SMA 136 - Teoria Qualitativa de EDO
Décima Quarta Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

04 de Outubro de 2019

Invariantes e atratores - continuação

Observação

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *um semigrupo em* $\mathbb{R}^n$ *que tem um atrator global* $\mathcal{A}$*. Afirmamos que, dado* $x \in \mathcal{A}$*, existe uma solução global limitada* $\phi_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *tal que* $\phi_x(0) = x$*.*

Invariantes e atratores - continuação

Observação

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *um semigrupo em* $\mathbb{R}^n$ *que tem um atrator global* $\mathcal{A}$. *Afirmamos que, dado* $x \in \mathcal{A}$, *existe uma solução global limitada* $\phi_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *tal que* $\phi_x(0) = x$.

De fato, $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto \phi(t) := T(t)x \in \mathbb{R}^n$ *está sempre bem definida e é limitada, agora seja* $x \in \mathcal{A} = T(1)\mathcal{A}$, *assim existe* $x_{-1} \in \mathcal{A}$ *tal que* $T(1)x_{-1} = x$ *e procedendo indutivamente, conseguimos uma seqüência* $\{x_{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ *tal que* $x_0 = x$ *e* $T(1)x_{-n-1} = x_{-n}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, (*note que a seqüência* $\{x_{-n}\}$ *não precisa ser unicamente determinada*).

Defina então

$$\phi_x(t) = \begin{cases} T(t)x, \;\; t \geqslant 0 \\ T(j+t)x_{-j}, \;\; t \in [-j, -j+1) \cap \mathbb{R}, \;\; j = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

que é uma solução global limitada em $\mathcal{A}$ *passando por* x *em* $t = 0$.

Defina então

$$\phi_x(t) = \begin{cases} T(t)x, \;\; t \geqslant 0 \\ T(j+t)x_{-j}, \;\; t \in [-j, -j+1) \cap \mathbb{R}, \;\; j = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

que é uma solução global limitada em $\mathcal{A}$ passando por x em $t = 0$.

Reciprocamente, cada solução global limitada $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ para $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é tal que $\phi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$. Concluímos que

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{ existe uma solução global limitada por } x\} \qquad (1)$$

Lemma (1)

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *um semigrupo em* $\mathbb{R}^n$*. Se* $B \subset \mathbb{R}^n$*, então* $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}^+$*. Se* B *é tal que* $\omega(B)$ *é compacto e atrai* B*, então* $\omega(B)$ *é invariante.*

Lemma (1)

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *um semigrupo em* $\mathbb{R}^n$*. Se* $B \subset \mathbb{R}^n$*, então* $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}^+$*. Se* B *é tal que* $\omega(B)$ *é compacto e atrai* B*, então* $\omega(B)$ *é invariante.*

Prova: Se $\omega(B) = \varnothing$, não há o que provar. Se $\omega(B) \neq \varnothing$, fixe $t \in \mathbb{R}^+$, da caracterização de $\omega(B)$, se $y \in \omega(B)$, existem seqüências $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tais que $y = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$. Segue da continuidade de $T(t)$ que $T(t)y = \lim_{n\to\infty} T(t+t_n)x_n$ e que $T(t)y \in \omega(B)$. Logo $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$.

