SMA 136 - Teoria Qualitativa de EDO
Décima Terceira Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

01 de Outubro de 2019

Invariantes e atratores para problemas autônomos

Para explicar o que é um sistema dinâmico autônomo ou um semigrupo imaginemos que queiramos prever o valor variável $x \in \mathbb{R}^n$ em instantes futuros.

Um sistema dinâmico autônomo é uma família de operadores $\{T(t) : t \geqslant 0\}$, de $\mathbb{R}^n$ nele mesmo, de forma que, dado que o valor da variável no instante 0 é x, $T(t)x$ é o valor da variável num instante posterior t.

O conhecimento do sistema dinâmico nos permite saber (no futuro) os valores da variável que conhecemos no instante presente para cada possível valor da variável $x \in \mathbb{R}^n$.

Esta família deve obedecer certas condições de compatibilidade. Estas condições são dadas na definição a seguir.

Definição (1)

Um sistema dinâmico autônomo em $\mathbb{R}^n$ *é uma família* $\{T(t): t \geqslant 0\}$ *em* $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ *tal que*

i) $T(0)x = x$, *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$,

ii) $T(t) \circ T(s) = T(t+s)$ *para todo* $t, s \in \mathbb{R}^+$,

iii) $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in \mathbb{R}^n$ *é contínua.*

Uma família $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ com estas propriedades também é chamada de semigrupo.

Os sistemas dinâmicos aparecem frequentemente associados a equações diferenciais. Para exemplificar, consideremos uma classe de exemplos que surgem nas equações diferenciais ordinárias

Example

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{1}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função continuamente diferenciável.

Nestas condições, vimos que o seguinte resultado vale

Theorem (2)

Para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe $\tau > 0$ e função continuamente diferenciável $[0,\tau) \ni t \mapsto \xi(t) \in \mathbb{R}^n$ tal que $\xi(0) = x_0$ e $\dot{\xi}(t) = f(\xi(t))$ para todo $t \in (0,\tau)$. Esta função é dita uma solução de (1) e é tal que

- *Se existe $\sigma > 0$ e função continuamente diferenciavel $\eta : [0,\sigma) \to \mathbb{R}^n$ tal que $\eta(0) = x_0$ e $\dot{\eta}(t) = f(t,\eta(t))$ para todo $t \in (0,\sigma)$ então $\xi(t) = \eta(t)$ para todo $t \in [0, \min\{\sigma,\tau\})$*
- *Existe $\tau(x_0) > 0$ e uma solução $[0,\tau_{x_0}) \ni t \mapsto x(t,x_0) \in \mathbb{R}^n$ de (1) tal que ou $\tau(x_0) = \infty$ ou $\overline{\lim}_{t \to \tau(x_0)} \|x(t,x_0)\| = \infty$.*
- *Se $E = \{(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n : t < \tau(x)\}$, a função $(t,x_0) \mapsto x(t,x_0)$ de E em $\mathbb{R}^n$ é contínua.*

Denotaremos por $x(\cdot, x_0) : [0, \tau(x_0)) \to \mathbb{R}^n$ a única solução de (1).

Suponha que existe uma constante $M > 0$ tal que

$$f(x) \cdot x < 0, \text{ sempre que } \|x\| \geqslant M. \tag{2}$$

Então,

$$\frac{d}{dt}\|x(t, x_0)\|^2 = 2f(x(t, x_0)) \cdot x(t, x_0).$$

Segue de (2) que e do Teorema 2 que $\tau(x_0) = \infty$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Defina $T(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $t \geqslant 0$, por

$$T(t)x_0 = x(t, x_0), \ x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

É claro que, em vista do Teorema 2, a única condição que resta verificar para concluir que $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ é um sistema dinâmico é a condição *ii*) da Definição 1.

Isto segue da unicidade de soluções para (1), dada no Teorema 2, observando-se que $x(t, x(s, x_0))$ e $x(t+s, x_0)$ são ambas soluções de

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x) \\ &x(0) = x(s, x_0) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Agora que já entendemos o que é um sistema dinâmico vamos procurar definir o que buscaremos compreender do mesmo.

Vamos estudar aqueles sistemas dinâmicos que são dissipativos (no exemplo dado as soluções eventualmente entram na bola de raio M).

