SMA 136 - Teoria Qualitativa de EDO
Segunda Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

10 de Setembro de 2019

Na aula anterior estudamos a estabilidade de sistemas lineares.

Agora, vamos começar a obter as primeiras propriedades de estabilidade de sistemas lineares que podemos transferir para sistemas não lineares via resultados de perturbação.

Seja $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ aberto e $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua, localmente Lipschitz contínua na segunda variável e considere a equação diferencial

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{1}$$

Se $\phi(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0)$ é uma solução de (1) que passa por x_0 no instante t_0 e está definida para todo $t \geq t_0$, recorde que:

Definição (Estabilidade)

A solução ϕ *de* (1) *será estável sempre que, para cada* $\epsilon > 0$ *e* $\tau \geq t_0$, *existir* $\delta = \delta(\epsilon, \tau) > 0$ *tal que, para* $y_0 \in D$ *com* $\|y_0 - \phi(\tau)\| < \delta$, $x(\cdot, \tau, y_0)$ *existir para todo* $t \geq \tau$ *e* $\|x(t, \tau, y_0) - \phi(t)\| < \epsilon$ *para todo* $t \geq \tau$.

A solução ϕ *de* (1) *será uniformemente estável se é estável e* δ *puder ser escolhido independentemente de* τ.

A solução ϕ *de* (1) *será assintoticamente estável sempre que, for estável e existir* $\delta_0 = \delta_0(\tau) > 0$ *tal que, para* $y_0 \in D$ *com* $\|y_0 - \phi(\tau)\| < \delta_0$, $\|x(t, \tau, y_0) - \phi(t)\| \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

A solução ϕ *de* (1) *será uniformemente assintoticamente estável sempre que for uniformemente estável,* δ_0 *puder ser escolhido indepententemente de* τ *e para cada* $\eta > 0$ *existir* $T(\eta) > 0$ *tal que* $\|y_0 - \phi(\tau)\| < \delta_0$ *implica* $\|x(t + \tau, \tau, y_0) - \phi(t)\| < \eta$ *para todo* $t \geq T(\eta)$.

A solução ϕ *de* (1) *será dita será dita instável se não for estável.*

Estabilidade de Sistemas Lineares

Recorde ainda que, para a equação linear

$$\dot{x} = A(t)x \tag{2}$$

onde $J \ni t \mapsto A(t) \in M_{n\times n}$ é uma função contínua, J é $\mathbb{R}$ ou um intervalo da forma $[t_0, \infty)$, a estabilidade de qualquer solução de (2) é determinada pela estabilidade da solução nula, sendo assin, falaremos da estabilidade de (2) em lugar de falar da estabilidade de uma solução de (2).

Na aula anterior provamos que:

Teorema

Seja $X(t)$ uma matriz fundamental de soluções de (2) e $\beta \in J$. O sistema (2) é

i) *estável para $t_0 \in J$ se, e somente se, existe $K = K(t_0) > 0$ tal que*
$$\|X(t)\| \leq K, \ \ t_0 \leq t < \infty.$$

ii) *uniformemente estável para $t_0 \geq \beta$ se, e somente se, existe $K = K(\beta) > 0$ tal que*
$$\|X(t)X^{-1}(s)\| \leq K, \ \ t_0 \leq s \leq t < \infty.$$

iii) *assintoticamente estável para qualquer $t_0 \in \mathbb{R}$ se, e somente se,*
$$\|X(t)\| \stackrel{t \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

iv) *uniformemente assintoticamente estável para $t_0 \geq \beta$ se, e somente se, existem $K = K(\beta) > 0$ e $\alpha = \alpha(\beta) > 0$ tal que*
$$\|X(t)X^{-1}(s)\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, \ \ t_0 \leq s \leq t < \infty.$$

A partir do teorema anterior, podemos obter o primeiro resultado de perturbação (ainda linear):

Teorema

Se $\beta \in \mathbb{R}$ e (2) é uniformemente estável para $t_0 \geq \beta$. Se $[t_0, \infty) \ni t \mapsto B(t) \in M_{n \times n}$ é contínua e tal que

$$\int_{\beta}^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty,$$

então

$$\dot{x} = [A(t) + B(t)]x, \ \ t \geq t_0 \geq \beta, \tag{3}$$

é uniformemente estável.

Proof: Se $X(t)$ é uma matriz fundamental de soluções de (2), qualquer solução de (3) é da forma

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)B(s)x(s)ds, \qquad (4)$$

para qualquer $t, t_0 \in \mathbb{R}$. Se $t_0 \geq \beta$, do Teorema 1, existe uma constante $K = K(\beta)$ tal que $\|X(t)X^{-1}(t_0)\| \leq K$, $t \geq t_0$.