Resta mostrar que, se $\omega(B)$ é compacto e atrai B, então $\omega(B) \subset T(t)\omega(B)$ para cada $t \in \mathbb{R}^+$. Para $x \in \omega(B)$, existem seqüências $t_n \to \infty$ e $x_n \in B$ tais que $T(t_n)x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Resta mostrar que, se $\omega(B)$ é compacto e atrai B, então $\omega(B) \subset T(t)\omega(B)$ para cada $t \in \mathbb{R}^+$. Para $x \in \omega(B)$, existem seqüências $t_n \to \infty$ e $x_n \in B$ tais que $T(t_n)x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Para $t \in \mathbb{R}^+$ fixo, uma vez que $t_n \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n > t$ para todo $n \geqslant n_0$. Portanto $T(t)T(t_n - t)x_n = T(t_n)x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Resta mostrar que, se $\omega(B)$ é compacto e atrai B, então $\omega(B) \subset T(t)\omega(B)$ para cada $t \in \mathbb{R}^+$. Para $x \in \omega(B)$, existem seqüências $t_n \to \infty$ e $x_n \in B$ tais que $T(t_n)x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Para $t \in \mathbb{R}^+$ fixo, uma vez que $t_n \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n > t$ para todo $n \geqslant n_0$. Portanto $T(t)T(t_n - t)x_n = T(t_n)x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Como $\omega(B)$ é compacto e atrai B, $\mathrm{dist}(T(t_n - t)x_n, \omega(B)) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Resta mostrar que, se $\omega(B)$ é compacto e atrai B, então $\omega(B) \subset T(t)\omega(B)$ para cada $t \in \mathbb{R}^+$. Para $x \in \omega(B)$, existem seqüências $t_n \to \infty$ e $x_n \in B$ tais que $T(t_n)x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Para $t \in \mathbb{R}^+$ fixo, uma vez que $t_n \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n > t$ para todo $n \geqslant n_0$. Portanto $T(t)T(t_n - t)x_n = T(t_n)x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Como $\omega(B)$ é compacto e atrai B, $\mathrm{dist}(T(t_n - t)x_n, \omega(B)) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Logo, $\{T(t_n - t)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subseqüência convergente (que ainda denotaremos por $\{T(t_n - t)x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$). Se $T(t_n - t)x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} y$, temos que $y \in \omega(B)$ e que $T(t)y = x$. Portanto, $\omega(B) = T(t)\omega(B)$. $\square$

Lemma

Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e suponha que exista uma solução global $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ por x tal que $\overline{\phi(\mathbb{R}^-)}$ seja compacto. Então, $\alpha_\phi(x)$ será não-vazio, compacto e invariante.

Lemma

Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e suponha que exista uma solução global $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ por x tal que $\overline{\phi(\mathbb{R}^-)}$ seja compacto. Então, $\alpha_\phi(x)$ será não-vazio, compacto e invariante.

Prova: Da definição de $\alpha_\phi(x)$, da compacidade de $\overline{\phi(\mathbb{R}^-)}$ e da propriedade da interseção finita segue que $\alpha_\phi(x)$ é não-vazio e compacto. Mostremos que $\alpha_\phi(x)$ é invariante.

Lemma

Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e suponha que exista uma solução global $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ por x tal que $\overline{\phi(\mathbb{R}^-)}$ seja compacto. Então, $\alpha_\phi(x)$ será não-vazio, compacto e invariante.

Prova: Da definição de $\alpha_\phi(x)$, da compacidade de $\overline{\phi(\mathbb{R}^-)}$ e da propriedade da interseção finita segue que $\alpha_\phi(x)$ é não-vazio e compacto. Mostremos que $\alpha_\phi(x)$ é invariante.

Fixe $t \in \mathbb{R}^+$. Da caracterização de $\alpha_\phi(x)$, se $y \in \alpha_\phi(x)$, existe uma seqüência $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tal que $\phi(-t_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} y$. Da continuidade de $T(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ temos que $T(t)\phi(-t_n) = \phi(t - t_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} T(t)y$ e que $T(t)y \in \alpha_\phi(x)$.

Lemma

Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e suponha que exista uma solução global $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ por x tal que $\overline{\phi(\mathbb{R}^-)}$ seja compacto. Então, $\alpha_\phi(x)$ será não-vazio, compacto e invariante.

Prova: Da definição de $\alpha_\phi(x)$, da compacidade de $\overline{\phi(\mathbb{R}^-)}$ e da propriedade da interseção finita segue que $\alpha_\phi(x)$ é não-vazio e compacto. Mostremos que $\alpha_\phi(x)$ é invariante.

