SMA 136 - Teoria Qualitativa de EDO
Décima Segunda Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

27 de Setembro de 2019

A existência do gráfico - revisitada

Seja y^* um ponto de equilíbrio para a equação

$$\dot{y} = g(y), \tag{1}$$

isto é, $g(y^*) = 0$, e suponha que $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Escrevendo (1) na variável $y = x - y^*$, esta assume a forma

$$\dot{x} = Ax + f(x), \tag{2}$$

onde $A = g'(y^*) \in M_{n\times n}$ e $f(x) = g(x + y^*) - g(y^*) - Ax$.

Suponhamos que A não tenha autovalor sobre o eixo imaginário. Neste caso diremos que y^* é **hiperbólico**.

Note que o equilíbrio y^* de (1) corresponde ao equilíbrio $x^* = 0$ de (2).

Consideremos o problema linear autônomo

$$\dot{x} = Ax \tag{3}$$

com A é uma matriz real $n \times n$.

Como A não tem autovalor sobre o eixo imaginário, $\mathbb{R}^n$ admite uma decomposição da forma $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n_+ \bigoplus \mathbb{R}^n_-$ onde $\mathbb{R}^n_+$ e $\mathbb{R}^n_-$ (variedade instável e estável de (3)), são invariantes por A e $e^{A\,t}$. Seja Q a projeção definida por esta decomposição com $R(Q) = \mathbb{R}^n_+$.

Logo, existem constantes $M, \omega > 0$ tais que

$$\begin{aligned} \|e^{A\,t} Q x_0\| &\leqslant M e^{\omega\,t} \|x_0\|, \ \ t \leqslant 0 \\ \|e^{A\,t} (I - Q) x_0\| &\leqslant M e^{-\omega\,t} \|x_0\|, \ \ t \geqslant 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Definição

A variedade instável do equilíbrio y^* de (1) é o conjunto

$$W^u(y^*) = \{\, y \in \mathbb{R}^n : \text{existe uma solução global } \eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \text{ de } (1) \text{ tal que } \eta(0) = y \text{ e } \lim_{t \to -\infty} \|\eta(t) - y^*\| = 0\}.$$

Mostraremos que a variedade instável de y^* é dada por

$$y^* + Qx + \Sigma^u(Qx)) \in \mathbb{R}^n \text{ com } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } x \text{ pequeno.}$$

onde Σ^u é uma aplicação da forma

$$Q(\mathbb{R}^n) \ni x \mapsto \Sigma^u(x) \in (I - Q)(\mathbb{R}^n).$$

Sabemos que, $y(t)$ é uma solução de (2) se, e somente se, $y(t) = x(t) + y^*$ onde $x(t)$ satisfaz

$$x(t) = e^{A(t-\tau)}x(\tau) + \int_\tau^t e^{A(t-s)} f(x(s))\, \mathrm{d}s. \tag{5}$$

Se $x(t)$ é uma solução de (5) escrevemos $x^+(t) = Qx(t)$ e $x^-(t) = x(t) - x^+(t)$. Então

$$\begin{aligned} x^+(t) &= e^{A(t-\tau)}x^+(\tau) + \int_\tau^t e^{A(t-s)} H(x^+, x^-)\, \mathrm{d}s \\ x^-(t) &= e^{A(t-\tau)}x^-(\tau) + \int_\tau^t e^{A(t-s)} G(x^+, x^-)\, \mathrm{d}s \end{aligned} \tag{6}$$

onde

$$H(x^+,x^-) = Qf(x^+ + x^-), \quad G(x^+,x^-) = (I-Q)f(x^+ + x^-).$$

Como em $(0,0)$ as funções H e G são nulas e têm derivadas nulas (com respeito a x^+ e x^-), do fato que H e G são continuamente diferenciáveis, obtemos que, dado $\rho > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $\|x\| = \|x^+(t)+x^-(t)\| < \delta$ ($x^+(t) = Qx$, $x^-(t) = x - x^+(t)$), então

$$\begin{aligned} &\|H(x^+,x^-)\| \leqslant \rho, \qquad \|G(x^+,x^-)\| \leqslant \rho, \\ &\|H(x^+,x^-) - H(\tilde{x}^+,\tilde{x}^-)\| \leqslant \rho(\|x^+ - \tilde{x}^+\| + \|x^- - \tilde{x}^-\|), \\ &\|G(x^+,x^-) - G(\tilde{x}^+,\tilde{x}^-)\| \leqslant \rho(\|x^+ - \tilde{x}^+\| + \|x^- - \tilde{x}^-\|). \end{aligned} \tag{7}$$

Vamos obter, primeiramente, o resultado relativo a existência de variedades instáveis como um gráfico no caso em que (7) vale para todo $z = (x^+, x^-) \in \mathbb{R}^n$ e para $\rho > 0$ oportunamente escolhido.

