SMA 136 - Teoria Qualitativa de EDO
Segunda Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

13 de Agosto de 2019

Motivação

Depois de estudadas condições para a existência, unicidade, continuidade e continuação de soluções, vamos procurar obter informações sobre soluções 'próximas' a uma solução dada. A seguir descrevemos um pouco melhor este processo.

Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínuamente diferenciável e considere a equação diferencial

$$\dot{x} = f(t,x) \tag{1}$$

Se $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é uma solução de (1), para $x = \xi(t) + y$, temos

$$\dot{y} = D_x f(t,\xi(t))y + f(t,y+\xi(t)) - f(t,\xi(t)) - D_x f(t,\xi(t))y \tag{2}$$

Observe que a equação (2) pode ser re-escrita na forma

$$\dot{y} = A(t)y + g(t, y) \tag{3}$$

onde $A : \mathbb{R} \to M_{n\times n}$ é a função contínua dada por

$$A(t) = D_x f(t, \xi(t))$$

e $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínuamente diferenciável que satisfaz $g(t, 0) = 0 \in \mathbb{R}^n$ e $g_x(t, 0) = 0 \in M_{n\times n}$ e é dada por

$$g(t, y) = f(t, y + \xi(t)) - f(t, \xi(t)) - A(t)y.$$

Note que $\|g(t, y)\| = O(\|y\|^2)$ quando $y \to 0$.

É natural esperar que possamos melhor compreender o comportamento das soluções de (3) que ficam próximas da solução nula a partir da compreensão das soluções do problema linear associado

$$\dot{y} = A(t)y. \tag{4}$$

De fato, esta é uma estratégia bastante bem sucedida que vamos passar a analisar.

Começamos a nossa análise pelo estudo dos sistema linear (4). A partir da compreensão das soluções desse sistema, em uma vizinhança da solução nula, iremos tentar transferir informações para as soluções do sistema não-linear associado (3).

Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e considere o sistema linear não-homogêneo

$$\dot{y} = A(t)y + h(t). \tag{5}$$

A propriedade característica básica de problemas da forma (5) é o chamado 'Princípio da Superposição' que estabelece o seguinte:

Dadas duas funções contínuas $h_1, h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *e soluções* ξ_1, ξ_2 *de* (5) *com* h *substituído por* h_1, h_2*, respectivamente, e* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$*, então* $\alpha_1\xi_1 + h_2\xi_2$ *é uma solução de* (5) *com* $\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2$ *em lugar de* h*.*

Considerando o caso $h_1 = h_2 = h$ e $\alpha_1 = -\alpha_2 = 1$ obtemos que a diferença de quaisquer duas soluções de (5) é uma solução de (4).

Desta forma, para encontrar todas as soluções de (5), basta encontrar todas as soluções do problema (4) e uma solução particular de (5).

Vamos mostrar que as soluções de (4) estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

Primeiramente note que $f(t,x) = A(t)x$ é uma função contínua e Lipschitz contínua na segunda variável. Note que, para $T > 0$ fixo, $\sup_{t\in[-T,T]} \|A(t)\| := M_T < \infty$. Além disso,

$$\frac{d}{dt}\|x\|^2 = 2\langle Ax, x\rangle \leq M_T\|x\|^2.$$

e, enquanto a solução existir,

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\|e^{\frac{M_T}{2}|t-t_0|}$$

Isto mostra que a solução não explode em tempo finito e, consequentemente, deve existir para todo tempo.

Vamos mostrar, teoricamente, como obter todas as soluções de (4) e, a partir dessas, como obter uma solução particular de (5).

Definição

Diremos que uma função $\mathbb{R} \ni t \mapsto X(t) \in M_{n\times n}$ *é uma* **matriz de soluções** *de* (4) *se cada coluna satisfaz* (4) *e que é uma* **matriz fundamental de soluções** *se é uma matriz de soluções e* $\det X(t) \neq 0$*, para algum* $t \in \mathbb{R}$*. Uma* **matriz principal de soluções** *de* (4) *no instante inicial* t_0 *é uma matriz fundamental de soluções tal que* $X(t_0) = I$*.*

Lema

Se $\mathbb{R} \ni t \mapsto X(t) \in M_{n\times n}$ *é uma matriz de soluções de* (4) *então, ou* $\det X(t) \neq 0$, *para todo* t, *ou* $\det X(t) = 0$, *para todo* t.