Fixe $t \in \mathbb{R}^+$. Da caracterização de $\alpha_\phi(x)$, se $y \in \alpha_\phi(x)$, existe uma seqüência $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tal que $\phi(-t_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$. Da continuidade de $T(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ temos que $T(t)\phi(-t_n) = \phi(t - t_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T(t)y$ e que $T(t)y \in \alpha_\phi(x)$.

Por outro lado, se $w \in \alpha_\phi(x)$, existe $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tal que $\phi(-t_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} w$. Como $\{\phi(-t_n - t) : n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto, passando para uma subseqüência, existe $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $\phi(-t_n - t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$ e $z \in \alpha_\phi(x)$. Segue da continuidade de $T(t)$ que $T(t)z = w$. $\square$

Observação

Segue da primeira parte do Lema 1 que, se $x \in \mathbb{R}^n$, $\omega(x)$ *atrai* x *e* $\omega(x) = \{x^*\}$, *então* x^* *é um equilíbrio. Um resultado similar vale para* $\alpha_\phi(x)$.

Observação

Segue da primeira parte do Lema 1 que, se $x \in \mathbb{R}^n$, $\omega(x)$ atrai x e $\omega(x) = \{x^*\}$, então x^* é um equilíbrio. Um resultado similar vale para $\alpha_\phi(x)$.

Lemma

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ um semigrupo em $\mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\omega(B)$ é compacto e atrai B. Se B é conexo, então $\omega(B)$ é conexo.

Observação

Segue da primeira parte do Lema 1 que, se $x \in \mathbb{R}^n$, $\omega(x)$ atrai x e $\omega(x) = \{x^*\}$, então x^* é um equilíbrio. Um resultado similar vale para $\alpha_\phi(x)$.

Lemma

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ um semigrupo em $\mathbb{R}^n$ e $B \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\omega(B)$ é compacto e atrai B. Se B é conexo, então $\omega(B)$ é conexo.

Prova: A prova segue do fato que $\omega(B) = \cap_{t \geqslant 0} \overline{\gamma_t^+(B)}$ atrai B e $\overline{\gamma_t^+(B)}$ é conexo para cada $t \geqslant 0$ ($[0,\infty) \times \mathbb{R}^n \ni (s,x) \mapsto T(s)x \in \mathbb{R}^n$ é contínua e leva o conexo $[t,\infty) \times B$ sobre o conexo $\gamma_t^+(B)$).$\square$

Lemma

Se B é um subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}^n$ tal que $\gamma^+(B)$ é limitada, então $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e $\omega(B)$ atrai B.

Lemma

Se B é um subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}^n$ tal que $\gamma^+(B)$ é limitada, então $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e $\omega(B)$ atrai B.

Prova: Para cada $t \in \mathbb{R}^+$, $t \geqslant t_0$, $\overline{\gamma_t^+(B)}$ é não-vazio e compacto. Segue do fato que a família $\{\overline{\gamma_t^+(B)} : t \geqslant t_0\}$ tem propriedade da interseção finita que $\omega(B) = \bigcap_{t \geqslant t_0} \overline{\gamma_t^+(B)}$ é não-vazio e compacto.

Mostremos agora que $\omega(B)$ atrai B. Suponha que não, então existem $\epsilon_0 > 0$ e seqüências $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ em B, $\{t_n : n \in \mathbb{R}^+\}$ em $\mathbb{R}^+$ com $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, tais que $d(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \epsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Mostremos agora que $\omega(B)$ atrai B. Suponha que não, então existem $\epsilon_0 > 0$ e seqüências $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ em B, $\{t_n : n \in \mathbb{R}^+\}$ em $\mathbb{R}^+$ com $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, tais que $d(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \epsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ é compacto e $\{T(t_n)x_n, n \geqslant n_1\} \subset \overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ para algum $n_1 \in \mathbb{N}$, existem subseqüências $t_{n_j} \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $x_{n_j} \in B$ tais que $T(t_{n_j})x_{n_j}$ é convergente para algum $y \in \mathbb{R}^n$.