Em seguida obteremos a existência das variedades instáveis locais, como gráfico, para o caso em que h satisfaz (7) somente para $\|x\| = \|x^+ + x^-\| < \delta$ com $\delta > 0$ oportunamente escolhido.

Suponha H e G satisfaçam (7) para todo $x^+ \in Q\mathbb{R}^n$, $x^- \in (I-Q)\mathbb{R}^n$. A constante $\rho > 0$ será especificada posteriormente (em (11)). Seja $W^u(0,0)$ a variedade instável da solução de equlíbrio $(0,0)$ de (6).

Mostraremos que existe uma função limitada e Lipschitz contínua $\Sigma^u : Q\mathbb{R}^n \to (I-Q)\mathbb{R}^n$ tal que

$$W^u(0,0) = \{(x^+, x^-) : x^- = \Sigma^u(x^+),\ x^+ \in Q\mathbb{R}^n\}.$$

Como encontrar a função Σ^u cujo gráfico é $W^u(0,0)$?

Observe que estamos buscando Σ^u tal que, se $(\zeta, \Sigma^u(\zeta)) \in \mathbb{R}^n$, então a solução de (6) com $x^+(0) = \zeta$, $x^-(0) = \Sigma^u(\zeta)$ é tal que $x(t)$ está no gráfico de $\Sigma^u(\cdot)$ para todo t. Isto significa que $x^-(t) = \Sigma^u(x^+(t))$ para todo t e portanto (6) torna-se

$$\begin{aligned} x^+(t) &= e^{A(t-\tau)}x^+(\tau) + \int_\tau^t e^{A(t-s)} H(x^+(s), \Sigma^u(x^+(s)))\, ds \\ x^-(t) &= e^{A(t-\tau)}x^-(\tau) + \int_\tau^t e^{A(t-s)} G(x^+(s), \Sigma^u(x^+(s)))\, ds \end{aligned} \tag{8}$$

Além disso, a solução $(x^+(t), x^-(t))$ deve tender a zero quando $t \to -\infty$ (em particular, deve ficar limitada quando $t \to -\infty$).

Como

$$x^-(t) = e^{A(t-t_0)}(I-Q)x^-(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}(I-Q)G(x^+(s), \Sigma^u(x^+(s)))\,\mathrm{d}s,$$

fazendo $t_0 \to -\infty$ e lembrando que $x^-(t) = \Sigma^u(x^+(t))$, temos

$$\Sigma^u(x^+(t)) = \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-s)}(I-Q)G(x^+(s), \Sigma^u(x^+(s)))\,\mathrm{d}s. \tag{9}$$

Em particular, $x^-(0) = \Sigma^u(x^+(0)) = \Sigma^u(\zeta)$, e

$$\Sigma^u(\zeta) = \int_{-\infty}^{0} e^{-As}(I-Q)G(x^+(s), \Sigma^u(x^+(s)))\,\mathrm{d}s. \tag{10}$$

A prova da existência de Σ^u e propriedades.

Para mostrar a existência da função Σ^u utilizaremos o princípio da contração. Fixemos $D, L, \rho \in (0,\infty)$ e $\vartheta \in (0,1)$ tais que

$$\begin{aligned} &\tfrac{\rho M}{\omega} \leqslant D, && \tfrac{L}{M(1+L)} = \vartheta < 1, \\ &\frac{\rho M^2(1+L)}{\omega - \rho M(1+L)} \leqslant L, && \rho M + \tfrac{\rho^2 M^2(1+L)(1+M)}{2\omega - \rho M(1+L)} < \omega. \end{aligned} \tag{11}$$

