SMA 136 - Teoria Qualitativa de EDO
Décima Sétima Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

29 de Outubro de 2019

Teoria de Poincaré-Bendixon

Bibliografia:

- H. M. Rodrigues, Equações Diferenciais Ordinárias - Notas de Aula ICMC - USP (2019)
- Earl A. Coddington, Norman Levinson - Theory of ordinary differential equations - Krieger (1984)
- J. Sotomayor, Equações diferenciais ordinárias, Textos Universitários do IME - USP (2011)

Por toda esta seção vamos assumir que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seja função localmente Lipschitz contínua,

Definição (Segmento Transversal)

Um segmento fechado L tal que para todo $p \in L$, $f(p)$ é um vetor não nulo que, juntamente com a direção de L, geram o $\mathbb{R}^2$.

É claro que nenhum ponto de um segmento transversal é um ponto de equilíbrio e L não é tangente a nenhuma órbita de $\dot{x} = f(x)$ que o intercepta.

Lema (1) - (Segmentos transversais e suas propriedades)

Valem as seguintes afirmativas

(a) *Se* $p \in \mathbb{R}^2$ *é regular, então existe segmento transversal* L *(que pode ter qualquer direção, exceto a de* $f(p)$ *tal que* p *é interior a* L

(b) *Qualquer órbita que intercepte um segmento tranversal deve cortá-lo e todas tais órbitas devem fazê-lo no mesmo sentido.*

(c) *Seja* $p \in \mathbb{R}^2$ *interior a uma transversal* L*. Dado* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que* $x(t, q)$ *corta* L *num tempo* $t_1 \in (-\epsilon, \epsilon)$*,* $\forall\ q \in B_\delta(p)$*.*

(d) *Seja* $\gamma_{[a,b]} := \{x(t) : a \leqslant t \leqslant b\}$ *um arco de órbita e* L *um segmento transversal. Então* $\gamma_{[a,b]} \cap L$ *é vazio ou finito.*

Prova: (a) Seja u, v uma base orthonormal positiva tal que u que não tenha a direção de $f(p)$.

Como $f(p) \neq 0$, existe vizinhança de p onde f não se anula. Para os pontos q desta vizinhança que pertencem ao segmento definido por p e u, definimos

$$g(q) = \frac{\langle f(q), v \rangle}{\|f(q)\|} = \mathrm{sen}\theta, \quad h(q) = \frac{\langle f(q), u \rangle}{\|f(q)\|} = \cos\theta$$

onde $\theta \in (-\pi, \pi]$ é o ângulo entre $f(q)$ e u, medido a partir de u, positivo (negativo) se no sentido anti-horário (horário). Como $g(p) \neq 0$, temos que numa vizinhança de p, $g(q) \neq 0$.

Pode-se assim tomar um pequeno segmento L definido por p e u, contendo p no seu interior, que seja segmento transversal.

(b) Se g é a função definida no ítem (a), $g(q) \neq 0$, para todo $q \in L$. Se o segmento fosse cortado em sentidos opostos existiriam p e q tal que $g(p)g(q) < 0$ e do Teorema do Valor intermediario, segue que existiria r entre p e q tal que $g(r) = 0$ o que é uma contradição.

Fixe $p \in L$ e u, v uma base orthornormal positiva com u sendo a direção de L, se $q \in L$ a solução $x(t, q)$ de $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = q$, tem compondente na direção de v dada por $w(t, q) = \langle x(t, q) - p, v\rangle$ e

$$\dot{w}(t, q) = \langle f(x(t, q)), v\rangle \neq 0$$

para t suficientemente pequeno. Ou seja, $w(0, q) = 0$ e $w(t, q)$ é estritamente monótona o que implica que a solução toda solução que encontra L deve cortá-lo.

(c) Seja p um ponto interior a um segmento transversal L.

Para cada $q \in \mathbb{R}^2$ consideremos a solução $x(t,q) = \begin{pmatrix} x_1(t,q) \\ x_2(t,q) \end{pmatrix}$.

Como $x(0,p) - p = 0$, temos que $w(0,p) = \langle x(0,p) - p, v \rangle = 0$. Também $\frac{\partial w}{\partial t}(0,p) = \langle f(x(0,p)), v \rangle \neq 0$. Do Teorema da Função Implícita, existe uma função $t = t(q)$, definida para q em uma vizinhança de p, e que satisfaz: $t(0) = 0$, $\langle x(t(q),q) - p, v \rangle = 0$, onde $t(q)$ é C^1 em q.

Assim, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|q - p| < \delta$ então $|t(q)| < \epsilon$.

(d) Suponhamos que o arco de órbita intercepte L em um número infinito de pontos. Então existe infinitos $t_n \in [a, b]$ tal que $x(t_n) \in L$.

Da compacidade de $[a, b]$ segue que t_n tem uma subseqüência convergente, que ainda indicaremos por $t_n \to \bar{t}$, com $t_n \neq \bar{t}$, $\forall\ n$.

