SMA 136 - Teoria Qualitativa de EDO
Segunda Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

20 de Setembro de 2019

Seja A uma matriz 2×2 real com $\det A \neq 0$ (assim $\lambda = 0$ não é autovalor) e considere a equação diferencial linear homogênea autônoma

$$\dot{x} = Ax. \tag{1}$$

Sejam $\lambda_1,\ \lambda_2$ autovalores de A.

Caso 1. Autovalores reais.

Caso 1a: Nó estável. Sejam $\lambda_1,\ \lambda_2$ autovalores reais com $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Sejam $v_1,\ v_2$ autovalores associados a $\lambda_1,\ \lambda_2$, respectivamente. Então a solução geral de (1) é dada por $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$.

Se $c_1 = 0$ ($c_2 = 0$), a órbita tende a zero seguindo a direção de v_2 (v_1).

Consideremos agora os demais casos, isto é, o caso em que c_1 e c_2 são ambos não nulos. Como $c_1 \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|} &= \frac{\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} v_2}{\|\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} v_2\|} \\
&= \frac{\lambda_1 c_1 v_1 + \lambda_2 c_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} v_2}{\|\lambda_1 c_1 v_1 + \lambda_2 c_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} v_2\|} \\
&\overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda_1 c_1 v_1}{\|\lambda_1 c_1 v_1\|}.
\end{aligned}$$

Assim se $c_1 \neq 0$ as órbitas tendem a zero seguindo a direção de v_1.

Além disso, como $c_2 \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|} &= \frac{\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} v_2}{\|\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} v_2\|} \\
&= \frac{\lambda_1 c_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2) t} v_1 + \lambda_2 c_2 v_2}{\|\lambda_1 c_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2) t} v_1 + \lambda_2 c_2 v_2\|} \\
&\overset{t \to -\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda_2 c_2 v_2}{\|\lambda_2 c_2 v_2\|}.
\end{aligned}$$

Caso 1b: Nó instável. Neste caso temos $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, a análise é semelhante, bastando para isso inverter as flechas.

Caso 1c: Ponto de Sela. Neste caso temos $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. Para $c_1 \neq 0$ temos

$$\begin{aligned}\frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|} &= \frac{\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} v_2}{\|\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} v_2\|} \\ &= \frac{\lambda_1 c_1 v_1 + \lambda_2 c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} v_2}{\|\lambda_1 c_1 v_1 + \lambda_2 c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} v_2\|} \\ &\overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda_1 c_1 v_1}{\|\lambda_1 c_1 v_1\|}.\end{aligned}$$

Idem quando $t \to -\infty$.

Caso 2: Autovalores complexos $\lambda = \alpha + i\beta$, $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$. Sejam w e $\bar{w}$ autovetores associados a λ e $\bar{\lambda}$, $w = u + iv$ onde u e v são vetores reais.

Procuramos $x(t)$ solução real de (1). Então

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} w &= e^{\alpha t}[\cos\beta t + i \sin\beta t]\ [u + iv] \\ &= e^{\alpha t}[\cos(\beta t)u - \sin(\beta t)v] + ie^{\alpha t}[\cos(\beta t)v + \sin(\beta t)u]. \end{aligned} \tag{2}$$

Então $e^{\alpha t}[\cos(\beta t)u - \sin(\beta t)v]$ e $e^{\alpha t}[\cos(\beta t)v + \sin(\beta t)u]$ são soluções reais de (1) e são linearmente independentes.

Se $\rho = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, $c_1 := \rho \sin\delta$, $c_2 := \rho\cos\delta$, a solução geral de (1) é

$$x(t) = e^{\alpha t}\rho[\sin(\beta t + \delta)u + \cos(\beta t + \delta)v].$$

Assim a órbita gira em torno da origem.

Caso 2a:(Centro) $\alpha = 0$. Neste caso a solução geral é dada por

$$x(t) = \rho[\sin(\beta t + \delta)u + \cos(\beta t + \delta)v],$$

onde $\rho > 0$ e δ são constantes arbitrárias.

As órbitas são curvas fechadas, $\frac{2\pi}{\beta}$-periódicas.

Caso 2b:(Foco estável) $\alpha < 0$. As órbitas tendem a $(0,0)$, quando $t \to \infty$.

Caso 2c:(Foco instável) $\alpha > 0$. As órbitas tendem a $(0,0)$ quando $t \to -\infty$.

Caso 3. Autovalores reais e iguais $\lambda_1 = \lambda_2$.

Caso 3a:(Nó impróprio) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ e existem dois autovalores linearmente independentes associados a $\lambda_1 = \lambda_2$.

Logo todo vetor não nulo é autovetor. Neste caso $\lambda_1 = \lambda_2$ tem divisores elementares simples $(r(\lambda_1) = 1)$ e a solução geral é dada por $x(t) = e^{\lambda_1 t}(c_1 v_1 + c_2 v_2)$.

O caso $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ é semelhante, bastando inverter as flechas na figura acima.

Caso 3b:(Nó impróprio estável) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ mas não é possivel achar 2 autovetores linearmente independentes ($r(\lambda_1) = 2$), isto é, não tem divisores elementares simples.

Assim $\mathcal{N}(A - \lambda I)^2 \underset{\neq}{\supset} \mathcal{N}(A - \lambda I)$ e daí existe vetor $w \neq 0$ tal que $(A - \lambda I)^2 w = 0$ e $(A - \lambda I)w = v \neq 0$.

Temos, então que v é autovetor. Assim $e^{\lambda t} v$ e $te^{\lambda t} v + e^{\lambda t} w$ são soluções linearmente independentes de (1).

Qualquer solução de (1) é da forma $x(t) = ae^{\lambda t}v + b(te^{\lambda t}v + e^{\lambda t}w)$.

Se $b \neq 0$, como $\dot{x} = a\lambda e^{\lambda t}v + b[\lambda te^{\lambda t}v + e^{\lambda t}v + e^{\lambda t}w]$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{x}(t)}{|\dot{x}(t)|} &= \frac{a\lambda e^{\lambda t}v + b[\lambda te^{\lambda t}v + e^{\lambda t}v + e^{\lambda t}w]}{\|a\lambda e^{\lambda t}v + b[\lambda te^{\lambda t}v + e^{\lambda t}v + e^{\lambda t}w]\|} \\
&= \frac{a\lambda v + b[\lambda tv + v + w]}{\|a\lambda v + b[\lambda tv + v + w]\|} \\
&= \frac{a\lambda v/t + b[\lambda v + (v + w)/t]}{\|a\lambda v/t + b[\lambda v + (v + w)/t]\|} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{b\lambda v}{|b\lambda v|}.
\end{aligned}$$

Assim as órbitas tendem a zero na direção do autovetor v.
O caso do nó impróprio instável é semelhante ao acima com $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, bastando inverter as setas.