Definição

Denotaremos por $\mathcal{LB}_u(D,L)$ o espaço métrico completo das as funções contínuas $\Sigma : Q\mathbb{R}^n \to (I-Q)\mathbb{R}^n$ que satisfazem

$$\begin{aligned} &\sup\{\|\Sigma(x)\|,\ x\in Q\mathbb{R}^n\} \leqslant D,\\ &\|\Sigma(x)-\Sigma(\tilde{x})\| \leqslant L\|x-\tilde{x}\|, \quad x,\tilde{x}\in Q\mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{12}$$

com a distância entre Σ e $\tilde{\Sigma}\in\mathcal{LB}_u(D,L)$ definida por

$$|||\Sigma(\cdot)-\tilde{\Sigma}(\cdot)||| := \sup\{\|\Sigma(x)-\tilde{\Sigma}(x)\|,\ x\in Q\mathbb{R}^n\}.$$

Theorem

Se as condições acima estiverem satisfeitas, existe uma função Σ^u em $\mathcal{LB}_u(D,L)$ tal que

$$W^u(0,0)=\{w\in\mathbb{R}^n : w=(Qw,\Sigma^u(Qw))\}, \tag{13}$$

onde $W^u(0,0)$ é a variedade instável da solução nula de (6).

Além disso, se $(x^+(t),x^-(t))$, $t\geq t_0$, é uma solução de (6), então existem constantes $M\geqslant 1$ e $\gamma>0$ tais que, para $t\geqslant t_0$,

$$\|x^-(t)-\Sigma^u(x^+(t))\|\leqslant Me^{-\gamma(t-t_0)}\|x^-(t_0)-\Sigma^u(x^+(t_0))\|. \tag{14}$$

Prova: Para $\zeta \in Q\mathbb{R}^n$ e $\Sigma \in \mathcal{LB}(D,L)$ denote por $x^+(t) = \psi(t,0,\zeta,\Sigma)$ a solução de

$$x^+(t) = e^{A(t-\tau)}x^+(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} H(x^+, \Sigma(x^+))\,\mathrm{d}s, \;\; t < 0,$$
$$x^+(0) = \zeta \in Q\mathbb{R}^n.$$

e defina

$$\Phi(\Sigma)(\zeta) = \int_{-\infty}^0 e^{-As}(I - Q)G(x^+(s), \Sigma(x^+(s)))\,\mathrm{d}s. \qquad (15)$$

Se $\rho > 0$ satisfaz (11), provaremos que Φ leva $\mathcal{LB}_u(D, L)$ nele mesmo e é uma contração. Consequentemente, tem um único ponto fixo $\mathcal{LB}_u(D, L)$.

Como $\{e^{At} : t \in \mathbb{R}^+\}$ satisfaz (4), de (7) segue que

$$\|\Phi(\Sigma)(\zeta)\| \leqslant \int_{-\infty}^{0} \rho M e^{\omega s}\, \mathrm{d}s = \frac{\rho M}{\omega}, \tag{16}$$

e de (11) temos que $\sup\{\|\Phi(\Sigma)(x)\|,\ x \in Q\mathbb{R}^n\} \leqslant D$.

A seguir, suponha que Σ e $\tilde{\Sigma}$ satisfaçam (12), $\zeta, \tilde{\zeta} \in Q(\tau)\mathbb{R}^n$ e que $x^+(t) = \psi(t, 0, \zeta, \Sigma)$, $\tilde{x}^+(t) = \psi(t, 0, \tilde{\zeta}, \tilde{\Sigma})$, $t < 0$.

Então

$$\begin{aligned} x^+(t) - \tilde{x}^+(t) &= e^{At} Q(\zeta - \tilde{\zeta}) \\ &\quad + \int_0^t e^{A(t-s)} Q[H(x^+(s), \Sigma(x^+(s))) - H(\tilde{x}^+(s), \tilde{\Sigma}(\tilde{x}^+(s)))] \, \mathrm{d}s, \end{aligned}$$

e de (7), (12) obtemos que

$$\begin{aligned}
\|x^+(t)-\tilde{x}^+(t)\| &\leqslant Me^{\omega t}\|\zeta-\tilde{\zeta}\| \\
&+ M\int_t^0 e^{\omega(t-s)}\|H(x^+(s),\Sigma(x^+(s)))-H(\tilde{x}^+(s),\tilde{\Sigma}(\tilde{x}^+(s)))\|\mathrm{d}s \\
&\leqslant Me^{\omega t}\|\zeta-\tilde{\zeta}\| + \rho M |||\Sigma-\tilde{\Sigma}|||\int_t^0 e^{\omega(t-s)}\,\mathrm{d}s \\
&+ \rho M(1+L)\int_t^0 e^{\omega(t-s)}\|x^+(s)-\tilde{x}^+(s)\|\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Se $\phi(t)=e^{-\omega t}\|x^+(t)-\tilde{x}^+(t)\|$, então

$$\phi(t)\leqslant M\|\zeta-\tilde{\zeta}\|+\rho M\int_t^0 e^{-\omega s}\,\mathrm{d}s|||\Sigma-\tilde{\Sigma}|||+\rho M(1+L)\int_t^0\phi(s)\,\mathrm{d}s.$$

