SMA 136 - Teoria Qualitativa de EDO
Segunda Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

13 de Setembro de 2019

Sejam A uma matrix $n \times n$ e consideremos o seguinte problema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax, \ \ t > 0, \\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{1}$$

Se P é a matriz principal de (1); that is, $P(0) = I$, temos $P(t+s) = P(t)P(s)$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$.

Isto segue facilmente da unicidade de soluções para o problema (1) e sugere que X comporta-se como uma exponencial.

Desta forma, denotaremos a matriz principal de soluções de (1) por $e^{A\,t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Propriedades da matriz principal de soluções de (1)

(i) $e^{A(t+s)} = e^{A\,t}\, e^{A\,s}, \quad t, s \in \mathbb{R}$.

(ii) $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$

(iii) $\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$

(iv) $e^{At} = I + At + \cdots + \dfrac{A^n}{n!} t^n + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{A^n}{n!} t^n$

(v) A solução de (1) é dada por $e^{At}x_0$.

(vi) Se $X(t)$ é uma matriz fundamental de soluções para (1), $e^{At} = X(t)X^{-1}(0)$.

Prova: A prova de (i) segue da unicidade de soluções.

Para (ii), note que

$$\frac{d}{dt}[(e^{At})^{-1}(e^{At})] = \frac{d}{dt}[(e^{At})^{-1}]\,(e^{At}) + (e^{At})^{-1}\,A(e^{At}) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}[(e^{A(-t)})(e^{At})] = \frac{d}{dt}[(e^{-At})]\,(e^{At}) + (e^{-At})\,A(e^{At}) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}[(e^{(-A)t})(e^{At})] = \frac{d}{dt}[(e^{(-A)t})]\,(e^{At}) + (e^{(-A)t})\,A(e^{At}) = 0$$

e $(e^{At})^{-1}$, $e^{(-A)t}$, $e^{A(-t)}$ são matrizes principais de solução para a equação adjunta de (1). Sendo assim, todas coincidem.

Para provar (iii) note que $e^{At}A$ e Ae^{At} são ambas matrizes de solução para $\dot{X} = AX$ que, para $t = 0$, coincidem com A.

É claro que (v) e (vi) valem.

Para ver que (iv) vale procedemos da seguinte forma: Se $P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} t^k$, então $\dot{P}_n(t) = AP_{n-1}(t)$ e

$$P_n(t) = I + A \int_0^t P_{n-1}(s) ds.$$

Notando que $P_n(t)$ converge para $P(t)$ uniformemente para t em intervalos limitados de $\mathbb{R}$, temos que $\mathbb{R} \ni t \mapsto P(t) \in M_{n\times n}$ é contínua e que

$$P(t) = I + A \int_0^t P(s) ds.$$

Logo, $P(\cdot)$ é a matriz principal de soluções de (1).

Exercício

Prove que $Be^{At} = e^{At}B,\ \forall\ t \in \mathbb{R}$ *se e somente se* $AB = BA$.

Exercício

Prove que $e^{(A+B)t} = e^{At}\ e^{Bt},\ \forall\ t \in \mathbb{R}$ *se e somente se* $AB = BA$.

Definição

Definimos o colchete de Lie de duas matrizes A, B $n \times n$ *por*

$$[A, B] = AB - BA.$$

Observação

Claramente, $AB = BA$ *se e somente se* $[A, B] = 0$.

Para calcular a matriz principal de soluções e^{At} para (1) começamos procurando soluções (1) que são da forma $x(t) = e^{\lambda t}x_0, \in \mathbb{R}^n$.

Note que, $x(t)$ é a solução de (1) se, e só se, $Ae^{\lambda t}x_0 = \dot{x} = \lambda e^{\lambda t}x_0$ se, e só se, $Ax_0 = \lambda x_0$.