Assim,

$$0 = \frac{\langle x(t_n) - x(\bar{t}), v\rangle}{t_n - \bar{t}} \longrightarrow \langle \dot{x}(\bar{t}), v\rangle = \langle f(x(\bar{t})), v\rangle.$$

Mas $\langle f(x(\bar{t})), v\rangle \neq 0$, pois L é transversal, uma contradição. $\square$

Se $x(\cdot,x_0):[0,\infty)\to\mathbb{R}^2$ é a solução de $\dot{x}=f(x)$, $x(0)=x_0$, então

$\omega(x_0)=\omega(\gamma^+(x_0))=\{y:\ \text{existe } t_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty \text{ tal que } x(t_n,x_0)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y\}$.

Vimos que, se a órbita $\gamma^+(x_0)=x([0,\infty),x_0)$ de x_0 é limitada, então $\omega(x_0)$ é não vazio, compacto, conexo, invariante e atrai x_0.

Lema

Se $\gamma^+(x_0)$ é limitada, $\omega(x_0)$ contém um ponto regular p e L é um segmento transversal com p no seu interior, então existe uma seqüência $t_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ tal que $L\cap\gamma^+(x_0)=\{x(t_n,x_0)=:p_n, n\in\mathbb{N}\}$.

Além disso, uma das seguintes alternativas vale:

- *(a) $p_1=p_2$ e $p_n=p_1=p$, para todo $n\in\mathbb{N}$.*
- *(b) $p_1\neq p_2$ e então todos os p_n são distintos e (p_n) é uma seqüência estritamente monótona em L.*

Em ambos os casos $p_n\to p$ (escreveremos $x(\cdot)$ em lugar de $x(\cdot,x_0)$).

Prova: Como $p \in \omega(x_0)$, existe seqüência $\tau_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tal que $x(\tau_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} p$. Do Lema 1, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $q \in B_\delta(p)$ existe $\bar{t}$, com $|\bar{t}| < \epsilon$, de modo que $x(\bar{t}, q) \in L$.

Para $\epsilon = \frac{1}{m}$ tome o $\delta_m > 0$ associado. Escolha $n_m > n_{m-1}$ tal que $x(\tau_{n_m}) \in B_{\delta_m}(p)$ e s_m com $|s_m| < \frac{1}{m}$ tal que $x(s_m, x(\tau_{n_m})) \in L$.

Logo

$$\begin{aligned} |x(s_m, x(\tau_{n_m})) - p| &\leqslant |x(s_m + \tau_{n_m}) - x(\tau_{n_m})| + |x(\tau_{n_m}) - p| \\ &\leqslant \sup_{\xi \in [s_m + \tau_{n_m}, \tau_{n_m}]} |\dot{x}(\xi)||s_m| + |x(\tau_{n_m}) - p| \to 0. \end{aligned}$$

Daí $x(s_m + \tau_{n_m}) \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} p$ e $\{t \geqslant 0 : x(t) \in L\}$ é ilimitado.

Seja $t_1 := \inf\{t \geqslant 0 : x(t) \in L\}$. Como L é fechado temos que $x(t_1) \in L$. Seja $\tau > t_1$ tal que $x(\tau) \in L$.

Consideremos o arco de órbita $\{x(t) : t_1 \leqslant t \leqslant \tau\}$. Do Lema 1 (d), este arco intercepta L em um número finito de pontos.

Seja $t_2 := \inf\{t > t_1 : x(t) \in L\}$. Temos que $t_2 > t_1$ e $x(t_2) \in L$.

Se $x(t_2) \neq x(t_1)$ e $t_3 := \inf\{t > t_2 : x(t) \in L\}$, como antes, $t_3 > t_2$.

Mostremos que $x(t_3)$ não pode estar entre $x(t_1, x_0)$ e $x(t_2)$ em L.

Vamos aplicar o

Teorema (Jordan)

Se $J \subset \mathbb{R}^2$ é o traço de uma curva fechada simples, então $\mathbb{R}^2 \backslash J$ tem duas componentes conexas S_i (limitada) e S_e (ilimitada), ambas com fronteira J.

Consideremos a curva de Jordan composta dada pela justaposição de $y_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $y_1(s) = x(st_2 + (1-s)t_1)$ com $y_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $y_2(s) = sx(t_1) + (1-s)x(t_2)$.

Temos $\{x(t) : t \geqslant t_2\} \subset S_i$, pois não pode escapar pelo segmento $y_1([0,1])$, nem pelo arco da órbita. Logo $x(t_2)$ deve estar entre $x(t_1)$ e $x(t_3)$. Esse procedimento pode ser repetido sucessivamente.

Se considerarmos a relação induzida pela desigualdade $x(t_2) > x(t_1)$ então a seqüência $p_n = x(t_n)$ será arbitrariamente crescente.

Como $\{x(s_m + \tau_{n_m})\}$ é subseqüência de $\{p_n\}$ e $x(s_m + \tau_{n_m}) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} p$ e p_n é crescente, segue que $p_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} p$.

Se $x(t_2) = x(t_1)$, $x(t)$ é periódica e a primeira alternativa ocorre. $\square$

Lema (3)

Se $\gamma^+(x_0)$ *é limitada, então L transversal não pode interceptar* $\omega(x_0) = \omega(\gamma^+(x_0))$ *em mais do que um ponto.*

Prova: Seja $p \in L \cap \omega(x_0)$. Sem perda de generalidade podemos assumir que p é interior a L, ampliando um pouco L se necessário.