Pela desigualdade de Gronwall

$$\begin{aligned}
&\|x^+(t) - \tilde{x}^+(t)\| \\
&\qquad \leqslant [M\|\zeta-\tilde{\zeta}\|e^{\omega\, t}+\rho M\int_t^0 e^{\omega(t-s)}\mathrm{d}s \|\!|\Sigma-\tilde{\Sigma}|\!\|]e^{-\rho M(1+L)t} \quad (17)\\
&\qquad \leqslant [M\|\zeta-\tilde{\zeta}\|+\rho M\omega^{-1}\|\!|\Sigma-\tilde{\Sigma}|\!\|]e^{-\rho M(1+L)t}.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
&\|\Phi(\Sigma)(\zeta) - \Phi(\tilde{\Sigma})(\tilde{\zeta})\| \\
&\qquad \leqslant M\int_{-\infty}^0 e^{\omega s}\|G(x^+(s),\Sigma(x^+(s)))-G(\tilde{x}^+(s),\tilde{\Sigma}(\tilde{x}^+(s)))\|\,\mathrm{d}s \\
&\qquad \leqslant \rho M\int_{-\infty}^0 e^{\omega s}\left[(1+L)\|x^+(s)-\tilde{x}^+(s)\| + \|\!|\Sigma-\tilde{\Sigma}|\!\|\right]\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Utilizando as estimativas para $\|x^+ - \tilde{x}^+\|$ obtemos

$$\begin{aligned}
&\|\Phi(\Sigma)(\zeta)-\Phi(\tilde{\Sigma})(\tilde{\zeta})\| \\
&\leqslant \frac{\rho M}{\omega}\left[1+\frac{\rho M(1+L)}{\omega-\rho M(1+L)}\right]|\!|\!|\Sigma-\tilde{\Sigma}|\!|\!| + \frac{\rho M^2(1+L)}{\omega-\rho M(1+L)}\|\zeta-\tilde{\zeta}\| \qquad (18)\\
&\leqslant \frac{\rho M}{\omega-\rho M(1+L)}|\!|\!|\Sigma-\tilde{\Sigma}|\!|\!| + \frac{\rho M^2(1+L)}{\omega-\rho M(1+L)}\|\zeta-\tilde{\zeta}\|.
\end{aligned}$$

Note que, de (11)

$$I_\Sigma = \frac{\rho M}{\omega - \rho M(1+L)} \leq \frac{L}{M(1+L)} = \vartheta < 1 \quad \text{e} \quad I_\zeta = M(1+L) I_\Sigma \leq L.$$

Assim, (18) torna-se

$$\|\Phi(\Sigma)(\zeta) - \Phi(\tilde{\Sigma})(\tilde{\zeta})\| \leqslant L\|\zeta - \tilde{\zeta}\| + \vartheta\|\Sigma - \tilde{\Sigma}\|. \qquad (19)$$

A desigualdade (19) para $\Sigma = \tilde{\Sigma}$ juntamente com (16) implicam que Φ leva $\mathcal{LB}_u(D, L)$ nele mesmo. De (11), a estimativa (19) com $\zeta = \tilde{\zeta}$ mostra que Φ é uma contração. Logo, existe um único ponto fixo $\Sigma^u = \Phi(\Sigma^u)$ de Φ em $\mathcal{LB}_u(D, L)$.

A variedade instável está contida no gráfico.

Se (26) vale, $(x^+(\cdot), x^-(\cdot))$ existe e é limitada em um intervalo da forma $(-\infty, \tau]$, para algum $\tau \in \mathbb{R}$, fazendo $t_0 \to -\infty$ in (26), temos que $x^-(t) = \Sigma^u(x^+(t))$, para cada $t \in \mathbb{R}$. Logo

$$W^u(0,0) \subset \{z \in \mathbb{R}^n : z = (Qz, \Sigma^u(Qz))\}.$$

Este argumento também assegura que $\Sigma^u(0) = 0$, já que $(0,0)$ é uma solução estacionária de (6).

