SMA 136 - Teoria Qualitativa de EDO
Décima Primeira Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

24 de Setembro de 2019

Agora estamos preparados para estudar o comportamento de soluções de equações diferenciais não lineares nas proximidades de um ponto de equilíbrio hiperbólico y^*; isto é, as variedades estável e instável deste equilíbrio.

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 \\ \dot{y}_2 = -y_2 \end{cases} \tag{1}$$

e o sistema perturbado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1^3 \end{cases} \tag{2}$$

A solução de (2) que para $t = 0$ vale $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ é dada por

$$x_1(t) = e^t a$$
$$x_2(t) = e^{-t}(b - \frac{a^3}{4}) + \frac{a^3}{4}e^{3t}.$$

Temos que $x(t) \to 0,\ t \to \infty \Leftrightarrow a = 0$ e $x(t) \to 0, t \to -\infty \Leftrightarrow b = \frac{a^3}{4}$. Mais precisamente se $a \neq 0$ então $|x(t)| \to \infty,\ t \to \infty$. Se $b = \frac{a^3}{4}$ então $x_2(t) = \frac{x_1^3(t)}{4}$.

Começamos com um ponto de equilíbrio y^* para a equação

$$\dot{y} = g(y), \tag{3}$$

isto é, com um zero da função g, $g(y^*) = 0$, e supomos que $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Em seguida escrevemos a equação acima na variável $y = x - y^*$ para que assuma a forma

$$\dot{x} = Ax + f(x), \tag{4}$$

onde $A = g'(y^*) \in M_{n\times n}$ e $f(x) = g(x + y^*) - g(y^*) - Ax$.

Supomos que nenhum auto-valor de A está sobre o eixo imaginário. Neste caso diremos que y^* é **hiperbólico**. Observe que o equilíbrio y^* de (3) corresponde ao equilíbrio $x^* = 0$ de (4).

Consideremos o problema linear autônomo

$$\dot{x} = Ax \tag{5}$$

com A é uma matriz real $n \times n$.

Se A não tem autovalor com parte real igual a zero, $\mathbb{R}^n$ pode ser descomposto como $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n_+ \bigoplus \mathbb{R}^n_-$ onde $\mathbb{R}^n_+$ e $\mathbb{R}^n_-$ são, respectivamente, a variedade instável e a variedade estável de (5), são invariantes com relação a A e $e^{A\,t}$. Sejam Q $(R(Q) = \mathbb{R}^n_+)$ e $I - Q$ as projeções definidas pela decomposição acima.

Logo temos que existem constantes $M \geq 1$ e $\omega > 0$ tais que

$$\begin{aligned} &\|e^{A\,t}Qx_0\| \leqslant Me^{\omega\,t}\|x_0\|, \;\; t \leqslant 0 \\ &\|e^{A\,t}(I-Q)x_0\| \leqslant Me^{-\omega\,t}\|x_0\|, \;\; t \geqslant 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Definição

A variedade instável do equilíbrio y^* de (3) é o conjunto

$$W^u(y^*) = \{\, y \in \mathbb{R}^n : \textit{existe uma solução global}\ \eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n\ \textit{de}\ (3)\ \textit{tal que}\ \eta(0) = y\ \textit{e} \lim_{t \to -\infty} \|\eta(t) - y^*\| = 0\}.$$

Mostraremos que a variedade instável de y^* é dada por

$$y^* + Qx + \Sigma^u(Qx)) \in \mathbb{R}^n \text{ com } x \in \mathbb{R}^n \text{ e } x \text{ pequeno.}$$

onde Σ^u é uma aplicação da forma

$$Q(\mathbb{R}^n) \ni x \mapsto \Sigma^u(x) \in (I - Q)(\mathbb{R}^n).$$

Sabemos que, $y(t)$ é uma solução de (4) se, e somente se, $y(t) = x(t) + y^*$ onde $x(t)$ satisfaz

$$x(t) = e^{A(t-\tau)}x(\tau) + \int_\tau^t e^{A(t-s)} f(x(s))\,\mathrm{d}s. \tag{7}$$