Mostremos agora que $\omega(B)$ atrai B. Suponha que não, então existem $\epsilon_0 > 0$ e seqüências $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ em B, $\{t_n : n \in \mathbb{R}^+\}$ em $\mathbb{R}^+$ com $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, tais que $d(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \epsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $\overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ é compacto e $\{T(t_n)x_n, n \geqslant n_1\} \subset \overline{\gamma_{t_0}^+(B)}$ para algum $n_1 \in \mathbb{N}$, existem subseqüências $t_{n_j} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $x_{n_j} \in B$ tais que $T(t_{n_j})x_{n_j}$ é convergente para algum $y \in \mathbb{R}^n$.

Disto segue que $y \in \omega(B)$ e $d(y, \omega(B)) \geqslant \epsilon_0$ o que nos leva a um absurdo. Logo $\omega(B)$ atrai B.

Mostremos agora que $\omega(B)$ atrai B. Suponha que não, então existem $\epsilon_0 > 0$ e seqüências $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ em B, $\{t_n : n \in \mathbb{R}^+\}$ em $\mathbb{R}^+$ com $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, tais que $d(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \epsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $\overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$ é compacto e $\{T(t_n)x_n, n \geqslant n_1\} \subset \overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$ para algum $n_1 \in \mathbb{N}$, existem subseqüências $t_{n_j} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $x_{n_j} \in B$ tais que $T(t_{n_j})x_{n_j}$ é convergente para algum $y \in \mathbb{R}^n$.

Disto segue que $y \in \omega(B)$ e $d(y, \omega(B)) \geqslant \epsilon_0$ o que nos leva a um absurdo. Logo $\omega(B)$ atrai B.

Segue agora do Lema (1) que $\omega(B)$ é invariante e a prova está completa.$\square$

Definição

Diremos que um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *é ponto dissipativo (limitado dissipativo) se existir um subconjunto limitado* $B \subset \mathbb{R}^n$ *que atrai pontos (subconjuntos limitados) de* $\mathbb{R}^n$.

Definição

Diremos que um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *é ponto dissipativo (limitado dissipativo) se existir um subconjunto limitado* $B \subset \mathbb{R}^n$ *que atrai pontos (subconjuntos limitados) de* $\mathbb{R}^n$.

Observação

Na definição acima podemos trocar a palavra atrai pela palavra absorve sem mudar os significados dos conceitos.

Definição

Diremos que um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é ponto dissipativo (limitado dissipativo) se existir um subconjunto limitado $B \subset \mathbb{R}^n$ que atrai pontos (subconjuntos limitados) de $\mathbb{R}^n$.

Observação

Na definição acima podemos trocar a palavra atrai pela palavra absorve sem mudar os significados dos conceitos.

Lemma (5)

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ um semigrupo limitado e ponto dissipativo. Então $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é limitado dissipativo.

Prova: Como $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é ponto dissipativo, existe um conjunto não-vazio e limitado B que absorve pontos de $\mathbb{R}^n$.

Prova: Como $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é ponto dissipativo, existe um conjunto não-vazio e limitado B que absorve pontos de $\mathbb{R}^n$.

Seja $U = \{x \in B : \gamma^+(x) \subset B\}$. Como B absorve pontos, $U \neq \varnothing$. Claramente $\gamma^+(U) = U$, U é limitado e absorve pontos.

Prova: Como $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é ponto dissipativo, existe um conjunto não-vazio e limitado B que absorve pontos de $\mathbb{R}^n$.

Seja $U = \{x \in B : \gamma^+(x) \subset B\}$. Como B absorve pontos, $U \neq \varnothing$. Claramente $\gamma^+(U) = U$, U é limitado e absorve pontos.

Sabemos também que $T(t)(\overline{\gamma^+(U)}) \subset \overline{\gamma^+(U)}$, $t \geqslant 0$. Portanto $\overline{\gamma^+(U)} = \overline{U}$ é compacto e atrai pontos de $\mathbb{R}^n$.