Prova da atração exponencial

No que se segue, nos dedicamos a provar (26).

Seja $\zeta(t) = x^-(t) - \Sigma^u(x^+(t))$, $y^+(s,t)$, $s \leqslant t$, a solução de

$$y^+(s,t) = e^{A(s-t)}x^+(t) + \int_t^s e^{A(s-\theta)}H(y^+(\theta,t), \Sigma^u(y^+(\theta,t)))\,\mathrm{d}\theta. \quad (20)$$

e recorde que

$$\Sigma^u(x^+(t)) = \int_{-\infty}^t e^{A(t-s)}(I-Q)G(y^+(s,t), \Sigma^u(y^+(s,t)))\,\mathrm{d}s. \quad (21)$$

Então, de (8) e (21),

$$
\begin{aligned}
&\zeta(t) - e^{A(t-t_0)}(I-Q)\zeta(t_0)\\
&= x^-(t) - \Sigma^u(x^+(t)) - e^{A(t-t_0)}(I-Q)[x^-(t_0) - \Sigma^u(x^+(t_0))]\\
&= \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}(I-Q)G(x^+(s),x^-(s))\,\mathrm{d}s\\
&- \Sigma^u(x^+(t)) + e^{A(t-t_0)}(I-Q)\Sigma^u(t_0,x^+(t_0))\\
&= \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}(I-Q)[G(x^+(s),x^-(s)) - G(y^+(s,t),\Sigma^u(y^+(s,t)))]\,\mathrm{d}s - \\
&\int_{-\infty}^{t_0} e^{A(t-s)}(I-Q)[G(y^+(s,t),\Sigma^u(y^+(s,t))) - G(y^+(s,t_0),\Sigma^u(y^+(s,t_0)))]\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Vamos começar estimando $\|y^+(s,t)-x^+(s)\|$. De (8) e (20),

$$
\begin{aligned}
&\|y^+(s,t)-x^+(s)\| \\
&\quad = \left\| \int_t^s e^{A(s-\theta)} [H(y^+(\theta,t),\Sigma^u(y^+(\theta,t))) - H(x^+(\theta),x^-(\theta))] \,\mathrm{d}\theta \right\| \\
&\quad \leqslant \rho M \int_s^t e^{\omega(s-\theta)} \left[(1+L)\|y^+(\theta,t)-x^+(\theta)\| + \|\zeta(\theta)\|\right] \mathrm{d}\theta.
\end{aligned}
$$

Se $\psi(s)=e^{-\omega s}\|y^+(s,t)-x^+(s)\|$, então

$$
\psi(s) \leqslant \rho M(1+L)\int_s^t \psi(\theta)\,\mathrm{d}\theta + \rho M \int_s^t e^{-\omega\theta}\|\zeta(\theta)\|\,\mathrm{d}\theta, \quad s\leqslant t.
$$

Usando a desigualdade de Gronwall temos, para $s\leqslant t$,

$$
\|y^+(s,t)-x^+(s)\| \leqslant \rho M \int_s^t e^{-\omega(\theta-s)}\|\zeta(\theta)\|\,\mathrm{d}\theta \; e^{\rho M(1+L)(t-s)}. \quad (22)
$$

Agora estimamos $\|y^+(s,t)-y^+(s,t_0)\|$. Se $s\leqslant t_0\leqslant t$, então

$$\|y^+(s,t)-y^+(s,t_0)\| = \left\| e^{A(s-t_0)}Q[y^+(t_0,t)-x^+(t_0)] \right\|$$

$$+\left\|\int_{t_0}^{s} e^{A(s-\theta)}Q[H(y^+(\theta,t),\Sigma^u(y^+(\theta,t)))-H(y^+(\theta,t_0),\Sigma^u(y^+(\theta,t_0)))]\,\mathrm{d}\theta\right\|$$

$$\leqslant \rho M^2 e^{\omega(s-t_0)}e^{\rho M(1+L)(t-t_0)}\int_{t_0}^{t} e^{-\omega(\theta-t_0)}\|\zeta(\theta)\|\,\mathrm{d}\theta$$

$$+\rho M(1+L)\int_{s}^{t_0} e^{\omega(s-\theta)}\|y^+(\theta,t)-y^+(\theta,t_0)\|\,\mathrm{d}\theta$$

e, usando a desigualdade de Gronwall, temos

$$\|y^+(s,t)-y^+(s,t_0)\| \leqslant \rho M^2 e^{\omega(s-t_0)}\ e^{\rho M(1+L)(t-s)}\int_{t_0}^{t} e^{-\omega(\theta-t_0)}\|\zeta(\theta)\|\,\mathrm{d}\theta. \tag{23}$$