Prova: Se existe t_0 tal que $\det X(t_0) = 0$ então, existe $\mathbb{R}^n \ni c \neq 0$ tal que $X(t_0)c = 0$. Como $t \mapsto X(t)c$ é uma solução de (4) que passa por 0, no instante t_0, segue da unicidade de soluções que $X(t)c = 0$ para todo t. Disto segue que $\det X(t) = 0$, para todo t.

Segue que, para encontrar uma matriz fundamental de soluções, basta escolher uma n-upla de vetores linearmente dependentes em $\mathbb{R}^n$ e tomar as soluções que passam por eles no instante inicial.

Lema

Se $X(t)$ é uma matriz fundamental de soluções para (4) então, qualquer solução de (4) é da forma $t \mapsto X(t)c$, para algum $c \in \mathbb{R}^n$.

Prova: Basta ver que, dado $t_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tomando $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $X(t_0)c = x_0$ temos que $t \mapsto X(t)c$ is the solution of (4) que passa por x_0 no instante t_0.

Lema

Se $X(t)$ é uma matriz fundamental de soluções para (4) então, $Y(t) := X(t)^{-1}$ é uma **matriz fundamental de soluções** *para a* **equação adjunta**

$$\dot{y} = -yA(t) \tag{6}$$

Prova: Como $YX = I$ segue que $\dot{Y}X + YAX = 0$ e $\dot{Y} = -YA$ e cada linha de Y é uma solução de (6).

Fórmula de Variação das Constantes

Teorema (Fórmula de Variação das Constantes)

Se X é uma matriz fundamental de soluções de (4) *então, toda solução de* (5) *é dada pela fórmula*

$$x(t) = X(t)\left[X^{-1}(\tau)x(\tau) + \int_\tau^t X^{-1}(s)h(s)ds\right]. \tag{7}$$

Além disso, toda solução de (5) *está definida para todo t (ou no mesmo intervalo de definição de h).*

Prova: Note que $\frac{d}{ds}[X^{-1}(s)x(s)] = X^{-1}(s)h(s)$ e o resultado segue integrando de τ até t. Podemos mostrar que toda solução está definida para todo t mostrando que a expressão do lado direto de (7) tem norma limitada em intervalos limitados.

Lema

Se $X(t)$ é uma matriz fundamental de soluções para (4) então,

$$\det X(t) = [\det X(t_0)]\, e^{\displaystyle\int_{t_0}^{t} [\operatorname{tr} A(s)] ds} \tag{8}$$

onde $\operatorname{tr} A(t)$ é o traço de $A(t)$.

Prova: Derivando o determinante obtemos que.

$$\frac{d}{dt}\det X(t) = [\operatorname{tr} A(t)]\det X(t)$$

e o resultado segue. De fato:

$$\frac{d}{dt}\det X(t) = \begin{vmatrix} \dot{x}_{11} & \dot{x}_{12} & \cdots & \dot{x}_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{j1} & x_{j2} & \cdots & x_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ \dot{x}_{21} & \dot{x}_{22} & \cdots & \dot{x}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{j1} & x_{j2} & \cdots & x_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{x}_{j1} & \dot{x}_{j2} & \cdots & \dot{x}_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{j1} & x_{j2} & \cdots & x_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{x}_{n1} & \dot{x}_{n2} & \cdots & \dot{x}_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
\frac{d}{dt}\det X(t) = \begin{vmatrix}
\sum_{k=1}^{n} a_{1k}x_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}x_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}x_{kn} \\
x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_{j1} & x_{j2} & \cdots & x_{jn} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
+ \begin{vmatrix}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\
\sum_{k=1}^{n} a_{2k}x_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}x_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}x_{kn} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_{j1} & x_{j2} & \cdots & x_{jn} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
+\cdots+\begin{vmatrix}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\
x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_{kn} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
+\cdots+\begin{vmatrix}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\
x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_{j1} & x_{j2} & \cdots & x_{jn} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\sum_{k=1}^{n} a_{nk}x_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}x_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}x_{kn}
\end{vmatrix}
$$

Das propriedades de determinante

$$\frac{d}{dt}\mathrm{det}X(t) = [\mathrm{tr}A(t)]\mathrm{det}X(t).$$

Note que, a equação acima pode ser re-escrita na forma

$$\frac{d}{ds}[\mathrm{det}X(s)e^{-\int_{t_0}^{s}[\mathrm{tr}A(u)]du}] = 0.$$

Integrando de t_0 até t obtemos o resultado.