

Teoria Qualitativa de EDO

Decima Nona Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

04 de Novembro de 2019

Aplicações da teoria de Poincaré-Bendixon

Consideremos a equação de Lienard

$$\ddot{u} + g(u)\dot{u} + u = 0$$

e as seguintes hipóteses: Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que

(a) $G(u) = \int_0^u g(s)ds$ é ímpar em u

(b) $G(u) \rightarrow \infty$, quando $u \rightarrow \infty$ e existe $\beta > 0$ tal que G é estritamente crescente para $u > \beta$ e $G(\beta) = 0$.

(c) Existe $\alpha > 0$ tal que $G(u) < 0$ se $0 < u < \alpha$ e $G(\alpha) = 0$.

Teorema

Nas condições acima, a equação de Lienard tem uma órbita periódica não constante.

Prova: Consideremos a sistema equivalente:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= v - G(u) \\ \dot{v} &= -u\end{aligned}\tag{1}$$

Como $G(0) = 0$, temos que o único ponto de equilíbrio é $(0, 0)$.

Note que

1. Se $(u(t), v(t))$ é solução de (1), $u(t)$ é estritamente crescente (decrecente) enquanto $v(t) > G(u(t))$ ($v(t) < G(u(t))$) e $v(t)$ é estritamente decrescente (crescente), enquanto $u(t) > 0$ ($u(t) < 0$).
2. O campo $(v - G(u), -u)$ é horizontal no eixo v vertical na curva $v = G(u)$.
3. Se $(u(t), v(t))$ for solução, $(-u(t), -v(t))$ também será.
4. $v - G(u) > u \Leftrightarrow v > G(u) + u$ e $G(u) - v > u \Leftrightarrow G(u) - u > v$.

Esboçar como é o campo vetorial $(v - G(u), -u)$.

Levando em consideração esses fatos, vemos que se v_0 for suficientemente grande, a órbita que passa por $A : (0, v_0)$ tem aproximadamente a forma indicada no desenho abaixo.

Mostramos a seguir que se v_0 for suficientemente grande então $v_1 < v_0$.

Seja $W(u, v) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$. Para uma solução $(u(t), v(t))$ temos:

$$\frac{d}{dt}W(u(t), v(t)) = u(v - G(u)) + v(-u) = -u(t)G(u(t)).$$

Da figura acima segue que

$$\int_{ABCD} dW = W(D) - W(A) = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2).$$

Por outro lado

$$\int_{ABCD} dW = \int_{AB} dW + \int_{CD} dW + \int_{BEC} dW.$$

Em \widehat{AB} consideramos a parametrização $u \rightarrow (u, v(u))$ e teremos

$$\begin{aligned}
 \int_{AB} dW &= \int_0^\beta W'(u) du = \int_0^\beta \left(u + v \frac{dv}{du} \right) du \\
 &= \int_0^\beta \left(u + v \frac{dv}{dt} \frac{dt}{du} \right) du \\
 &= \int_0^\beta \left[u + v(-u) \frac{1}{v - G(u)} \right] du \\
 &= \int_0^\beta \frac{-uG(u)}{v(u) - G(u)} du
 \end{aligned}$$

Tomamos $M \stackrel{\text{def}}{=} \max\{u + G(u) : 0 \leq u \leq \beta\}$ e
 $N \stackrel{\text{def}}{=} \max\{|uG(u)| : 0 \leq u \leq \beta\}$ e tomamos v_0 suficientemente grande de modo que $v(\beta) > M$. (Ver Figura.)
 No intervalo considerado temos:

$$\frac{dv}{du} = \frac{-u}{v - G(u)} > -1 \Rightarrow v(u) \geq v_0 - u.$$

Logo

$$\left| \int_0^\beta \frac{uG(u)}{v(u) - G(u)} du \right| \leq \int_0^\beta \frac{|uG(u)|}{v(u) - G(u)} du \leq \int_0^\beta \frac{uG(u)}{v_0 - (u + G(u))} du.$$

$$0 \leq \left| \int_0^\beta \frac{uG(u)}{v(u) - G(u)} du \right| \leq N \int_0^\beta \frac{du}{v_0 - M} \rightarrow 0 \text{ quando } v_0 \rightarrow \infty.$$

Temos assim que $\int_{AB} dW \xrightarrow{v_0 \rightarrow \infty} 0$. Prova-se também que

$\int_{CD} dW \xrightarrow{v_0 \rightarrow \infty} 0$, pois $v_0 \rightarrow \infty$ implica que $v_1 \rightarrow \infty$.

Analisemos agora $\int_{BEC} dW$. Neste caso consideremos a parametrização $u = u(v)$, $\bar{v} \leq v \leq \tilde{v}$

Temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dv}(W(u(v), v)) &= u \frac{du}{dv} + v = u \frac{du}{dt} \frac{dt}{dv} + v \\ &= u(v - G(u)) \left(\frac{-1}{u} \right) + v \\ &= G(u(v)).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 - \int_{BEC} dW &= \int_{CEB} dW = \int_{\tilde{v}}^{\tilde{v}} G(u(v)) dv \\
 &> \int_{\widehat{EK}} G(u(v)) dv \\
 &> \int_{\widehat{EK}} \overline{FJ} dv = \overline{FJ} \cdot \overline{EK} \\
 &> \overline{FJ} \cdot \overline{FK}.
 \end{aligned}$$

Mas $FK \rightarrow \infty$ quando $v_0 \rightarrow \infty$. Assim $\frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2) \rightarrow -\infty$ quando $v_0 \rightarrow \infty$ e daí para v_0 suficientemente grande teremos que $v_1 < v_0$.

Para $(u(0), v(0))$ tal que $0 < |u(0)| < \alpha$ temos que
 $\frac{d}{dt}W(u(t), v(t)) = -u(t)G(u(t)) > 0$ enquanto $u(t)$ for tal que
 $0 < |u(t)| < \alpha$.

Logo $(0, 0)$ é uma fonte, isto é, a origem é o conjunto α -limite de toda órbita que começa suficientemente próximo de $(0, 0)$.

A semiórbita que começa em A está contida na região limitada definida pela curva de Jordan formada pelo arco $ABCD$, sua reflexão e os segmentos que ligam esses arcos. Ela permanece assim no compacto definido pela Figura abaixo, onde não há nenhum ponto de equilíbrio. Do Teorema de Poincaré-Bendixon segue que existe uma órbita periódica não constante. \square