SMA 136 - Teoria Qualitativa de EDO
Segunda Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

27 de Agosto de 2019

Já vimos a importância de compreender bem as propriedades de sistemas lineares para então tentar transferir estas propriedades para sistemas não-lineares usando argumentos de perturbação.

Nesta seção vamos estudar a estabilidade de sistemas lineares.

Vamos começar com a motivação e definição da noção de estabilidade.

Estabilidade - Definição e Motivação

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma função contínuamente diferenciável e considere a equação diferencial

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

Se $x^* \in D$ é tal que $f(x^*) = 0$, então $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definida por $\xi(t) = x^*$ para todo $t \in \mathbb{R}$ é uma solução de (1). Esta solução é chamada um ponto de equilíbrio ou uma solução estacionária.

Agora suponha que o sistema seja deslocado levemente do ponto de equilíbrio; isto é, considere a solução $x(\cdot, t_0, x_0)$ de (1) que passa por x_0 em $t = t_0$ onde x_0 está 'próximo' a x^*.

O que ocorre com a solução $x(\cdot, t_0, x_0)$; ou seja, como o sistema se comporta se começarmos próximo a x^*?

- Ocorre que $x(\cdot, t_0, x_0)$ permanece próxima a x^*?
- Ocorre que $x(\cdot, t_0, x_0)$ se aproxima de x^* a medida que o tempo passa?
- Ocorre que $x(\cdot, t_0, x_0)$ se afasta de x^* a medida que o tempo passa?

A primeira dessas possibilidades está associada à idéia de estabilidade. A segunda à idéia de estabilidade assintótica e a terceira à idéia de instabilidade.

É instrutivo pensar no pêndulo enquanto analisamos as idéias acima. Com estas idéias em mente, vamos definir estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade.

Definição

A solução estacionária x^* *de* (1) *será dita estável sempre que, para cada* $\epsilon > 0$, *existir* $\delta > 0$ *tal que, para* $x_0 \in D$ *com* $\|x_0 - x^*\| < \delta$, $x(\cdot, t_0, x_0)$ *existir para todo* $t \geq t_0$ *e* $\|x(t, t_0, x_0) - x^*\| < \epsilon$ *para todo* $t \geq t_0$.

A solução estacionária x^* *de* (1) *será dita assintoticamente estável sempre que, for estável e existir* $\delta_0 > 0$ *tal que, para* $x_0 \in D$ *com* $\|x_0 - x^*\| < \delta_0$, $\|x(t, t_0, x_0) - x^*\| \xrightarrow{t\to\infty} 0$.

A solução estacionária x^* *de* (1) *será dita instável se não for estável.*

Exercício: Compare estabilidade e continuidade relativamente a condições iniciais.

No que se segue, estenderemos a noção de estabilidade para soluções arbitrárias de sistemas, incluindo a possibilidade de que estes sejam não-autônomos.

Seja $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ aberto e $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua, localmente Lipschitz contínua na segunda variável e considere a equação diferencial

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{2}$$

Se $\phi(\cdot) = x(\cdot, t_0, x_0)$ é uma solução de (2) que passa por x_0 no instante t_0 e está definida para todo $t \geq t_0$, definimos:

Definição

A solução ϕ *de* (2) *será estável sempre que, para cada* $\epsilon>0$ *e* $\tau\geq t_0$, *existir* $\delta=\delta(\epsilon,\tau)>0$ *tal que, para* $y_0\in D$ *com* $\|y_0-\phi(\tau)\|<\delta$, $x(\cdot,\tau,y_0)$ *existir para todo* $t\geq\tau$ *e* $\|x(t,\tau,y_0)-\phi(t)\|<\epsilon$ *para todo* $t\geq\tau$.

A solução ϕ *de* (2) *será uniformemente estável se é estável e* δ *puder ser escolhido independentemente de* τ.

A solução ϕ *de* (2) *será assintoticamente estável sempre que, for estável e existir* $\delta_0=\delta_0(\tau)>0$ *tal que, para* $y_0\in D$ *com* $\|y_0-\phi(\tau)\|<\delta_0$, $\|x(t,\tau,y_0)-\phi(t)\|\xrightarrow{t\to\infty}0$.

A solução ϕ *de* (2) *será uniformemente assintoticamente estável sempre que for uniformemente estável,* δ_0 *puder ser escolhido indepententemente de* τ *e para cada* $\eta>0$ *existir* $T(\eta)>0$ *tal que* $\|y_0-\phi(\tau)\|<\delta_0$ *implica* $\|x(t+\tau,\tau,y_0)-\phi(t)\|<\eta$ *para todo* $t\geq T(\eta)$.

