SMA 136 - Teoria Qualitativa de EDO
Décima Sétima Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

25 de Outubro de 2019

Teoria de Poincaré-Bendixon - Continuação

Teorema (Poincaré-Bendixon)

Se $\gamma^+(x_0)$ é limitada e $\omega(x_0)$ não contém pontos de equilíbrio, então $\omega(x_0)$ é uma órbita periódica.

Prova: Seja $p \in \omega(x_0)$ e Γ órbita por p, da invariância, $\Gamma \subset \omega(x_0)$.

Do Lema 5 (aula anterior) segue que $\Gamma = \omega(x_0)$ e é uma órbita periódica. $\square$

Teorema

Se $\gamma^+(x_0)$ é limitada e $\omega(x_0)$ contém apenas um número finito de pontos de equlíbrios.

(1) *Se $\omega(x_0)$ não contém pontos regulares, então existe ponto de equilíbrio p, tal que $\omega(x_0) = \{p\}$ e $x(t, x_0) \xrightarrow{t\to\infty} p$.*

(2) *Se $\omega(x_0)$ contém algum ponto regular, então $\omega(x_0)$ consiste de um conjunto finito de pontos de equilíbrio e um conjunto de órbitas que tendem aos pontos de equilíbrio quando $t \to \pm\infty$.*

Prova: (1) Como $\omega(x_0)$ só tem um número finito de pontos de equilíbrio e é conexo então tem que conter no máximo um ponto de equilíbrio. Seja $\omega(x_0) = \{p\}$ e $x(t, x_0) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} p$.

(2) Seja $q \in \omega(x_0)$, q regular e $\Gamma = \{y(t) : t \in \mathbb{R}\}$ a órbita por q. Temos que $\Gamma \subset \omega(x_0)$ pois $\omega(x_0)$ é invariante.

Note que, $\omega(\Gamma)$ não contém pontos regulares. Pois, neste caso, Lema 5 implicaria que $\Gamma = \omega(x_0)$ e Γ é periódica, contradizando a existência de pelo menos um ponto de equilíbrio em $\omega(x_0)$.

Logo $\omega(\Gamma)$ só tem pontos de equilíbrio e de sua conexão segue que só pode ter um ponto de equilíbrio, para o qual tende $y(t)$, quando $t \to \infty$, Análise semelhante pode ser feita quando $t \to -\infty$. $\square$

Consideremos a equação de Lienard

$$\ddot{u} + g(u)\dot{u} + u = 0$$

e as seguintes hipóteses: Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que
(a) $G(u) = \int_0^u g(s)ds$ é impar em u
(b) $G(u) \to \infty$, quando $u \to \infty$ e existe $\beta > 0$ tal que G é estritamente crescente para $u > \beta$ e $G(\beta) = 0$.
(c) Existe $\alpha > 0$ tal que $G(u) < 0$ se $0 < u < \alpha$ e $G(\alpha) = 0$.

Teorema

Nas condições acima, a equação de Lienard tem uma órbita periódica não constante.

Prova: Consideremos a sistema equivalente:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v - G(u) \\ \dot{v} &= -u \end{aligned} \tag{1}$$

Como $G(0) = 0$, temos que o único ponto de equilíbrio é $(0, 0)$.

Note que

1. Se $(u(t), v(t))$ é solução de (1), $u(t)$ é estritamente crescente (decrescente) enquanto $v(t) > G(u(t))$ $(v(t) < G(u(t)))$ e $v(t)$ é estritamente decrescente (crescente), enquanto $u(t) > 0$ $(u(t) > 0)$.
2. O campo $(v - G(u), -u)$ é horizontal no eixo v vertical na curva $v = G(u)$.
3. Se $(u(t), v(t))$ for solução, $(-u(t), -v(t))$ também será.
4. $v - G(u) > u \Leftrightarrow v > G(u) + u$ e $G(u) - v > u \Leftrightarrow G(u) - u > v$.

Esboçar como é o campo vetorial $(v - G(u), -u)$.

Levando em consideração esses fatos, vemos que se v_0 for suficientemente grande, a órbita que passa por $A : (0, v_0)$ tem aproximadamente a forma indicada no desenho abaixo. Mostramos a seguir que se v_0 for suficientemente grande então $v_1 < v_0$.