Se $x(t)$ é uma solução de (7) escrevemos $x^+(t) = Qx(t)$ e $x^-(t) = x(t) - x^+(t)$. Então

$$\begin{aligned} x^+(t) &= e^{A(t-\tau)}x^+(\tau) + \int_\tau^t e^{A(t-s)} H(x^+, x^-)\,\mathrm{d}s \\ x^-(t) &= e^{A(t-\tau)}x^-(\tau) + \int_\tau^t e^{A(t-s)} G(x^+, x^-)\,\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{8}$$

onde

$$H(x^+,x^-) = Qf(x^+ + x^-), \quad G(x^+,x^-) = (I-Q)f(x^+ + x^-).$$

Como em $(0,0)$ as funções H e G são nulas e têm derivadas nulas (com respeito a x^+ e x^-), do fato que H e G são continuamente diferenciáveis, obtemos que, dado $\rho > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $\|x\| = \|x^+(t) + x^-(t)\| < \delta$ ($x^+(t) = Qx$, $x^-(t) = x - x^+(t)$), então

$$\begin{aligned}
&\|H(x^+,x^-)\| \leqslant \rho, \qquad \|G(x^+,x^-)\| \leqslant \rho,\\
&\|H(x^+,x^-) - H(\tilde{x}^+,\tilde{x}^-)\| \leqslant \rho(\|x^+ - \tilde{x}^+\| + \|x^- - \tilde{x}^-\|), \\
&\|G(x^+,x^-) - G(\tilde{x}^+,\tilde{x}^-)\| \leqslant \rho(\|x^+ - \tilde{x}^+\| + \|x^- - \tilde{x}^-\|).
\end{aligned} \tag{9}$$

Observação

É possível estender H e G fora da bola de raio δ de forma que as condições (9) valham para todo $x^+ \in \mathbb{R}^n_+$, $x^- \in \mathbb{R}^n_-$. De fato, dada uma função h definida na bola fechada de raio δ de $V \times Z$ e tomando valores em W, onde V, Z, W são espaços de Banach, defina $h_\delta : V \times Z \to W$ por

$$h_\delta(x^+, x^-) = \begin{cases} h(x^+, x^-), & \|x^+ + x^-\| \leqslant \delta \\ h\left(\dfrac{\delta\, x^+}{\|x^+ + x^-\|}, \dfrac{\delta\, x^-}{\|x^+ + x^-\|}\right), & \|x^+ + x^-\| > \delta. \end{cases}$$

A extensão h_δ é globalmente Lipschitz e sua constante de Lipschitz é a constante de Lipschitz de h na bola de raio δ.

As considerações acima sugerem que obtenhamos primeiramente o resultado relativo a existência de variedades instáveis com a hipótese que (9) valha para todo $z = (x^+, x^-) \in \mathbb{R}^n$ com $\rho > 0$ oportunamente escolhido.

Em seguida obteremos a existência das variedades instáveis locais, como gráfico, para o caso em que h satisfaz (9) somente para $\|x\| = \|x^+ + x^-\| < \delta$ com $\delta > 0$ oportunamente escolhido.

Assim, por um momento, assumimos que f seja tal que H e G satisfaça (9) para todo $x^+(t) \in Q\mathbb{R}^n$, $x^-(t) \in (I - Q)\mathbb{R}^n$ e $\rho > 0$ que será especificado posteriormente (em (13)). Seja $W^u(0,0)$ a variedade instável da solução de equlíbrio $(0,0)$ de (8).

Mostraremos que existe uma função limitada e Lipschitz contínua $\Sigma^{*,u} : Q\mathbb{R}^n \to (I - Q)\mathbb{R}^n$ tal que

$$W^u(0,0) = \{(x^+, x^-) : x^- = \Sigma^{*,u}(x^+),\ x^+ \in Q\mathbb{R}^n\}.$$

Observação

Observe que estamos buscando $\Sigma^{*,u}$ *tal que, se* $(\zeta, \Sigma^{*,u}(\zeta)) \in \mathbb{R}^n$*, então a solução de* (8) *com* $x^+(0) = \zeta$, $x^-(0) = \Sigma^{*,u}(\zeta)$ *é tal que* $x(t)$ *está no gráfico de* $\Sigma^{*,u}(\cdot)$ *para todo* t*. Isto significa que* $x^-(t) = \Sigma^{*,u}(x^+(t))$ *para todo* t *e portanto* (8) *torna-se*

$$\begin{aligned} x^+(t) &= e^{A(t-\tau)}x^+(\tau) + \int_\tau^t e^{A(t-s)} H(x^+(s), \Sigma^{*,u}(x^+(s)))\,\mathrm{d}s \\ x^-(t) &= e^{A(t-\tau)}x^-(\tau) + \int_\tau^t e^{A(t-s)} G(x^+(s), \Sigma^{*,u}(x^+(s)))\,\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{10}$$

Além disso, a solução $(x^+(t), x^-(t))$ deve tender a zero quando $t \to -\infty$ (em particular, deve ficar limitada quando $t \to -\infty$).