A solução ϕ *de* (2) *será dita será dita instável se não for estável.*

Exercício: Verifique que, quando f em (2) é independente de t, estabilidade (estabilidade assintótica) e estabilidade (estabilidade assintótica) uniforme são equivalentes.

Exemplo: $y \equiv 0$ é uma solução assintoticamente estável para $\dot{y} = -y/(1+t)$. De fato, note que $x(t, \tau, y_0) = (1+\tau)/(1+t)y_0$

Estabilidade de Sistemas Lineares

Considere a equação linear

$$\dot{x} = A(t)x \tag{3}$$

onde $J \ni t \mapsto A(t) \in M_{n\times n}$ é uma função contínua, J é $\mathbb{R}$ ou um intervalo da forma $[t_0, \infty)$.

Em primeiro lugar observamos que, a estabilidade de qualquer solução de (3) é determinada pela estabilidade da solução nula.

Desta forma, frequentemente, falaremos da estabilidade de (3) em lugar de falar da estabilidade de uma solução de (3).

Teorema

Seja $X(t)$ uma matriz fundamental de soluções de (3) e $\beta \in J$. O sistema (3) é

i) *estável para $t_0 \in J$ se, e somente se, existe $K = K(t_0) > 0$ tal que*

$$\|X(t)\| \leq K, \;\; t_0 \leq t < \infty.$$

ii) *uniformemente estável para $t_0 \geq \beta$ se, e somente se, existe $K = K(\beta) > 0$ tal que*

$$\|X(t)X^{-1}(s)\| \leq K, \;\; t_0 \leq s \leq t < \infty.$$

iii) *assintoticamente estável para qualquer $t_0 \in \mathbb{R}$ se, e somente se,*

$$\|X(t)\| \overset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

iv) *uniformemente assintoticamente estável para $t_0 \geq \beta$ se, e somente se, existem $K = K(\beta) > 0$ e $\alpha = \alpha(\beta) > 0$ tal que*

$$\|X(t)X^{-1}(s)\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, \;\; t_0 \leq s \leq t < \infty.$$

Prova:

i) Dado $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\sup_{t \geq t_0} \|X(t)\| < \infty$, então a solução por x_0 no instante τ é dada por $x(t, \tau, x_0) = X(t)X^{-1}(\tau)x_0$. Logo

$$\|x(t, \tau, x_0)\| \leq K\|X^{-1}(\tau)\|\|x_0\| < \epsilon$$

sempre que $\|x_0\| < \delta = \epsilon/(K\|X^{-1}(\tau)\|)$. Isto mostra que a solução nula é estável.

Por outro lado, se dado $\epsilon > 0$ e $\tau \geq t_0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, \tau) > 0$ tal que

$$\|x(t, \tau, \delta x_0)\| = \|X(t)X^{-1}(\tau)\delta x_0\| \leq \epsilon, \quad \forall\, x_0, \text{ com } \|x_0\| \leq 1.$$

Logo

$$\|X(t)\| = \|X(t)X^{-1}(\tau)X(\tau)\| \leq \epsilon\delta^{-1}\|X(\tau)\|.$$

ii) Dado $t_0 \geq \beta$ tal que $K := \sup\limits_{t \geq \tau \geq t_0} \|X(t)X^{-1}(\tau)\| < \infty$, então a solução por x_0 no instante τ é dada por $x(t,\tau,x_0) = X(t)X^{-1}(\tau)x_0$. Logo

$$\|x(t,\tau,x_0)\| \leq K\|x_0\| < \epsilon$$

sempre que $\|x_0\| < \delta = \epsilon/K$. Isto mostra que a solução nula é uniformemente estável.

Por outro lado, se dado $\epsilon > 0$ existir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$\|x(t,\tau,\delta x_0)\| = \|X(t)X^{-1}(\tau)\delta x_0\| < \epsilon,\ \forall\, t \geq \tau \geq t_0, x_0,$ com $\|x_0\| < 1$.

