_i}^*)$, $\forall\ t < 0$.

Como $\xi^{(i)}$ converge para um equilíbrio quando $t \to +\infty$ e quando $t \to -\infty$, temos $\xi^{(i)}(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} y_{\ell_i}^*$.

Podemos assumir que, entre $-\sigma_k^i$ e $t_k^i - \sigma_k^i$, a solução $\xi^{k,i}$ fica longe de $\mathcal{E} \backslash \{y_{\ell_i}^*, y_{\ell_{i+1}}^*\}$, caso contrário, inseriríamos novos pontos nas $\epsilon-$cadeias até que este fosse o caso.

Segue de um lema anterior que $\xi^{(i)}(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} y_{\ell_{i+1}}^*$.

O conjunto $\{y^*_{\ell_1}, \cdots, y^*_{\ell_k}\} \subset \mathcal{E}$ e o conjunto de soluções globais $\{\xi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ 1 \leqslant i \leqslant k\}$ são tais que,

$$\lim_{t\to-\infty} \xi_n^{(i)} = y^*_{\ell_i}, \quad \lim_{t\to+\infty} \xi_n^{(i)} = y^*_{\ell_{i+1}}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k,$$

com $y^*_{\ell_{k+1}} := y^*_{\ell_1}$. Portanto $\mathcal{A}$ tem uma estrutura homoclínica. $\square$

Corolário

Se $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é um semigrupo dinamicamente-gradiente e $\mathcal{A}$ seu atrator global, existem pontos de equilíbrio y_α^* e y_ω^* tais que y_α^* tem conjunto estável trivial em $\mathcal{A}$; isto é, $W_{\mathcal{A}}^s(y_\alpha^*) = \{y_\alpha^*\}$ onde

$$W_{\mathcal{A}}^s(y_\alpha^*) := \{y \in \mathcal{A} : \text{ tal que } \ T(t)y \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} y_\alpha^*\}$$

e y_ω^* tem conjunto instável trivial; isto é, $W^u(y_\omega^*) = \{y_\omega^*\}$.

Prova: Vamos provar a existência de um ponto de equilíbrio y_ω^* com um conjunto instável trivial. A existência de y_α^* é similar.

Se $\mathcal{E}=\{y_1^*,\cdots y_\mathfrak{p}^*\}$ são os equilíbrios de $\{T(t):t\in\mathbb{R}^+\}$ e para cada y_i^* existe solução global $\xi^{(i)}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ tal que $\xi^{(i)}(t)\stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} y_i^*$.

Segue que existe k, $1\leqslant k\leqslant\mathfrak{p}$, tal que $\{y_{\ell_1}^*,\cdots,y_{\ell_k}^*\}$ e $\{\xi^{(1)},\cdots,\xi^{(\ell)}\}$ constituem uma estrutura homoclínica.

Isto contradiz $(G2)$ e prova a existência de y_ω^*. $\square$

Semigrupos dinamicamente-gradiente sob perturbação

A seguir considere a família de semigrupos $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{R}^+\}_{\eta\in[0,1]}$.

Denotaremos por $\mathcal{E}_\eta$ o conjunto dos equilíbrios de $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ para cada $\eta \in [0,1]$.

Definição

Diremos que uma família de semigrupos $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{R}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ é contínua se $\mathbb{R}^+ \times [0,1] \ni (t,\eta) \mapsto T_\eta(t)x \in \mathbb{R}^n$ é contínua em $\eta = 0$, uniformemente para (t,x) em compactos de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$ se, dadas sequências $\eta_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\{u_k\}$ limitada em $\mathbb{R}^n$ e $t_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, então $\{T_{\eta_k}(t_k)u_k\}$ é limitada.

Teorema

Seja $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{R}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ *uma família contínua e coletivamente assintoticamente compacta em* $\eta = 0$ *tal que*

a) $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *tem um atrator global* $\mathcal{A}_\eta$, $\forall\ \eta \in [0,1]$ *e existe* $\eta_0 \in (0,1]$ *tal que* $\cup_{\eta\in[0,\eta_0]}\mathcal{A}_\eta$ *é limitado.*

b) $\mathcal{E}_\eta = \{y_1^{*,\eta}, \cdots, y_{\mathfrak{p}}^{*,\eta}\}$, $\forall\ \eta \in [0,1]$, *e* $d(y_i^{*,\eta}, y_i^{*,0}) \xrightarrow{\eta\to 0} 0$, $1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{p}$. *Além disso, existem* $\delta > 0$ *e* $\eta_0 > 0$ *tais que a única solução global de* $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *contida em* $B_\delta(y_i^{*,\eta})$ *é* $y_i^{*,\eta}$, $1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{p}$, $0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0$.

c) $\{T_0(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *é um semigrupo dinamicamente-gradiente.*

Então, $\exists\, \eta_0 > 0$ *tal que,* $\{T_\eta(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *é dinamicamente-gradiente* $\forall \eta \in [0, \eta_0]$.