Seja $W(u,v)=\frac{1}{2}(u^2+v^2)$. Para uma solução $(u(t),v(t))$ temos:

$$\frac{d}{dt}W(u(t),v(t))=u(v-G(u))+v(-u)=-u(t)G(u(t)).$$

Da figura acima segue que

$$\int\limits_{ABCD} dW = W(D)-W(A)=\frac{1}{2}(v_1^2-v_0^2).$$

Por outro lado

$$\int\limits_{ABCD} dW=\int\limits_{AB} dW+\int\limits_{CD} dW+\int\limits_{BEC} dW.$$

Em $\widehat{AB}$ consideramos a parametrização $u\to(u,v(u))$ e teremos

$$\int\limits_{AB} dW = \int\limits_0^\beta W'(u)du=\int\limits_0^\beta(u+v\frac{dv}{du})du$$

$$\int^\beta(u+v\frac{dv}{dt}\frac{dt}{du})du$$

Tomamos $M \overset{\mathrm{def}}{=} \max\{u + G(u) : 0 \leqslant u \leqslant \beta\}$ e $N \overset{\mathrm{def}}{=} \max\{|uG(u)| : 0 \leqslant u \leqslant \beta\}$ e tomamos v_0 suficientemente grande de modo que $v(\beta) > M$. (Ver Figura.)
No intervalo considerado temos:

$$\frac{dv}{du} = \frac{-u}{v - G(u)} > -1 \Rightarrow \;\; v(u) \geqslant v_0 - u.$$

Logo

$$\Big|\int_0^\beta \frac{uG(u)}{v(u) - G(u)} du\Big| \leqslant \int_0^\beta \frac{|uG(u)|}{v(u) - G(u)} du \leqslant \int_0^\beta \frac{uG(u)}{v_0 - (u + G(u))} du.$$

$$0 \leqslant \left| \int_0^\beta \frac{uG(u)}{v(u) - G(u)} du \right| \leqslant N \int_0^\beta \frac{du}{v_0 - M} \to 0 \text{ quando } v_0 \to \infty.$$

Temos assim que $\int_{AB} dW \to 0$ quando $v_0 \to \infty$. Prova-se também que $\int_{CD} dW \to 0$ quando $v_0 \to \infty$, pois $v_0 \to \infty$ implica que $v_1 \to \infty$.
Analisemos agora $\int_{BEC} dW$. Neste caso consideremos a parametrização $u = u(v), \bar{v} \leqslant v \leqslant \tilde{v}$

Temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dv}(W(u(v),v) &= u\frac{du}{dv}+v = u\frac{du}{dt}\ \frac{dt}{dv}+v\\ &= u(v-G(u))(\frac{-1}{u})+v\\ &= G(u(v)).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} -\int_{BEC} dW &= \int_{CEB} dW = \int_{\bar{v}}^{\tilde{v}} G(u(v))dv \\ &> \int_{\widehat{EK}} G(u(v))dv \\ &> \int_{\widehat{EK}} \overline{FJ}dv = \overline{FJ}\cdot\overline{EK} \\ &> \overline{FJ}\cdot\overline{FK}. \end{aligned}$$

Mas $FK \to \infty$ quando $v_0 \to \infty$. Assim $\frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2) \to -\infty$ quando $v_0 \to \infty$ e daí para v_0 suficientemente grande teremos que $v_1 < v_0$.

Para $(u(0), v(0))$ tal que $0 < |u(0)| < \alpha$ temos que $\frac{d}{dt}W(u(t), v(t)) = -u(t)G(u(t)) > 0$ enquanto $u(t)$ for tal que $0 < |u(t)| < \alpha$.

Logo $(0, 0)$ é uma fonte, isto é, a origem é o conjunto α-limite de toda órbita que começa suficientemente próximo de $(0, 0)$.

A semiórbita que começa em A está contida na região limitada definida pela curva de Jordan formada pelo arco ABCD, sua reflexão e os segmentos que ligam esses arcos. Ela permanece assim no compacto definido pela Figura abaixo,
onde não há nenhum ponto de equilíbrio.
Do Teorema de Poincaré-Bendixon segue que existe uma órbita periódica não constante. $\square$