Teoria Qualitativa de EDO
Decima Nona Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

04 de Novembro de 2019

Semigrupos 'dinamicamente gradiente'

A associação entre semigrupos gradientes e funções de Lyapunov fazem que não esperemos que uma perturbação de um semigrupo gradiente nos dê um novo semigrupo gradiente.

De fato, este é o maior obstáculo na prova de que uma perturbação de um semigrupo gradiente seja gradiente.

Assim, vamos introduzir o conceito de *semigrupo dinamicamente gradiente* utilizando apenas propriedades dinâmicas de semigrupos gradientes e evitando a associação com funções de Lyapunov.

Mostraremos que uma pequena perturbação de um semigrupo dinamicamente gradiente ainda é dinamicamente gradiente e que é possível construir uma função de Lyapunov para o mesmo.

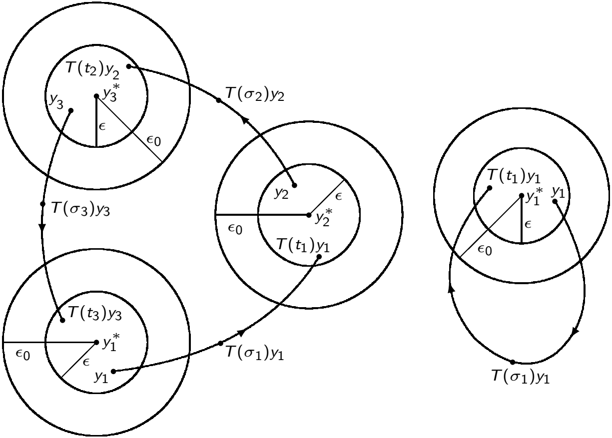
Recorrência por cadeia

Definição

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *um semigrupo com um número finito de soluções estacionárias* $\mathcal{E} = \{y_1^*, \cdots y_{\mathfrak{p}}^*\}$ *e* $\delta_0 = \frac{1}{2} \min_{1 \leqslant i < j \leqslant \mathfrak{p}} \|y_i^* - y_j^*\|$.

Seja $\epsilon_0 < \delta_0$, $y^* \in \mathcal{E}$ *e* $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$. *Uma* $\epsilon-$**cadeia** *de* y^* *a* y^* *é um subconjunto* $\{y_{\ell_1}^*, \ldots, y_{\ell_k}^*\}$ *de* $\mathcal{E}$, *juntamente com conjuntos* $\{y_1, \cdots, y_k\}$ *em* $\mathbb{R}^n$ *e* $\{t_1, \sigma_1, \ldots, t_k, \sigma_k\}$ *em* $\mathbb{R}$ *tais que,* $0 < t_i < \sigma_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $k \leqslant \mathfrak{p}$, $\|y_i - y_{\ell_i}^*\| < \epsilon$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $y^* = y_{\ell_1}^* = y_{\ell_{k+1}}^*$, $\operatorname{dist}(T(\sigma_i)y_i, \mathcal{E}) > \epsilon_0$ *e* $\|T(t_i)y_i - y_{\ell_{i+1}}^*\| < \epsilon$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Diremos que $y^* \in \mathcal{E}$ *é* **recorrente por cadeias** *se existe* $\epsilon_0 \in (0, \delta_0)$ *fixo e uma* $\epsilon-$*cadeia de* y^* *a* y^*, *para cada* $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$.



Exemplos de $\epsilon-$cadeias

Definição

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *um semigrupo com um número finito de soluções estacionárias* $\mathcal{E} = \{y_1^*, \cdots y_{\mathfrak{p}}^*\}$ *e suponha que ele tem um atrator global* $\mathcal{A}$.

Dizemos que $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *é um semigrupo dinamicamente gradiente se as seguintes condições são satisfeitas:*

(G1) *Dada uma solução global* $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *em* $\mathcal{A}$, *existem* $i, j \in \{1, \cdots, \mathfrak{p}\}$ *tais que*

$$\lim_{t\to-\infty} \|\xi(t) - y_i^*\| = 0 \text{ e } \lim_{t\to\infty} \|\xi(t) - y_j^*\| = 0.$$

(G2) $\mathcal{E} = \{y_1^*, \cdots, y_{\mathfrak{p}}^*\}$ *não contém ponto recorrente por cadeia.*

As hipóteses $(G1)$ e $(G2)$ carregam importantes propriedades dinâmicas de um semigrupo com uma função de Lyapunov (veja também os Lemas a seguir).