Um conjunto no qual *t*odas as soluções entram (uniformemente em limitados de $\mathbb{R}^n$) depois de um certo tempo é chamado absorvente.

Queremos que os sistemas dinâmicos que consideraremos possuam absorventes limitados.

Também queremos que a interseção de todos os conjuntos absorventes seja um compacto que chamaremos *atrator*.

O atrator será um conjunto assintótico de estados e os estados que estão fora do atrator são estados chamados transitórios.

Buscaremos condições para existência de atratores, procuraremos entender como é o sistema dinâmico dentro do atrator, como os conjuntos limitados são atraídos para o atrator e como o atrator se comporta sob perturbação.

No estudo qualitativo das equações diferenciais, os atratores têm um papel central. A seguir, apresentaremos os conceitos e os resultados básicos necessários para o estudo do attrator global.

Escreveremos $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geqslant 0\}$, $\mathbb{R}^- = \{t \in \mathbb{R} : t \leqslant 0\}$, $\mathbb{R}_t^- = t + \mathbb{R}^-$ e $\mathbb{R}_t^+ = t + \mathbb{R}^+$.

Dados $K \subset \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, a $r-$vizinhança de K é o conjunto definido por $\mathcal{O}_r(K) := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, K) < r\}$.

Definição

Um semigrupo é uma família $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ *tal que*

- $T(0)x = x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$,
- $T(t+s) = T(t) \circ T(s)$,
- $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in \mathbb{R}^n$ *é contínua.*

Dado semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ e $B \subset \mathbb{R}^n$, definimos:

- Para cada $t \in \mathbb{R}$, a *imagem* de B sob $T(t)$,

$$T(t)B := \{T(t)x : x \in B\};$$

- A *órbita positiva* de B,

$$\gamma^+(B) := \bigcup_{t \in \mathbb{R}^+} T(t)B;$$

- A *órbita* de $T(t)B$,

$$\gamma_t^+(B) := \bigcup_{s \in \mathbb{R}^+} T(s+t)B = \bigcup_{s \in \mathbb{R}_t^+} T(s)B.$$

- A função $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto T(t)x \in \mathbb{R}^n$ é a *solução* por x do semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$.

Definição

Um semigrupo $\{T(t): t \in \mathbb{R}^+\}$ é dito limitado se para cada limitado $B \subset \mathbb{R}^n$ $\gamma^+(B)$ é limitado.

O conjunto onde a órbita de B se acumula é chamado conjunto $\omega-$limite e desempenha um papel fundamental no estudo do comportamento assintótico de um semigrupo.

Definição

O conjunto ω-limite de um subconjunto B de $\mathbb{R}^n$ é definido por

$$\omega(B) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}^+} \overline{\gamma_t^+(B)}.$$

Definição

Uma solução global de $\{T(t) : t \geq 0\}$ por $x \in \mathbb{R}^n$ é uma função contínua $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tal que $\phi(0) = x$ e $T(t)(\phi(s)) = \phi(t+s)$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$ com $t \geq 0$.

Uma solução global constante será chamada de solução estacionária e o seu valor um ponto de equilíbrio.

Quando existir uma solução global $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ por $x \in \mathbb{R}^n$, a órbita global de x relativa a ϕ é definida por $\gamma_\phi(x) := \{\phi(t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Neste caso, para $t \in \mathbb{R}$ escreveremos $(\gamma_\phi)_t^-(x) := \{\phi(s) : s \leq t\}$ e definiremos o conjunto $\alpha-$limite de x relativo a ϕ por

$$\alpha_\phi(x) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}^-} \overline{(\gamma_\phi)_t^-(x)}.$$

A caracterização do $\omega-$limite, dada abaixo, é frequentemente utilizada na demonstração dos resultados que se seguem.