Logo

$$\|X(t)X^{-1}(\tau)\| \leq \epsilon\delta^{-1}.$$

iii) Se $\|X(t)\| \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, Dado $t_0 \in \mathbb{R}$, $K := \sup\limits_{t\geq t_0} \|X(t)\| < \infty$, então i) implica estabilidade. Como a solução por x_0 no instante τ é dada por $x(t,\tau,x_0) = X(t)X^{-1}(\tau)x_0$ temos que $\|x(t)\| \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Por outro lado, se existe $\delta_0 = \delta_0(\epsilon,\tau) > 0$ tal que

$$\|x(t,\tau,\delta_0 y)\| = \|X(t)X^{-1}(\tau)\delta_0 y\| \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ com } \|y\| \leq 1.$$

Logo

$$\|X(t)\| \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

iv) Se $\beta \in \mathbb{R}$ e existe $K(\beta) > 0$ tal que $\|X(t)X^{-1}(s)\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}$, $\beta \leq s \leq t < \infty$, dado $t_0 \geq \beta$ $\sup_{t \geq \tau \geq t_0} \|X(t)X^{-1}(\tau)\| \leq K$ e, de ii), segue a estabilidade uniforme.

Se $\|x_0\| \leq 1$, para $0 < \eta < K$ seja $T(\eta) = -\alpha^{-1} \log(\eta/K) + 1$. Logo, para $\tau \geq \beta$,

$$\|x(t+\tau, \tau, x_0)\| = \|X(t)X^{-1}(\tau)x_0\| \leq Ke^{-\alpha t}\|x_0\| < \eta, \ \forall\, t \geq T(\eta).$$

E a estabilidade assintótica uniforme segue.

Reciprocamente, suponha que a solução $x \equiv 0$ seja uniformemente assintoticamente estável, existe $\delta_0 > 0$ tal que, para qualquer $\eta > 0$, existe $T(\eta) > 0$ tal que

$$\|X(t+\tau)X^{-1}(\tau)\delta_0 x_0\| < \eta, \ \forall\, t \geq T(\eta), \ \tau \geq \beta, \ \|x_0\| < 1.$$

Tomando $\eta < \delta_0$ temos que

$$\|X(t+\tau)X^{-1}(\tau)\| < 1, \ \forall\, t \geq T(\eta), \ \tau \geq \beta.$$

De ii) e da estabilidade uniforme, $M := \sup\limits_{t \geq \tau \geq \beta} \|X(t)X^{-1}(\tau)\| < \infty$.

Tomando $\alpha = -(T(\eta))^{-1} \log(\eta/\delta_0)$ e $K = Me^{\alpha T}$, para $t \geq \tau \geq \beta$, escolha $k \in \mathbb{N}$ tal que $kT(\eta) \leq t < (k+1)T(\eta)$. Segue que

$$\begin{aligned}
&\|X(t+\tau)X^{-1}(\tau)\| \\
&\qquad \leq \|X(t+\tau)X^{-1}(\tau+kT(\eta))\| \cdots \|X(\tau+T(\eta))X^{-1}(\tau)\| \\
&\qquad \leq M(\eta/\delta_0)^k = Me^{-\alpha kT} \leq Ke^{-\alpha t}.
\end{aligned}$$

Isto completa a prova de iv) e a prova do teorema.

Teorema

Se $\beta \in \mathbb{R}$ e (3) é uniformemente estável para $t_0 \geq \beta$. Se $[t_0, \infty) \ni t \mapsto B(t) \in M_{n\times n}$ é contínua e tal que

$$\int_\beta^\infty \|B(t)\| dt < \infty,$$

então

$$\dot{x} = [A(t) + B(t)]x, \;\; t \geq t_0 \geq \beta, \tag{4}$$

é uniformemente estável.

Teorema

Se $\beta \in \mathbb{R}$ e (3) é uniformemente assintoticamente estável para $t_0 \geq \beta$. Se $[t_0, \infty) \ni t \mapsto B(t) \in M_{n\times n}$ é contínua e tal que

$$\int_{\beta}^{\infty} \|B(t)\| dt \leq \gamma\,(t - t_0) + \tau, \;\; t \geq t_0 \geq \beta,$$

para alguma escolha de $\tau = \tau(\beta) > 0$ e $\gamma = \gamma(\beta) > 0$, então existe $r > 0$ tal que (4) é uniformemente assintoticamente estável sempre que $\gamma < r$.

Teorema

Se $\beta \in \mathbb{R}$ *e* (3) *é uniformemente assintoticamente estável para* $t_0 \geq \beta$*. Se* $[\beta, \infty) \times \mathbb{R}^n \ni (t, x) \mapsto f(t, x)$ *é contínua e localmente Lipschitz contínua na segunda variável e dado* $\epsilon > 0$ *existe* $\sigma > 0$ *tal que*

$$\|f(t,x)\| \leq \epsilon\|x\|, \quad \textit{para } \|x\| \leq \sigma \textit{ e } t \geq t_0 \geq \beta,$$

então, a solução $x \equiv 0$ *de*

$$\dot{x} = A(t)x + f(t,x)$$

é uniformemente assintoticamente estável para $t \geq t_0$*.*