Vimos que,

$$\zeta(t) - e^{A(t-t_0)}(I-Q)\zeta(t_0)$$

$$= \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}(I-Q)[G(x^+(s),x^-(s)) - G(y^+(s,t),\Sigma^u(y^+(s,t)))]\,\mathrm{d}s -$$

$$\int_{-\infty}^{t_0} e^{A(t-s)}(I-Q)[G(y^+(s,t),\Sigma^u(y^+(s,t))) - G(y^+(s,t_0),\Sigma^u(y^+(s,t_0)))]\,\mathrm{d}s.$$

Vamos agora estimar $\zeta(t)$. De (22) e (23), obtemos que

$$\begin{aligned}
&\|\zeta(t) - e^{A(t-t_0)}(I - Q)\zeta(t_0)\| \\
&\leqslant \rho M \int_{t_0}^{t} e^{-\omega(t-s)} \left[\|x^+(s) - y^+(s,t)\| + \|x^-(s)) - \Sigma^u(y^+(s,t))\|\right] \mathrm{d}s \\
&+ \rho M(1+L) \int_{-\infty}^{t_0} e^{-\omega(t-s)} \|y^+(s,t) - y^+(s,t_0)\| \,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \rho M \int_{t_0}^{t} e^{-\omega(t-s)} \|\zeta(s)\| \,\mathrm{d}s \\
&+ \rho^2 M^2(1+L) \int_{t_0}^{t} e^{-\omega(t-s)} \int_{s}^{t} e^{-(\omega-\rho M(1+L))(\theta-s)} \|\zeta(\theta)\| \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}s \\
&+ \rho^2 M^3(1+L) \int_{-\infty}^{t_0} e^{-\omega(t-s)} \int_{t_0}^{t} e^{-(\omega-\rho M(1+L))(\theta-s)} \|\zeta(\theta)\| \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

assim

$$
\begin{aligned}
&\|\zeta(t) - e^{A(t-t_0)}(I - Q)\zeta(t_0)\| \leqslant \rho M \int_{t_0}^{t} e^{-\omega(t-s)} \|\zeta(s)\| \, \mathrm{d}s \\
&+ \rho^2 M^2 (1+L) e^{-\omega t} \int_{t_0}^{t} e^{-(\omega - \rho M(1+L))\theta} \|\zeta(\theta)\| \int_{t_0}^{\theta} e^{(2\omega - \rho M(1+L))s} \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}\theta \\
&+ \rho^2 M^3 (1+L) e^{-\omega t} \int_{t_0}^{t} e^{-(\omega - \rho M(1+L))\theta} \|\zeta(\theta)\| \int_{-\infty}^{t_0} e^{(2\omega - \rho M(1+L))s} \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}\theta \\
&\leqslant \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2 (1+L)}{2\omega - \rho M(1+L)} \right] \int_{t_0}^{t} e^{-\omega(t-s)} \|\zeta(s)\| \, \mathrm{d}s \\
&+ \frac{\rho^2 M^3 (1+L)}{2\omega - \rho M(1+L)} e^{-\omega(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} e^{-(\omega - \rho M(1+L))(\theta - t_0)} \|\zeta(\theta)\| \, \mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

e portanto

$$
\begin{aligned}
&e^{\omega(t-t_0)}\|\zeta(t)\| \\
&\leqslant M\|\zeta(t_0)\| + \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2(1+L)}{2\omega - \rho M(1+L)}\right]\int_{t_0}^{t} e^{\omega(s-t_0)}\|\zeta(s)\|\,\mathrm{d}s \\
&+ \frac{\rho^2 M^3(1+L)}{2\omega - \rho M(1+L)}\int_{t_0}^{t} e^{-(2\omega-\rho M(1+L))(s-t_0)}e^{\omega(s-t_0)}\|\zeta(s)\|\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant M\|\zeta(t_0)\| + \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2(1+L)(1+M)}{2\omega-\rho M(1+L)}\right]\int_{t_0}^{t} e^{\omega(s-t_0)}\|\zeta(s)\|\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Da desigualdade de Gronwall temos que

$$\|\zeta(t)\| \leqslant M\|\zeta(t_0)\|\, e^{-\gamma(t-t_0)}, \tag{24}$$

onde

$$\gamma = \omega - \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2(1+L)(1+M)}{2\omega - \rho M(1+L)}\right].$$

Isto prova que (26).

