SMA 136 - Teoria Qualitativa de EDO
Décima Quinta Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

08 de Outubro de 2019

A seguir vamos considerar os semigrupos gradientes.

Esta classe de semigrupos aparece naturalmente em diversas aplicações e suas características permitem descrever com bastante precisão a estrutura dos seus atratores.

A seguir vamos considerar os semigrupos gradientes.

Esta classe de semigrupos aparece naturalmente em diversas aplicações e suas características permitem descrever com bastante precisão a estrutura dos seus atratores.

Lembremos que $y^* \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio para o semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ se o conjunto $\{y^*\}$ é a órbita de uma solução global constante; isto é, $T(t)y^* = y^*$, para todo $t \geqslant 0$.

Denotaremos por $\mathcal{E}$ o conjunto dos pontos de equilíbrio para o semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$.

Definition (1)

Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é dito gradiente se tem uma função de Lyapunov; isto é, se existe uma função contínua $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

(*i*) $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto V(T(t)x)$ é decrescente para cada $x \in \mathbb{R}^n$;

(*ii*) Se x é tal que $V(T(t)x) = V(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$, então $x \in \mathcal{E}$.

Para semigrupos gradientes temos o seguinte resultado de caracterização:

Lemma (2)

Se $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *é um semigrupo gradiente, então* $\omega(x)$ *é um subconjunto de* $\mathcal{E}$ *para cada* $x \in \mathbb{R}^n$*. Se existe uma solução global* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *por* x *então* $\alpha_\phi(x)$ *é um subconjunto de* $\mathcal{E}$*.*

Para semigrupos gradientes temos o seguinte resultado de caracterização:

Lemma (2)

Se $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *é um semigrupo gradiente, então* $\omega(x)$ *é um subconjunto de* $\mathcal{E}$ *para cada* $x \in \mathbb{R}^n$*. Se existe uma solução global* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *por* x *então* $\alpha_\phi(x)$ *é um subconjunto de* $\mathcal{E}$*.*

Se $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *é gradiente, tem atrator global* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{E}$ *só tem pontos isolados, então* $\mathcal{E}$ *é finito e para cada* $x \in \mathbb{R}^n$, $\omega(x)$ *é um conjunto unitário. Neste caso, se* $x \in \mathcal{A}$ *e* $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ *é uma solução global por* x*, então* $\alpha_\phi(x)$ *é um conjunto unitário.*

Prova: Se $\omega(x) = \varnothing$ o resultado é trivial. Se $\omega(x) \neq \varnothing$ e $y \in \omega(x)$ temos que $V(T(t)x) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} c$ para algum $c \in \mathbb{R}$, pois é decrescente e possui uma subseqüência convergente. Logo $V(\omega(x)) = \{c\}$.

Prova: Se $\omega(x) = \varnothing$ o resultado é trivial. Se $\omega(x) \neq \varnothing$ e $y \in \omega(x)$ temos que $V(T(t)x) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} c$ para algum $c \in \mathbb{R}$, pois é decrescente e possui uma subseqüência convergente. Logo $V(\omega(x)) = \{c\}$.

Como $T(t)\omega(x) \subset \omega(x)$, $t \in \mathbb{R}^+$, temos que cada ponto $y \in \omega(x)$ é tal que $V(T(t)y) = V(y) = c$, $t \in \mathbb{R}^+$, e da propriedade (ii) na Definição 1 temos que $y \in \mathcal{E}$.

Prova: Se $\omega(x) = \varnothing$ o resultado é trivial. Se $\omega(x) \neq \varnothing$ e $y \in \omega(x)$ temos que $V(T(t)x) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} c$ para algum $c \in \mathbb{R}$, pois é decrescente e possui uma subseqüência convergente. Logo $V(\omega(x)) = \{c\}$.

Como $T(t)\omega(x) \subset \omega(x)$, $t \in \mathbb{R}^+$, temos que cada ponto $y \in \omega(x)$ é tal que $V(T(t)y) = V(y) = c$, $t \in \mathbb{R}^+$, e da propriedade (ii) na Definição 1 temos que $y \in \mathcal{E}$.

Suponha que existe uma solução global $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ por x. Se $\alpha_\phi(x) = \varnothing$ o resultado é trivial. Por outro lado, se $y \in \alpha_\phi(x)$, existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que $V(\phi(-t)) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} c$, pois é crescente e tem uma subseqüência convergente. Logo $V(\alpha_\phi(x)) = \{c\}$.

Prova: Se $\omega(x) = \varnothing$ o resultado é trivial. Se $\omega(x) \neq \varnothing$ e $y \in \omega(x)$ temos que $V(T(t)x) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} c$ para algum $c \in \mathbb{R}$, pois é decrescente e possui uma subseqüência convergente. Logo $V(\omega(x)) = \{c\}$.