Recorde que, se $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ $(p \leqslant n)$ são autovalores distintos de A, associados aos autovetores $v_1, \cdots, v_p$, então $v_1, \cdots, v_p$ são linearmente independentes (exercício).

Dica para resolver o exercício acima:

Note que, se v_1 e v_2 são auto-vetores associados a auto-valores distintos λ_1 e λ_2, respectivamente. Suponha, por redução ao absurdo que, $v_1 = \alpha v_2$. Multiplicando ambos os lados pela matriz A, obtemos que $\lambda_1 v_1 = \alpha\lambda_2 v_2$ e este par de equações nos dá uma contradição.

Suponha que para $k-1$ auto-vetores $(v_1, \cdots, v_{k-1})$ associados a $k-1$ auto-valores $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{k-1})$ distintos são linearmente independentes e que ao acrescentarmos um $k-$ésimo auto-vetor v_k associado a um auto-valor λ_k, distinto dos $k-1$ existentes, tenhamos um conjunto linearmente dependente de vetores.

Segue que $v_k = \sum_{i-1}^{k-1} \alpha_i v_i$ e, multiplicando por A em ambos os lados, $\lambda_k v_k = \sum_{i-1}^{k-1} \alpha_i \lambda_i v_i$. Isto nos leva a uma contradição e a prova por indução está conpleta.

Lema

Sejam $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ os autovalores (não necessariamente distintos) de A e $v_1, \cdots, v_n$ os autovetores correspondentes. Se $v_1, \cdots, v_n$ forem linearmente independentes então, $X(t) = (e^{\lambda_1 t} v_1, \cdots, e^{\lambda_n t} v_n)$ é uma matriz fundamental de soluções para (1) e $e^{At} = X(t)X^{-1}(0)$.

Prova: Observe que os auto-valores podem ser complexos e os auto-vetores correspondentes também, mesmo que A seja uma matriz real. Para provar o resultado, basta ver que $\det X(0) \neq 0$, pois $v_1, \cdots, v_n$ são linearmente independentes.$\square$

Mostraremos a seguir, como encontrar soluções reais.

Se λ é autovalor de A associado a v, temos $Av = \lambda v$. Logo $A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$. Então $\bar{\lambda}$ é autovalor associado ao autovetor $\overline{v}$.
Se $\mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$ então,

$$\frac{e^{\lambda t}v + \overline{e^{\lambda t}v}}{2} = \mathrm{Re}\, e^{\lambda t}v = u(t)$$
$$\frac{e^{\lambda t}v - \overline{e^{\lambda t}v}}{2i} = \mathrm{Im}\, e^{\lambda t}v = v(t)$$

são soluções de (1).

Lembremos ainda o fato que *dois vetores* u_1,u_2 *são linearmente independentes se e somente se* $u_1 + u_2$ *e* $u_1 - u_2$ *são linearmente independentes*.

Como $e^{\lambda t}v$ e $\overline{e^{\lambda t}v}$ são linearmente independentes (pois $\lambda \neq \bar{\lambda}$) temos que $u(t)$ e $v(t)$ são linearmente independentes e são reais. Assim, no lugar de $e^{\lambda t}v$, $e^{\bar{\lambda} t}\bar{v}$ colocamos $u(t)$, $v(t)$.

Este procedimento pode ser estendido a número finito de autovalores.

Exemplo

Considere o sistema $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x.$

Os autovalores são da matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x$ *são* $\lambda = \pm i$. *Os respectivos autovetores são*

$$A - iI = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ é autovetor associado a } \lambda = i$$

$$e^{\lambda t} v = e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\mathrm{sen} t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \mathrm{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} \overset{\mathrm{def}}{=} u(t) + iv(t)$$

$$u(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \text{ e } v(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

são soluções linearmente independentes e

$$e^{At} = (u(t)\, v(t)) = \begin{pmatrix} \cos t & \mathrm{sen} t \\ -\mathrm{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$$

Lema

Seja B uma transformação linear em $\mathbb{C}^n$ e $N(B)$ o núcleo de B. Então

(a) $N(B) \subset N(B^2) \subset \cdots$

(b) $N(B^k)$ *é invariante com relação a* B^m*, i.e,* $B^m(N(B^k)) \subset N(B^k)$

(c) *Existe* $k \geqslant 0$ *tal que* $N(B^k) = N(B^{k+1})$.