Consequentemente,

$$\|x(t)\| \leq K\|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} K\|B(s)\|\|x(s)\|ds, \ \ t \geq t_0$$

e, da desigualdade de Gronwall,

$$\|x(t)\| \leq K\, e^{K\int_{t_0}^{t}\|B(s)\|ds} \|x(t_0)\|, \ \ t \geq t_0.$$

Isto claramente implica a estabilidade uniforme de (3).$\square$

Teorema

Se $\beta \in \mathbb{R}$ *e* (2) *é uniformemente assintoticamente estável para* $t_0 \geq \beta$. *Se* $[t_0, \infty) \ni t \mapsto B(t) \in M_{n\times n}$ *é contínua e tal que*

$$\int_{\beta}^{\infty} \|B(t)\| dt \leq \gamma\,(t - t_0) + \tau, \;\; t \geq t_0 \geq \beta,$$

para alguma escolha de $\tau = \tau(\beta) > 0$ *e* $\gamma = \gamma(\beta) > 0$, *então existe* $r > 0$ *tal que* (3) *é uniformemente assintoticamente estável sempre que* $\gamma < r$.

Proof: Se $X(t)$ é uma matriz fundamental de soluções de (2) e (2) é uniformemente assintoticamente estável para $t_0 \geq \beta$, do Teorema 1, existem um constantes $K = K(\beta) > 0$ e $\alpha = \alpha(\beta) > 0$ tais que $\|X(t)X^{-1}(s)\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}$, $t \geq s \geq \beta$. De (4),

$$\|x(t)\| \leq Ke^{-\alpha(t-t_0)}\|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} Ke^{-\alpha(t-s)}\|B(s)\|\|x(s)\|ds,\ t \geq t_0$$

e, fazendo $z(t) = e^{\alpha t}\|x(t)\|$,

$$z(t) \leq Kz(t_0) + \int_{t_0}^{t} K\|B(s)z(s)ds,\ t \geq t_0.$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall, obtemos que

$$z(t) \leq K e^{K\int_{t_0}^{t} \|B(s)\| ds} z(t_0) \leq K_1 e^{K\gamma(t-t_0)} z(t_0), \ \ t \geq t_0.$$

onde $K_1 = Ke^{K\tau}$.

O que, por sua vez, implica

$$\|x(t)\| \leq K_1 e^{-(\alpha - K\gamma)(t-t_0)} \|x(t_0)\|, \ \ t \geq t_0.$$

Assim, se $r = \alpha K^{-1}$ e $\gamma < r$, (3) é uniformemente assintoticamente estável.$\square$

Teorema

Se $\beta \in \mathbb{R}$ e (2) é uniformemente assintoticamente estável para $t_0 \geq \beta$. Se $[\beta, \infty) \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \mapsto f(t, x)$ é contínua e localmente Lipschitz contínua na segunda variável e dado $\epsilon > 0$ existe $\sigma > 0$ tal que

$$\|f(t,x)\| \leq \epsilon \|x\|, \quad \textit{para } \|x\| \leq \sigma \textit{ e } t \geq t_0 \geq \beta, \tag{5}$$

então, a solução $x \equiv 0$ de

$$\dot{x} = A(t)x + f(t,x) \tag{6}$$

é uniformemente assintoticamente estável para $t \geq t_0$.

Proof: A hipótese de estabilidade assintótica uniforme para $t_0 \geq \beta$ do sistema (2) implica que existem constantes $K = K(\beta) > 0$ e $\alpha = \alpha(\beta) > 0$ tais que $\|X(t)X^{-1}(s)\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}$, $t \geq s \geq \beta$. Qualquer solução de (6) satisfaz

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)f(s, x(s))ds, \qquad (7)$$

Escolha $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon K < \alpha$ e seja σ tal que (5) holds. Para os valores de $t \geq t_0$ para os quais $\|x(t)\| < \sigma$, temos

$$\|x(t)\| \leq Ke^{-\alpha(t-t_0)}\|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)f(s,x(s))ds$$

e, como antes,

$$\|x(t)\| \leq K_1 e^{-(\alpha-K\epsilon)(t-t_0)}\|x(t_0)\|,$$

para todo $t \geq t_0$ para os quais $\|x(t)\| < \sigma$. Como $\alpha - \epsilon K > 0$ esta desigualdade implica que $\|x(t)\| < \epsilon$ para todo $t \geq t_0$ contanto que $\|x(t_0)\| < \sigma/K$ e a desigualdade acima implica a estabilidade assintótica uniforme.$\square$