Como $T(t)\omega(x) \subset \omega(x)$, $t \in \mathbb{R}^+$, temos que cada ponto $y \in \omega(x)$ é tal que $V(T(t)y) = V(y) = c$, $t \in \mathbb{R}^+$, e da propriedade (ii) na Definição 1 temos que $y \in \mathcal{E}$.

Suponha que existe uma solução global $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ por x. Se $\alpha_\phi(x) = \varnothing$ o resultado é trivial. Por outro lado, se $y \in \alpha_\phi(x)$, existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que $V(\phi(-t)) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} c$, pois é crescente e tem uma subseqüência convergente. Logo $V(\alpha_\phi(x)) = \{c\}$.

Como $T(t)\alpha_\phi(x) \subset \alpha_\phi(x)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $V(T(t)y) = V(y) = c$, para cada $y \in \alpha_\phi(x)$, $t \in \mathbb{R}^+$, e $y \in \mathcal{E}$.

Agora suponhamos que $\{T(t)\colon t\in\mathbb{R}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$.

Como $\mathcal{A}$ é compacto e $\mathcal{E}\subset\mathcal{A}$, segue que se todos os pontos de $\mathcal{E}$ são isolados, então $\mathcal{E}$ é finito.

Agora suponhamos que $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$.

Como $\mathcal{A}$ é compacto e $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$, segue que se todos os pontos de $\mathcal{E}$ são isolados, então $\mathcal{E}$ é finito.

Falta ainda mostrar que se o conjunto das soluções estacionárias é finito então $\omega(x)$ e $\alpha_\phi(x)$ são conjuntos unitários.

Isto segue imediatamente do fato que $\omega(x)$ e $\alpha_\phi(x)$ são conexos. $\square$

Theorem

Se $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *é um semigrupo gradiente, limitado e tal que conjunto* $\mathcal{E}$ *de equilíbrios limitado, então* $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *tem um atrator global* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E})$*, onde*

$$W^u(\mathcal{E}) := \{y \in \mathbb{R}^n : \textit{existe uma solução global } \phi(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \\ \textit{por } y\ (\phi(0) = y) \textit{ tal que } \phi(t) \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} \mathcal{E}\}$$

será chamado de conjunto instável de $\mathcal{E}$. *Se* $\mathcal{E} = \{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ *for finito, então* $\mathcal{A} = \cup_{i=1}^n W^u(e_i^*)$.

Finalmente, se existir um conjunto conexo e limitado B *que contenha* $\mathcal{A}$*, então* $\mathcal{A}$ *será conexo.*

Prova: Como $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é limitado, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $\omega(x)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai x.

Prova: Como $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é limitado, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $\omega(x)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai x.

Do fato de que $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é gradiente segue que $\omega(x) \subset \mathcal{E}$ e, como $\mathcal{E}$ é limitado, temos que $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é ponto dissipativo. Segue que, $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ tem um atrator global.

Prova: Como $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é limitado, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $\omega(x)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai x.

Do fato de que $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é gradiente segue que $\omega(x) \subset \mathcal{E}$ e, como $\mathcal{E}$ é limitado, temos que $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é ponto dissipativo. Segue que, $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ tem um atrator global.

Se $x \in \mathcal{A}$, existe solução global $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ por x. Como $\phi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$ é relativamente compacto, $\alpha_\phi(x) \neq \varnothing$. Do Lema 2, $\alpha_\phi(x) \subset \mathcal{E}$. Isto mostra que $\mathcal{A} \subset W^u(\mathcal{E})$.

Prova: Como $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é limitado, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $\omega(x)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai x.

Do fato de que $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é gradiente segue que $\omega(x) \subset \mathcal{E}$ e, como $\mathcal{E}$ é limitado, temos que $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é ponto dissipativo. Segue que, $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ tem um atrator global.

Se $x \in \mathcal{A}$, existe solução global $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ por x. Como $\phi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$ é relativamente compacto, $\alpha_\phi(x) \neq \varnothing$. Do Lema 2, $\alpha_\phi(x) \subset \mathcal{E}$. Isto mostra que $\mathcal{A} \subset W^u(\mathcal{E})$.

Se $x \in W^u(\mathcal{E})$, existe uma solução global $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ por x e $\phi(t) \overset{t \to \pm\infty}{\longrightarrow} \mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. Como $\phi(\mathbb{R})$ é invariante e limitado concluímos que $\phi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$ e consequentemente $x \in \mathcal{A}$. Isto mostra que $\mathcal{A} \supset W^u(\mathcal{E})$ e completa a prova de que $\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E})$.