Agora provamos que $\{z \in \mathbb{R}^n : z = (Qz, \Sigma^u(Qz))\} \subset W^u(0,0)$. Considere $x_0^+ \in Q\mathbb{R}^n$ e a solução $x^+(t)$ do problema de valor inicial

$$x^+(t) = e^{A(t-\tau)}x_0^+ + \int_\tau^t e^{A(t-s)}H(x^+(s), \Sigma^u(x^+(s)))\mathrm{d}s.$$

Isto define uma curva $(x^+(t), \Sigma^u(x^+(t)))$, $t \in \mathbb{R}$. De (9) segue que

$$\Sigma^u(x^+(t)) = \int_{-\infty}^t e^{A(t-s)}(I - Q)G(x^+(s), \Sigma^u(x^+(s))\mathrm{d}s, \;\; t \in \mathbb{R}.$$

Portanto $\Sigma^u(x^+(t))$ resolve

$$x^-(t) = e^{A(t-\tau)}x^-(\tau) + \int_\tau^t e^{A(t-s)} G(x^+(s)\,\Sigma^u(x^+(s)))\,\mathrm{d}s, \;\; t \geqslant \tau \in \mathbb{R},$$

e concluímos que $(x^+(t), \Sigma^u(x^+(t)))$, $t \in \mathbb{R}$, é a solução de (6), passando por $(x_0^+, \Sigma^u(x_0^+))$ no instante τ. O raciocínio que nos levou a (17) pode ser usado para assegurar

$$\|x^+(t)\| \leqslant Me^{(\omega - \rho M(1+L))(t-\tau)}\|x^+(\tau)\|.$$

Assim, $x^+(t) \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ e, como $\Sigma^u(0) = 0$, $\Sigma^u(x^+(t)) \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, o que completa a prova. □

A variedade estável como gráfico

Definição

A variedade estável do equilíbrio y^* de (1) é o conjunto

$$W^s(y^*) = \{\, y \in \mathbb{R}^n : \textit{existe solução}\ \eta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n\ \textit{de}\ (1)\ \textit{tal que}\ \ \eta(0)=y\ \textit{e}\ \lim_{t\to+\infty} \|\eta(t)-y^*\|=0\}.$$

A variedade estável de y^* é dada por

$$y^* + (I-Q)x + \Sigma^s((I-Q)x)) \in \mathbb{R}^n \text{ com } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } x \text{ pequeno.}$$

onde Σ^s é uma aplicação da forma

$$(I-Q)(\mathbb{R}^n) \ni x \mapsto \Sigma^s(x) \in Q(\mathbb{R}^n).$$

Theorem

Se as condições to Teorema 1 estiverem satisfeitas, existe uma função Σ^s em $\mathcal{LB}_s(D,L)$ ($\mathcal{LB}_u(D,L)$ com Q substituída por $(I-Q)$) tal que

$$W^s(0,0)=\{w\in\mathbb{R}^n : w=((I-Q)w,\Sigma^s((I-Q)w))\}, \tag{25}$$

onde $W^s(0,0)$ é a variedade estável da solução nula de (6). Além disso, se $(x^+(t),x^-(t)), t\leqslant t_0$, é uma solução de (6), então existem constantes $M\geqslant 1$ e $\gamma>0$ tais que, para $t\leqslant t_0$,

$$\|x^+(t)-\Sigma^s(x^-(t))\|\leqslant M\, e^{\gamma(t-t_0)}\,\|x^+(t_0)-\Sigma^s(x^-(t_0))\|. \tag{26}$$

Basta considerar que $z(t)=x(-t)$ que satisfaz $\dot z=-Az-f(z)$ se, e somente se, $\dot x=Ax+f(x)$ e observar que os autuvalores de $-A$ são os autovalores de A com o sinal trocado.