(d) *Se* $k \in \mathbb{N}$ *é tal que* $N(B^k) = N(B^{k+1})$*, então* $N(B^k) = N(B^{k+j})$ *para todo* $j \in \mathbb{N}^*$.

Prova: (a) $x \in N(B) \Rightarrow Bx = 0 \Rightarrow B^2x = 0 \Rightarrow x \in N(B^2)$.

(b) $x \in N(B^k) \Rightarrow B^k x = 0$

$$\Rightarrow B^k(B^m x) = B^m(B^k x) = 0 \Rightarrow B^m x \in N(B^k).$$

(c) Imediato já que $N(B^m) \subset \mathbb{C}^n$, $\forall\ m$.

(d) Da caracterização $N(B^{k+1}) = \{x \in \mathbb{C}^n : Bx \in N(B^k)\}$ segue facilmente a prova de (d).

This characterization is proved noting that, clearly $N(B^{k+1}) \subset \{x \in \mathbb{C}^n : Bx \in N(B^k)\}$ and that, if $x \in \{x \in \mathbb{C}^n : Bx \in N(B^k)\}$ then, $B^k(Bx) = 0$ and $x \in N(B^{k+1})$. $\square$

Seja $r(\lambda) = \min\{m : N((A - \lambda I)^m) = N((A - \lambda I)^{m+1})\}$.

Exemplo

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

O autovalor $\lambda = 4$ *tem multiplicidade algébrica* 3.

$$(A - 4I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A - 4I)^2 = 0.$$

$$N(A - 4I) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}, \quad N((A - 4I)^2) = \mathbb{C}^3.$$

Logo $r(4) = 2$.

Se λ é autovalor de A, definimos o *autoespaço generalizado* $M_\lambda(A)$ associado a λ por

$$M_\lambda(A) := N\left((A - \lambda I)^{r(\lambda)}\right)$$

onde $r(\lambda)$ foi definido acima.

Definição

Se λ é um auto-valor de A, diremos que $v \neq 0$ é um autovetor generalizado se $(A - \lambda I)^{r(\lambda)} v = 0$ e que o autovalor λ tem divisores elementares simples se $r(\lambda) = 1$, isto é, se $M_\lambda(A) := N((A - \lambda I))$.

A dimensão de $M_\lambda(A)$ é igual à *multiplicidade algébrica* de λ como zero do polinômio característico, $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

A *multiplicidade geométrica* de λ é a dimensão de $N(A - \lambda I)$.

Exemplo

Consideremos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
O autovalor $\lambda = 1$ *tem multiplicidade algébrica* 2, *multiplicidade geométrica* 2 *e tem divisores elementares simples.*

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = 1$ é autovalor com multiplicidade algébrica 2, multiplicidade geométrica 1 e não tem divisores elementares simples, $r(1) = 2$.

Lema

$M_\lambda(A) := N((A-\lambda I)^{r(\lambda)})$ e $R_\lambda(A) := R((A-\lambda I)^{r(\lambda)})$ são invariantes por A e e^{At}. Além disso, $M_\lambda(A) \oplus R_\lambda(A) = \mathbb{C}^n$.