Se $\mathcal{E} = \{e_1^*, \cdots e_n^*\}$, a igualdade $\mathcal{A} = \cup_{i=1}^n W^u(e_i^*)$ segue imediatamente do Lema 2 e, se $\mathcal{A}$ está contido em um subconjunto conexo e limitado de $\mathbb{R}^n$, um resultado anterior implica que $\mathcal{A}$ é conexo. $\square$

Se $\mathcal{E} = \{e_1^*, \cdots e_n^*\}$, a igualdade $\mathcal{A} = \cup_{i=1}^n W^u(e_i^*)$ segue imediatamente do Lema 2 e, se $\mathcal{A}$ está contido em um subconjunto conexo e limitado de $\mathbb{R}^n$, um resultado anterior implica que $\mathcal{A}$ é conexo. $\square$

O seguinte lema é uma conseqüência imediata da continuidade dos semigrupos e é importante para a demonstração dos resultados que se seguem, ele garante que, dado um ponto de equilíbrio y^* de um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ e y perto de y^*, a órbita finita $\gamma_{[0,t]}(y) = \{T(s)y : 0 \leqslant s \leqslant t\}$ permanece perto de y^* para valores grandes de t.

Lemma

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *um semigrupo e* y^* *um ponto de equilibrio para* $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$*. Dado* $t \in \mathbb{R}^+$ *e* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que* $\{T(s)y : 0 \leqslant s \leqslant t,\ y \in B_\delta(y^*)\} \subset B_\epsilon(y^*)$*.*

Lemma

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *um semigrupo e* y^* *um ponto de equilibrio para* $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$*. Dado* $t \in \mathbb{R}^+$ *e* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que* $\{T(s)y : 0 \leqslant s \leqslant t,\ y \in B_\delta(y^*)\} \subset B_\epsilon(y^*)$*.*

Prova: Suponha que existam $t_0 \in (0, \infty)$ e $\epsilon_0 > 0$ tais que, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, exista $x_k \in B_{\frac{1}{k}}(y^*)$ e $s_k \in [0, t_0]$ com $d(T(s_k)x_k, y^*) \geqslant \epsilon_0$.

Podemos supor que $s_k \xrightarrow{k\to\infty} s_0$, $s_0 \in [0, t_0]$. Da continuidade de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in \mathbb{R}^n$, obtemos $0 = d(T(s_0)y^*, y^*) \geqslant \epsilon_0$. $\square$

Lemma

Suponha que $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *seja gradiente, tenha um atrator global* $\mathcal{A}$ *e que* $\mathcal{E} = \{y_i^* : 1 \leqslant i \leqslant n\}$, *para algum* $n \in \mathbb{N}^*$. *Seja* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *a função de Lyapunov associada a* $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *e* $V(\mathcal{E}) = \{\mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_p\}$ *com* $\mathfrak{n}_i < \mathfrak{n}_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant p-1$.

Lemma

Suponha que $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *seja gradiente, tenha um atrator global* $\mathcal{A}$ *e que* $\mathcal{E} = \{y_i^* : 1 \leqslant i \leqslant n\}$, *para algum* $n \in \mathbb{N}^*$. *Seja* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *a função de Lyapunov associada a* $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *e* $V(\mathcal{E}) = \{\mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_p\}$ *com* $\mathfrak{n}_i < \mathfrak{n}_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant p-1$.

Se $1 \leqslant j \leqslant p-1$ *e* $\mathfrak{n}_j \leqslant r < \mathfrak{n}_{j+1}$, *então* $\mathbb{R}^n_r = \{z \in \mathbb{R}^n : V(z) \leqslant r\}$ *é positivamente invariante sob a ação de* $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *e* $\{T_r(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$, *a restrição de* $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *a* $\mathbb{R}^n_r$, *tem atrator global* $\mathcal{A}^{(j)}$ *dado por*

$$\mathcal{A}^{(j)} = \cup\{W^{\mathrm{u}}(y_\ell^*) : V(y_\ell^*) \leqslant \mathfrak{n}_j\}.$$

Lemma

Suponha que $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *seja gradiente, tenha um atrator global* $\mathcal{A}$ *e que* $\mathcal{E} = \{y_i^* : 1 \leqslant i \leqslant n\}$*, para algum* $n \in \mathbb{N}^*$*. Seja* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *a função de Lyapunov associada a* $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *e* $V(\mathcal{E}) = \{\mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_p\}$ *com* $\mathfrak{n}_i < \mathfrak{n}_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant p-1$.

