SMA 136 - Teoria Qualitativa de EDO
Segunda Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

17 de Setembro de 2019

Provamos assim o seguinte teorema:

Teorema

Se $\lambda_1, \cdots, \lambda_q$ são autovalores distintos de A e P_j são as projeções definidas pela decomposição $\mathbb{C}^n = M_{\lambda_1}(A) \oplus \cdots \oplus M_{\lambda_q}(A)$, então a solução do PVI $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ é dada por

$$e^{At}x_0 = \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=0}^{r(\lambda_j)-1} e^{\lambda_j t} \frac{(A - \lambda_j I)^k}{k!} t^k P_j x_0.$$

Observação: A maior potência de t que comparece junto com $e^{\lambda_j t}$ é $t^{r(\lambda_j)-1}$.

Observação: As projeções P_i acima podem ser encontradas da seguinte maneira:

$$P_i = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_i}(A-\lambda I)^{-1}d\lambda,$$

onde γ_i é uma curva retificável fechada, que possui somente o autovalor λ_i em seu interior e não passa por nenhum autovalor.

Lema

Se $\alpha = \max\{\mathrm{Re}\lambda_j, 1 \leq j \leq q\}$ *e* $m = \max\{r(\lambda_j) : 1 \leq j \leq q\}$, *existe* $K > 0$ *tal que* $|e^{At}x_0| \leqslant Kt^{m-1}e^{\alpha t}|x_0|$, *para todo* $t \geq 1$ *e* $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Prova: Sejam $\lambda_1, \cdots, \lambda_q$ os autovalores distintos de A. Então, do Teorema 1,

$$|e^{At}x_0| \leqslant \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=0}^{r(\lambda_j)-1} e^{\mathrm{Re}\,\lambda_j t} \frac{|A-\lambda_j I|^k}{k!} t^k \, |P_j x_0|.$$

Fazendo $M \geqslant \max\limits_{1\leqslant j\leqslant q} \max\limits_{0\leqslant k\leqslant r(\lambda_j)-1} \dfrac{|A-\lambda_j I|^k}{k!}|P_j|$

$$
\begin{aligned}
|e^{At}x_0| &\leqslant M\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=0}^{r(\lambda_j)-1} t^k e^{-\alpha t} e^{(Re\lambda_j-\alpha)t}|x_0| \\
&\leqslant M\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=0}^{r(\lambda_j)-1} t^{-m+k+1}\, e^{\alpha t} t^{m-1}|x_0|, \;\; t\geq 1.
\end{aligned}
$$

Seja $K>0$ tal que $M\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=0}^{r(\lambda_j)-1} t^{-m+k+1} \leqslant K$, $t\geqslant 1$. Logo $|e^{At}x_0| \leqslant Kt^{m-1}e^{\alpha t}|x_0|$, $t\geqslant 1$, $x_0\in\mathbb{C}$.

Seja λ autovalor de A.

- Acha-se vetores $a \neq 0$ tal que $(A - \lambda I)a = 0$
- Acha-se vetores b tal que $(A - \lambda I)b = a$ para cada a encontrado anteriormente. Teremos então que $b \neq 0$ e $(A - \lambda I)^2 b = 0$.
- Acha-se vetores c tal que $(A - \lambda I)c = b$ para cada b encontrado anteriormente. Temos então $(A - \lambda I)^3 c = 0$.

Esse procedimento é repetido até conseguirmos m vetores linearmente independentes que serão a base de $M_\lambda(A)$, onde m é a multiplicidade de λ.

Exemplo

Consideremos as seguinte matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

O autovalor $\lambda = 4$ tem multiplicidade algébrica 3.

$$A - 4I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (A - 4I)a = 0, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}.$$

Então $a_2 = a_4 = 0$. Logo todo vetor não nulo da forma $\begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_3 \\ 0 \end{pmatrix}$ é autovetor.

$$(A - 4I)b = a, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_2 \\ 0 \\ 0 \\ -2b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ a_3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b_2 = a_1, b_4 = 0.$$

Temos assim que $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ dão uma base para $M_4(A)$.

É facil ver que $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ é base para $M_2(A)$.

Utilizando os vetores acima é possível determinar uma base de soluções de (H)

- Toma-se primeiro soluções da forma $e^{\lambda t}a$ onde $(A-\lambda I)a=0$.
- Se for possível determinar b tal que $(A-\lambda I)b=a$, toma-se soluções da forma $te^{\lambda t}a+e^{\lambda t}b$.
- Se for possível encontrar c tal que $(A-\lambda I)c=b$, toma-se soluções da forma $\dfrac{t^2}{2!}e^{\lambda t}a+te^{\lambda t}b+e^{\lambda t}c$.

e assim por diante até completar m soluções onde m é a multiplicidade de λ.

Exemplo

No exemplo anterior temos

$$e^{4t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, e^{4t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, te^{4t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+e^{4t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, e^{2t}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

é uma base de soluções de $\dot{x}=Ax$. A matriz fundamental é

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{4t} & te^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$