Prova: Como $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é ponto dissipativo, existe um conjunto não-vazio e limitado B que absorve pontos de $\mathbb{R}^n$.

Seja $U = \{x \in B : \gamma^+(x) \subset B\}$. Como B absorve pontos, $U \neq \varnothing$. Claramente $\gamma^+(U) = U$, U é limitado e absorve pontos.

Sabemos também que $T(t)(\overline{\gamma^+(U)}) \subset \overline{\gamma^+(U)}$, $t \geqslant 0$. Portanto $\overline{\gamma^+(U)} = \overline{U}$ é compacto e atrai pontos de $\mathbb{R}^n$.

Seja V uma vizinhança limitada de $\bar{U}$, então $\gamma^+(V)$ limitado. Como U atrai pontos de $\mathbb{R}^n$ e $T(t)$ é contínua, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ existe vizinhança $\mathcal{O}_x$ de x e $t_x > 0$ tal que $T(t)(\mathcal{O}_x) \subset \gamma^+(V)$ para $t \geqslant t_x$, isto é, $\gamma^+(V)$ absorve uma vizinhança de x para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

Prova: Como $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é ponto dissipativo, existe um conjunto não-vazio e limitado B que absorve pontos de $\mathbb{R}^n$.

Seja $U = \{x \in B : \gamma^+(x) \subset B\}$. Como B absorve pontos, $U \neq \varnothing$. Claramente $\gamma^+(U) = U$, U é limitado e absorve pontos.

Sabemos também que $T(t)(\overline{\gamma^+(U)}) \subset \overline{\gamma^+(U)}$, $t \geqslant 0$. Portanto $\overline{\gamma^+(U)} = \overline{U}$ é compacto e atrai pontos de $\mathbb{R}^n$.

Seja V uma vizinhança limitada de $\bar{U}$, então $\gamma^+(V)$ limitado. Como U atrai pontos de $\mathbb{R}^n$ e $T(t)$ é contínua, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ existe vizinhança $\mathcal{O}_x$ de x e $t_x > 0$ tal que $T(t)(\mathcal{O}_x) \subset \gamma^+(V)$ para $t \geqslant t_x$, isto é, $\gamma^+(V)$ absorve uma vizinhança de x para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

Disto segue facilmente que $\gamma^+(V)$ absorve subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^n$ e que $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é limitado dissipativo. $\square$

O seguinte teorema caracteriza os semigrupos que têm atratores globais.

Theorem

Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *é limitado e ponto dissipativo se, e somente se,* $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ *tem um atrator global* $\mathcal{A}$*.*

O seguinte teorema caracteriza os semigrupos que têm atratores globais.

Theorem

Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é limitado e ponto dissipativo se, e somente se, $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$.

Prova: Como $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é ponto dissipativo e limitado, do Lema 5, $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é limitado dissipativo. Seja C um conjunto limitado e positivamente invariante que absorve limitados de $\mathbb{R}^n$.

O seguinte teorema caracteriza os semigrupos que têm atratores globais.

Theorem

Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é limitado e ponto dissipativo se, e somente se, $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$.

Prova: Como $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é ponto dissipativo e limitado, do Lema 5, $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é limitado dissipativo. Seja C um conjunto limitado e positivamente invariante que absorve limitados de $\mathbb{R}^n$.

O conjunto $\mathcal{A} = \omega(C)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai C e portanto limitados de $\mathbb{R}^n$.

O seguinte teorema caracteriza os semigrupos que têm atratores globais.

Theorem

Um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é limitado e ponto dissipativo se, e somente se, $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$.

Prova: Como $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é ponto dissipativo e limitado, do Lema 5, $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é limitado dissipativo. Seja C um conjunto limitado e positivamente invariante que absorve limitados de $\mathbb{R}^n$.

O conjunto $\mathcal{A} = \omega(C)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai C e portanto limitados de $\mathbb{R}^n$.

Claramente, se $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ tem um atrator global, ele é eventualmente limitado e ponto dissipativo. $\square$