Se $1 \leqslant j \leqslant p-1$ *e* $\mathfrak{n}_j \leqslant r < \mathfrak{n}_{j+1}$*, então* $\mathbb{R}^n_r = \{z \in \mathbb{R}^n : V(z) \leqslant r\}$ *é positivamente invariante sob a ação de* $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *e* $\{T_r(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$*, a restrição de* $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *a* $\mathbb{R}^n_r$*, tem atrator global* $\mathcal{A}^{(j)}$ *dado por*

$$\mathcal{A}^{(j)} = \cup\{W^{\mathrm{u}}(y_\ell^*) : V(y_\ell^*) \leqslant \mathfrak{n}_j\}.$$

Em particular, $V(z) \leqslant \mathfrak{n}_j$ *para* $z \in \mathcal{A}^{(j)}$, $\mathfrak{n}_1 = \min\{V(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$ *e* $\mathcal{A}^{(1)} = \{y^* \in \mathcal{E} : V(y^*) = \mathfrak{n}_1\}$ *consiste de pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis; isto é para cada* $y^* \in \mathcal{A}^{(1)}$ *existe uma vizinhança* $\mathcal{O}_{y^*}$ *de* $y*$ *tal que* $T(t)x \to y*$ *para cada* $x \in \mathcal{O}_{y^*}$.

Prova: É claro da definição da função de Lyapunov que $\mathbb{R}^n_r$ é positivamente invariante sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$.

Prova: É claro da definição da função de Lyapunov que $\mathbb{R}^n_r$ é positivamente invariante sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$.

Para provar a existência de um atrator para $\{T_r(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ notemos que as propriedades requeridas para obtermos um atrator global são herdadas de $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$; a saber, órbitas de subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^n_r$ são limitadas, $\{T_r(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é ponto dissipativo.

Prova: É claro da definição da função de Lyapunov que $\mathbb{R}^n_r$ é positivamente invariante sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$.

Para provar a existência de um atrator para $\{T_r(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ notemos que as propriedades requeridas para obtermos um atrator global são herdadas de $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$; a saber, órbitas de subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^n_r$ são limitadas, $\{T_r(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é ponto dissipativo.

Logo, $\{T_r(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}^{(j)}$. A restrição V_r de V a $\mathbb{R}^n_r$ é uma função de Lyapunov para $\{T_r(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ e a caracterização de $\mathcal{A}^{(j)}$ segue.

Seja $\delta_0 = \frac{1}{2}\min\{d(x^*, y^*),\ x^*, y^* \in \mathcal{A}_1,\ x^* \neq y^*\}$ e provemos a última afirmativa. Se existem um $\delta_0 > \delta > 0$ e seqüências $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ em $\mathbb{R}^n$ e $\{t_k : k \in \mathbb{N}\}$ em $\mathbb{R}^+$ tais que $x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x^*$ e $d(T(t_k)x_k, x^*) = \delta$ $(d(T(t)x_k, x^*) < \delta,\ 0 \leqslant t < t_k)$ concluímos que $\{T(t_k)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ tem uma subseqüência convergente.

Seja $\delta_0 = \frac{1}{2}\min\{d(x^*, y^*),\ x^*, y^* \in \mathcal{A}_1,\ x^* \neq y^*\}$ e provemos a última afirmativa. Se existem um $\delta_0 > \delta > 0$ e seqüências $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ em $\mathbb{R}^n$ e $\{t_k : k \in \mathbb{N}\}$ em $\mathbb{R}^+$ tais que $x_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x^*$ e $d(T(t_k)x_k, x^*) = \delta$ $(d(T(t)x_k, x^*) < \delta,\ 0 \leqslant t < t_k)$ concluímos que $\{T(t_k)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ tem uma subseqüência convergente.

Denote esta subseqüência convergente por $\{T(t_k)x_k : k \in \mathbb{N}\}$ e seja y seu limite.

É imediato do fato que $V(x_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathfrak{n}_1$ que $V(y) = V(T(t)y) = \mathfrak{n}_1$. Portanto $y \in \mathcal{A}_1$ e $\mathrm{dist}(y, x^*) = \delta$, o que é uma contradição.

Logo, para cada $x^* \in \mathcal{A}_1$ e $0 < \delta < \delta_0$ existe um $\delta > \delta' > 0$ tal que, para todo $x \in B_{\delta'}(x^*)$, $\gamma^*(x) \subset B_\delta(x^*)$ e prova que $\mathcal{A}_1$ consiste somente dos equilíbrios estáveis.

Logo, para cada $x^* \in \mathcal{A}_1$ e $0 < \delta < \delta_0$ existe um $\delta > \delta' > 0$ tal que, para todo $x \in B_{\delta'}(x^*)$, $\gamma^*(x) \subset B_\delta(x^*)$ e prova que $\mathcal{A}_1$ consiste somente dos equilíbrios estáveis.

Para concluir precisamos somente notar que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $T(t)x \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x^*$ para algum $x^* \in \mathcal{E}$. $\square$

Exercício

Mostre que se x^* é um mínimo local isolado de V, isto é, existe $\delta > 0$ tal que $V(x) > V(x^*)$ sempre que $0 \neq \|x - x^*\| < \delta$, então x^* é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.