Como

$$\begin{aligned} x^-(t) &= e^{A(t-t_0)}(I-Q)x^-(t_0) \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}(I-Q)G(x^+(s), \Sigma^{*,u}(x^+(s)))\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

fazendo $t_0 \to -\infty$ e lembrando que $x^-(t) = \Sigma^{*,u}(x^+(t))$, temos

$$\Sigma^{*,u}(x^+(t)) = \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-s)}(I-Q)G(x^+(s), \Sigma^{*,u}(x^+(s)))\,\mathrm{d}s. \quad (11)$$

Em particular, $x^-(0) = \Sigma^{*,u}(x^+(0)) = \Sigma^{*,u}(\zeta)$, e

$$\Sigma^{*,u}(\zeta) = \int_{-\infty}^{0} e^{-As}(I-Q)G(x^+(s), \Sigma^{*,u}(x^+(s)))\,\mathrm{d}s. \quad (12)$$

Para mostrar a existência da função $\Sigma^{*,u}$ utilizaremos o princípio da contração. Fixemos $D, L, \rho \in (0,\infty)$ e $\vartheta \in (0,1)$ tais que

$$\begin{aligned} &\tfrac{\rho M}{\omega} \leqslant D, && \tfrac{L}{M(1+L)} = \vartheta < 1,\\ &\frac{\rho M^2(1+L)}{\omega - \rho M(1+L)} \leqslant L, && \rho M + \tfrac{\rho^2 M^2(1+L)(1+M)}{2\omega - \rho M(1+L)} < \omega. \end{aligned} \tag{13}$$

Definição

Denotaremos por $\mathcal{LB}(D,L)$ o espaço métrico completo das as funções contínuas $\Sigma : Q\mathbb{R}^n \to (I-Q)\mathbb{R}^n$ que satisfazem

$$\begin{aligned} &\sup\{\|\Sigma(x)\|,\ x \in Q\mathbb{R}^n\} \leqslant D,\\ &\|\Sigma(x) - \Sigma(\tilde{x})\| \leqslant L\|x - \tilde{x}\|, \quad x, \tilde{x} \in Q\mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{14}$$

com a distância entre Σ e $\tilde{\Sigma} \in \mathcal{LB}(D,L)$ definida por

$$\|\Sigma(\cdot) - \tilde{\Sigma}(\cdot)\| := \sup\{\|\Sigma(x) - \tilde{\Sigma}(x)\|,\ x \in Q\mathbb{R}^n\}.$$

Theorem

Se as condições acima estiverem satisfeitas, existirá uma função $\Sigma^{*,u} \in \mathcal{LB}(D, L)$ *tal que*

$$W^u(0,0) = \{w \in \mathbb{R}^n : w = (Qw, \Sigma^{*,u}(Qw))\}, \qquad (15)$$

onde $W^u(0,0)$ *é a variedade instável da solução nula de* (8).

Prova: Para $\zeta \in Q\mathbb{R}^n$ e $\Sigma \in \mathcal{LB}(D, L)$ denote por $x^+(t) = \psi(t, 0, \zeta, \Sigma)$ a solução de

$$x^+(t) = e^{A(t-\tau)}x^+(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}H(x^+, \Sigma(x^+))\,\mathrm{d}s, \;\; t < 0,$$
$$x^+(0) = \zeta \in Q\mathbb{R}^n.$$

e defina

$$\Phi(\Sigma)(\zeta) = \int_{-\infty}^0 e^{-As}(I - Q)G(x^+(s), \Sigma(x^+(s)))\,\mathrm{d}s. \qquad (16)$$

Mostraremos que, se $\rho > 0$ satisfaz (13), a aplicação Φ leva $\mathcal{LB}(D, L)$ nele mesmo, é uma contração estrita e, portanto, possui um único ponto fixo $\mathcal{LB}(D, L)$.

Como $\{e^{At} : t \in \mathbb{R}^+\}$ satisfaz (6), de (9) segue que

$$\|\Phi(\Sigma)(\zeta)\| \leqslant \int_{-\infty}^{0} \rho M e^{\omega s}\,\mathrm{d}s = \frac{\rho M}{\omega}, \tag{17}$$

e de (13) temos que $\sup\{\|\Phi(\Sigma)(x)\|,\ x \in Q\mathbb{R}^n\} \leqslant D$.

A seguir, suponha que Σ e $\tilde{\Sigma}$ satisfaçam (14), $\zeta, \tilde{\zeta} \in Q(\tau)\mathbb{R}^n$ e que $x^+(t) = \psi(t, 0, \zeta, \Sigma)$, $\tilde{x}^+(t) = \psi(t, 0, \tilde{\zeta}, \tilde{\Sigma})$, $t < 0$.