De $(G1)$, temos que $\mathcal{A} = \cup_{i=1}^{\mathfrak{p}} W^u(y_i^*)$ pois, se $x \in \mathcal{A}$, então existe uma solução global $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ em $\mathcal{A}$ e assim $x \in W^u(y_i^*)$, para algum $1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{p}$ e, reciprocamente, se $x \in W^u(y_i^*)$, para algum $1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{p}$, então, como $\mathcal{A}$ atrai pontos, existe uma órbita global limitada através de x, assim $x \in \mathcal{A}$.

Também, a hipótese $(G2)$ estabelece que um número finito de órbitas **não** pode produzir um contorno fechado.

Os quatro resultados a seguir são de fundamental importância para o desenvolvimento da teoria de atratores para semigrupos.

Lema

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *um semigrupo e* y^* *um ponto de equilíbrio para* $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$. *Dado* $\tau \in \mathbb{R}^+$ *e* $\epsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que* $\{T(t)y : 0 \leqslant t \leqslant \tau,\ y \in B_\delta(y^*)\} \subset B_\epsilon(y^*)$.

Prova: Suponha que existam $0 < \tau_0 \in \mathbb{R}^+$ e $\epsilon_0 > 0$ tais que, para todo $k \in \mathbb{N}^*$ existe $x_k \in B_{\frac{1}{k}}(y^*)$ e $t_k \in [0, \tau_0]$ com $\|T(t_k)x_k - y^*\| \geqslant \epsilon_0$.

Podemos assumir que $t_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} t_0$ para algum $t_0 \in [0, \tau_0]$. Como $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in \mathbb{R}^n$ é contínua, temos $0 = \|T(t_0)y^* - y^*\| \geqslant \epsilon_0$.

O que é um absurdo. Isto completa a prova do resultado. $\square$

O segundo deles é um resultado fundamental que será utilizado em diversas ocasiões para obter propriedades de semigrupos.

Proposição

Para semigrupo assintoticamente compacto $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$*, sejam* $\{\sigma_k\}$ *uma sequência em* $\mathbb{R}^+$ *com* $\sigma_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$*,* $\{u_k\}$ *uma sequência limitada em* $\mathbb{R}^n$ *e, para* $\mathbb{J}_k = \{s \in \mathbb{R} : -\sigma_k \leqslant s < \infty\}$*, defina* $\xi^k : \mathbb{J}_k \to \mathbb{R}^n$ *por* $\xi^k(s) = T(s+\sigma_k)u_k$*,* $s \in \mathbb{J}_k$*.*

Se $\{T(s)u_k : k \in \mathbb{N},\ s \in \mathbb{R}^+\}$ *é limitado, existe uma solução global* $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *de* $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *e uma subsequência de* $\{\xi^k\}$ *(que continuamos a denotar* $\{\xi^k\}$*) tal que*

$$\lim_{k\to\infty} \xi^k(s) \to y(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Lema

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *um semigrupo com um número finito de soluções estacionárias* $\mathcal{E} = \{y_1^*, \cdots y_{\mathfrak{p}}^*\}$ *e atrator global* $\mathcal{A}$*.*

Se $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *satisfaz* $(G1)$*, dado* $\delta < \delta_0 = \frac{1}{2} \min\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant \mathfrak{p}} \|y_i^* - y_j^*\|$ *e* $B \subset \mathbb{R}^n$ *limitado, existe um* $t_0 = t_0(\delta, B) > 0$ *tal que* $\{T(t)u_0 : 0 \leqslant t \leqslant t_0\} \cap \cup_{i=1}^{\mathfrak{p}} B_\delta(y_i^*) \neq \varnothing$ *para todo* $u_0 \in B$*.*

Prova: Provaremos o resultado por contradição. Suponha que existam sequências $\{u_k\}$ em B e $\{t_k\}$ em $\mathbb{R}^+$ (com $t_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$) tais que $\{T(s)u_k : 0 \leqslant s \leqslant 2t_k\} \cap \cup_{i=1}^{\mathfrak{p}} B_\delta(y_i^*) = \varnothing$.

Usando a Proposição 1, temos que existe uma solução global $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tal que $T(s+t_k)u_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \xi(s)$ para $s \in \mathbb{R}$.

Claramente $\xi(s) \in \mathcal{A}$, para todo $s \in \mathbb{R}$ e como para $-t_k \leqslant s \leqslant t_k$, $T(s+t_k)u_k \notin \cup_{i=1}^{\mathfrak{p}} B_\delta(y_i^*)$, $\xi(s) \notin \cup_{i=1}^{\mathfrak{p}} B_\delta(y_i^*)$ para todo $s \in \mathbb{R}$, o que contradiz $(G1)$.$\square$