Proposição (1)

Se $B \subset \mathbb{R}^n$, $\omega(B)$ é fechado e

$$\omega(B)=\{y\in\mathbb{R}^n : \text{existem seqüências } \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ em } \mathbb{R}^+ \text{e } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ em } B \\ \text{tais que } t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \text{ e } y = \lim_{n\to+\infty} T(t_n)x_n\}.$$

Se $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é uma solução global do semigrupo $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ por $x \in \mathbb{R}^n$, então $\alpha_\phi(x)$ é fechado e

$$\alpha_\phi(x)=\{v\in\mathbb{R}^n: \text{existe} \{t_n\} \text{ em } \mathbb{R}^+ \text{tal que } t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \text{ e } \phi(-t_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} v\}.$$

Prova: Primeiramente, seja $y \in \omega(B)$. Então $y \in \bigcap_{t\in\mathbb{R}^+} \overline{\gamma_t^+(B)}$, e assim $y \in \overline{\gamma_t^+(B)}$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$; isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma seqüência $\{y_k^n\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \gamma_n^+(B)$ tal que $y_k^n \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} y$. Como $y_k^n \in \gamma_n^+(B)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$, existem $\{x_k^n\}_{n,k\in\mathbb{N}} \subset B$ e $\{q_k^n\}_{n,k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tais que

$$y_k^n = T(n+q_k^n)x_k^n.$$

Sabemos que dados $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$, existe $k(n,\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(y_k^n, y) < \epsilon, \text{ se } k \geqslant k(n,\epsilon),$$

isto é, $d(T(n+q_k^n)x_k^n, y) < \epsilon$ se $k \geqslant k(n,\epsilon)$.

Defina então $t_n := n + q^n_{k(n,\frac{1}{n})}$ e $x_n := x^n_{k(n,\frac{1}{n})}$, assim

$$d(T(t_n)x_n, y) < \frac{1}{n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Portanto $y = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$, $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $x_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para a recíproca, seja $y \in \mathbb{R}^n$ e seqüências $\{t_n\} \subset \mathbb{R}^+$ e $\{x_n\} \subset B$, tais que $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $y = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$. Assim, fixado $\tau \in \mathbb{R}^+$ temos $\{T(t_n)x_n\}_{t_n \geqslant \tau} \subset \gamma^+_\tau(B)$, e $y \in \overline{\gamma^+_\tau(B)}$. Isto mostra que $y \in \omega(B)$.

A caracterização de $\alpha_\phi(x)$ tem prova análoga. $\square$

A seguir definiremos atração, absorção e invariância sob a ação do semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$. Para isto, recordemos a *semi-distância de Hausdorff* $\mathrm{dist}_H(A, B)$ entre dois subconjuntos A e B de $\mathbb{R}^n$

$$\mathrm{dist}_H(A, B) := \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y).$$

Denotaremos por $\mathrm{dist}(A, B)$ a distância usual entre conjuntos, isto é,

$$\mathrm{dist}(A, B) := \inf_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y).$$

Definição

Seja $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ um semigrupo. Se $A, B \subset \mathbb{R}^n$, diremos que A atrai B sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ se

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}_H(T(t)B, A) = 0.$$

Se existir um $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $T(t)B \subset A$ para todo $t \geqslant t_0$, diremos que A absorve B.

É claro que, se A absorve B, então A atrai B (a recíproca não vale, em geral).

A noção de invariância, dada a seguir, desempenha um papel fundamental no estudo da dinâmica assintótica de semigrupos.

Definição

Diremos que um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ é invariante (positivamente invariante) sob a ação do semigrupo $\{T(t):t\in\mathbb{R}^+\}$ se $T(t)A=A$ para todo $t\in\mathbb{R}^+$ ($T(t)A\subset A$).

Um conjunto invariante unitário corresponde a um ponto de equilíbrio de $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$; isto é, um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $T(t)x^* = x^*$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$.

Finalmente, estamos em condições de definir atratores globais.

Definição

Um conjunto $\mathcal{A}$ é chamado um atrator global para $\{T(t):t\in\mathbb{R}^+\}$ se é compacto, invariante e atrai subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^n$ sob a ação de $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$.

Note que o atrator global para um semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é único. De fato, se $\mathcal{A}$ e $\hat{\mathcal{A}}$ são atratores globais para este semigrupo,

$$\mathrm{dist}_H(\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}}) = \mathrm{dist}_H(T(t)\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}}) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

e assim $\mathcal{A} \subset \hat{\mathcal{A}}$. Analogamente $\hat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$, e temos resultado.