Do Lema 2 segue que $p_n \to p$. Se existe $q \in L \cap \omega(x_0)$ então $p_n \to q$ e daí $p = q$. $\square$

Lema (4)

Se $\gamma^+(x_0)$ *é limitada e* $\omega(x_0)$ *contém uma órbita periódica* Γ*, então* $\omega(x_0) = \Gamma$.

Prova: Seja $\gamma^+(x_0) = \{x(t) : t \geqslant 0\}$ e suponhamos que $\omega \backslash \Gamma \neq \emptyset$. Como $\omega(x_0)$ é conexo, $\omega \backslash \Gamma$ não pode ser fechado.

Assim existe $q \in \Gamma$ e seqüência $\{q_n\}$, $q_n \in \omega \backslash \Gamma$ tal que $q_n \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} q$.

Como $q \in \Gamma$ q é regular. Seja L um segmento transversal com q no seu interior (que existe pelo Lema 1 (a)).

Do Lema 1 (c), dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, $|t_0| < \epsilon$, tal que $q_{n_0} \in B_\delta(q)$ e $x(t_0, q_{n_0}) \in L$.

Da invariância de $\omega(x_0)$, $x(t_0, q_{n_0}) \in \omega$, pois $x(0, q_{n_0}) = q_{n_0} \in \omega(x_0)$.

Note que $x(t_0, q_{n_0})$ não pertence a Γ, caso contrário $\gamma(q_{n_0}) = \Gamma$ e $q_{n_0} \in \Gamma$, o que contraria a escoha de q_{n_0}.

Como q e $x(t_0, q_{n_0}) \in \omega(x_0) \cap L$ temos uma contradição com o resultado do Lema 3. $\square$

Lema (5)

Se $\gamma^+(x_0)$ é limitada e $\omega(x_0)$ contém uma órbita Γ tal que $\omega(\Gamma)$ que contém pontos regulares, então Γ é periódica e $\Gamma = \omega(x_0)$.

Prova: Temos que $\omega(\Gamma) \subset \omega(x_0)$ pois $\omega(x_0)$ é fechado.

Seja $q \in \omega(\Gamma)$ regular e L um segmento transversal com q no seu interior (Lema 1(a)).

O Lema 2 aplicado a Γ implica que $\Gamma \cap L = \{q\}$ ou $\Gamma \cap L$ tem um número infinitos pontos.

Esta última não ocorre pois $\omega(x_0) \cap L \supset \omega(\Gamma) \cap L$, conteria infinitos pontos e contradiria o resultado do Lema 3.

Assim $\Gamma \cap L = \{q\}$ e ainda do Lema 2 segue que Γ é periódica.

Como $\Gamma \subset \omega(x_0)$, do Lema 4 segue que $\Gamma = \omega(x_0)$. $\square$

Teorema (Poincaré-Bendixon)

Se $\gamma^+(x_0)$ é limitada e $\omega(x_0)$ não contém pontos de equilíbrio, então $\omega(x_0)$ é uma órbita periódica.

Prova: Seja $p \in \omega(x_0)$ e Γ órbita por p, da invariância, $\Gamma \subset \omega(x_0)$.

Do Lema 5 segue que $\Gamma = \omega(x_0)$ e é uma órbita periódica. $\square$

Teorema

Se $\gamma^+(x_0)$ *é limitada e* $\omega(x_0)$ *contém apenas um número finito de pontos de equlíbrios.*

(1) *Se* $\omega(x_0)$ *não contém pontos regulares, então existe ponto de equilíbrio* p*, tal que* $\omega(x_0) = \{p\}$ *e* $x(t, x_0) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} p$*.*

(2) *Se* $\omega(x_0)$ *contém algum ponto regular, então* $\omega(x_0)$ *consiste de um conjunto finito de pontos de equilíbrio e um conjunto de órbitas que tendem aos pontos de equilíbrio quando* $t \to \pm\infty$*.*

Prova: (1) Como $\omega(x_0)$ só tem um número finito de pontos de equilíbrio e é conexo então tem que conter no máximo um ponto de equilíbrio. Seja $\omega(x_0) = \{p\}$ e $x(t, x_0) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} p$.

(2) Seja $q \in \omega(x_0)$, q regular e $\Gamma = \{y(t) : t \in \mathbb{R}\}$ a órbita por q. Temos que $\Gamma \subset \omega(x_0)$ pois $\omega(x_0)$ é invariante.

Note que, $\omega(\Gamma)$ não contém pontos regulares. Pois, neste caso, Lema 5 implicaria que $\Gamma = \omega(x_0)$ e Γ é periódica, contradizando a existência de pelo menos um ponto de equilíbrio em $\omega(x_0)$.

Logo $\omega(\Gamma)$ só tem pontos de equilíbrio e de sua conexão segue que só pode ter um ponto de equilíbrio, para o qual tende $y(t)$, quando $t \to \infty$, Análise semelhante pode ser feita quando $t \to -\infty$. $\square$