Prova: A primeira parte é óbvia. Para ver que $M_\lambda(A)$ e $R_\lambda(A)$ são invariantes por e^{At} note que

$$e^{At}(A-\lambda I)^{r(\lambda)} = (A-\lambda I)^{r(\lambda)}e^{At}.$$

Resta apenas provar que $M_\lambda(A) \oplus R_\lambda(A) = \mathbb{C}^n$. Se $x \in M_\lambda(A) \cap R_\lambda(A)$ então $(A-\lambda I)^{r(\lambda)}x = 0$ e existe $y \in\in \mathbb{C}^n$ tal que $(A-\lambda I)^{r(\lambda)}y = x$. Segue que $(A-\lambda I)^{2r(\lambda)}y = 0$ e como $N((A-\lambda I)^{2r(\lambda)}) = N((A-\lambda I)^{r(\lambda)})$ temos que $0 = (A-\lambda I)^{r(\lambda)}y = x$. O resultado agora segue do Teorema do Núcleo e Imagem. $\square$

Lema

Se A é uma transformação linear, $\lambda_1, \cdots, \lambda_q$ são os autovalores distintos de A e $m_1, \cdots, m_q$ as suas multiplicidades, então

$$\mathbb{C}^n = \oplus_{i=1}^{q} M_{\lambda_i}(A) \quad e \quad m_i = \dim(M_{\lambda_i}(A)), \ 1 \leq i \leq q.$$

Prova: Do Lemma 3, $M_1 := M_{\lambda_1}(A)$ e $R_1 := R_{\lambda_1}(A)$ são invariantes por A e $= M_{\lambda_1}(A) \oplus R_{\lambda_1}(A) = \mathbb{C}^n$. Segue que A pode ser escrita na forma

$$\begin{pmatrix} A_{M_1} & 0 \\ 0 & A_{R_1} \end{pmatrix}$$

onde A_{M_1} (A_{R_1}) é a restrição de A a M_1 (R_1).

Note que $A_{R_1} - \lambda_1 I_{R_1}$ é sobrejetora em R_1 e portanto, não singular. Desta forma, $\dim(M_1) \geq m_1$ onde m_1 é a multiplicidade de λ_1 como zero do polinômio característico.

Por outro lado, $A_{M_1} - \lambda_1 I_{M_1}$ é nilpotente em M_1 e podemos escolher uma base para M_1 tal que a sua representação contenha apenas 1's na super-diagonal e 0's nas demais entradas. Segue que A_{M_1} tem um único auto-valor e que $\dim(M_1) \leq m_1$.

Consideranto agora A_{R_1} e repetindo o processo concluímos o resultado após um número finito de passos.$\square$

Sejam $P_1, \cdots, P_q$ as projeções determinadas pela decomposição dada no Lema 4.

Se $x_0 \in \mathbb{C}^n$, temos

$$
\begin{aligned}
e^{A\,t}x_0 &= e^{A\,t}\sum_{j=1}^{q} P_j x_0 = \sum_{j=1}^{q} e^{A\,t} P_j x_0 = \sum_{j=1}^{q} e^{\lambda_j I t + (A-\lambda_j I)\,t} P_j x_0 \\
&= \sum_{j=1}^{q} e^{\lambda_j\,t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A-\lambda_j I)^k}{k!} t^k P_j x_0 \\
&= \sum_{j=1}^{q} e^{\lambda_j\,t} \sum_{k=0}^{r(\lambda_j)-1} \frac{(A-\lambda_j I)^k}{k!} t^k P_j x_0
\end{aligned}
$$

Pois $(A-\lambda_j I)^k P_j x_0 = 0$ se $k \geqslant r(\lambda_j)$.

Provamos assim o seguinte teorema:

Teorema

Se $\lambda_1, \cdots, \lambda_q$ são autovalores distintos de A e P_j são as projeções definidas pela decomposição $\mathbb{C}^n = M_{\lambda_1}(A) \oplus \cdots \oplus M_{\lambda_q}(A)$, então a solução do PVI $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ é dada por

$$e^{At}x_0 = \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=0}^{r(\lambda_j)-1} e^{\lambda_j t} \frac{(A - \lambda_j I)^k}{k!} t^k P_j x_0.$$