Então

$$\begin{aligned} x^+(t) - \tilde{x}^+(t) = & \, e^{At} Q(\zeta - \tilde{\zeta}) \\ & + \int_0^t e^{A(t-s)} Q[H(x^+(s), \Sigma(x^+(s))) - H(\tilde{x}^+(s), \tilde{\Sigma}(\tilde{x}^+(s)))] \, \mathrm{d}s, \end{aligned}$$

e de (9), (14) obtemos que

$$
\begin{aligned}
\|x^+(t) - \tilde{x}^+(t)\| &\leqslant Me^{\omega t}\|\zeta - \tilde{\zeta}\| \\
&+ M\int_t^0 e^{\omega(t-s)}\|H(x^+(s), \Sigma(x^+(s))) - H(\tilde{x}^+(s), \tilde{\Sigma}(\tilde{x}^+(s)))\|\mathrm{d}s \\
&\leqslant Me^{\omega t}\|\zeta - \tilde{\zeta}\| + \rho M|||\Sigma - \tilde{\Sigma}|||\int_t^0 e^{\omega(t-s)}\,\mathrm{d}s \\
&+ \rho M(1+L)\int_t^0 e^{\omega(t-s)}\|x^+(s) - \tilde{x}^+(s)\|\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Se $\phi(t) = e^{-\omega\, t}\|x^+(t) - \tilde{x}^+(t)\|$, então

$$
\phi(t) \leqslant M\|\zeta - \tilde{\zeta}\| + \rho M\int_t^0 e^{-\omega s}\,\mathrm{d}s|||\Sigma - \tilde{\Sigma}||| + \rho M(1+L)\int_t^0 \phi(s)\,\mathrm{d}s.
$$

Pela desigualdade de Gronwall

$$\|x^+(t) - \tilde{x}^+(t)\|$$
$$\leqslant [M\|\zeta-\tilde{\zeta}\|e^{\omega\, t}+\rho M\int_t^0 e^{\omega(t-s)}\mathrm{d}s\|\varSigma-\tilde{\varSigma}\|]e^{-\rho M(1+L)t} \tag{18}$$
$$\leqslant [M\|\zeta-\tilde{\zeta}\|+\rho M\omega^{-1}\|\varSigma-\tilde{\varSigma}\|]e^{-\rho M(1+L)t}.$$

Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
&\|\Phi(\Sigma)(\zeta)-\Phi(\tilde{\Sigma})(\tilde{\zeta})\| \\
&\quad\leqslant M\int_{-\infty}^{0} e^{\omega s}\|G(x^{+}(s),\Sigma(x^{+}(s)))-G(\tilde{x}^{+}(s),\tilde{\Sigma}(\tilde{x}^{+}(s)))\|\,\mathrm{d}s \\
&\quad\leqslant \rho M\int_{-\infty}^{0} e^{\omega s}\left[(1+L)\|x^{+}(s)-\tilde{x}^{+}(s)\|+\|\Sigma-\tilde{\Sigma}\|\right]\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Utilizando as estimativas para $\|x^{+}-\tilde{x}^{+}\|$ obtemos

$$
\begin{aligned}
&\|\Phi(\Sigma)(\zeta)-\Phi(\tilde{\Sigma})(\tilde{\zeta})\| \\
&\leqslant \frac{\rho M}{\omega}\left[1+\frac{\rho M(1+L)}{\omega-\rho M(1+L)}\right]\|\Sigma-\tilde{\Sigma}\|+\frac{\rho M^{2}(1+L)}{\omega-\rho M(1+L)}\|\zeta-\tilde{\zeta}\| \qquad (19)\\
&=\frac{\rho M}{\omega-\rho M(1+L)}\|\Sigma-\tilde{\Sigma}\|+\frac{\rho M^{2}(1+L)}{\omega-\rho M(1+L)}\|\zeta-\tilde{\zeta}\|.
\end{aligned}
$$

Note que, de (13)

$$l_\Sigma = \frac{\rho M}{\omega - \rho M(1+L)} \leq \frac{L}{M(1+L)} = \vartheta < 1 \quad \text{e} \quad l_\zeta = M(1+L) l_\Sigma \leq L.$$

Assim, (19) torna-se

$$\|\Phi(\Sigma)(\zeta) - \Phi(\tilde{\Sigma})(\tilde{\zeta})\| \leqslant L\|\zeta - \tilde{\zeta}\| + \vartheta \|\Sigma - \tilde{\Sigma}\|. \tag{20}$$

A desigualdade (20) para $\Sigma = \tilde{\Sigma}$ juntamente com (17) implicam que Φ leva $\mathcal{LB}(D, L)$ nele mesmo. De (13), a estimativa (20) com $\zeta = \tilde{\zeta}$ mostra que Φ é uma contração. Logo, existe um único ponto fixo $\Sigma^{*,u} = \Phi(\Sigma^{*,u})$ de Φ em $\mathcal{LB}(D, L)$.