SMA 136 - Teoria Qualitativa de EDO
Segunda Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

09 de Agosto de 2019

Continuidade e continuação

Seja $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $(s, x_s) \in D$. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x) \\ x(s) &= x_s \end{aligned} \tag{1}$$

onde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função continua e localmente Lipschitz contínua na segunda variável. Nestas condições, vale o seguinte resultado:

Teorema

Dado $(s,x_s)\in D$*, existe* $\tau>s$ *e função continuamente diferenciável* $\xi:[s,\tau)\to\mathbb{R}^n$ *tal que* $\xi(s)=x_s$*,* $(t,\xi(t))\in D$ *e* $\dot{\xi}(t)=f(t,\xi(t))$*,* $\forall\, t\in(s,\tau)$*. Esta função é chamada uma solução do problema de valor inicial* (1) *e tem as seguintes propriedades*

- *Se existe* $\sigma>s$ *e função continuamente diferenciável* $\eta:[s,\sigma)\to\mathbb{R}^n$ *tal que* $\eta(s)=x_s$*,* $(t,\eta(t))\in D$ *e* $\dot{\eta}(t)=f(t,\eta(t))$*,* $\forall\, t\in(s,\sigma)$*, então* $\xi(t)=\eta(t)$ *para todo* $t\in[0,\min\{\sigma,\tau\})$
- *Existe* $\tau(s,x_s)>s$ *e solução* $[s,\tau(s,x_s))\ni t\mapsto x(t,s,x_s)\in\mathbb{R}^n$ *de* (1) *tal que* $\lim_{t\to\tau(s,x_s)}\mathrm{dist}((t,x(t,s,x_s),\partial D)=0$*.*
- *Se* $E=\{(t,s,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n : s\leqslant t<\tau(s,x)\}$*, a função* $E\ni(t,s,x_s)\mapsto x(t,s,x_s)\in\mathbb{R}^n$ *é contínua.*

Primeira Afirmativa

A primeira afirmativa do teorema é uma conseqüência imediata da unicidade de soluções.

Segunda Afirmativa

Tendo concluída a prova da primeira afirmativa do teorema definimos o tempo máximo de existência $\tau(x, x_s)$ tomando o extremo direito do intervalo dado pela união de todos os intervalos de definição das soluções que passam por x_s no instante s.

Para concluir que $\lim_{t\to\tau(s,x_s)} \mathrm{dist}((t, x(t, s, x_s)), \partial D) = 0$ note que, o significado desta convergência é que $(t, x(t, s, x_s))$ deixa qualquer compacto contido em D.

Agora, se $K \subset D$ é um compacto contido em D então podemos escolher D', no Teorema de Picard, de modo que f seja limitada em D' ($\sup_{(t,x)\in D'} \|f(t,x\|_{\mathbb{R}^n} \leq A$ e exista $d > 0$ tal que, para todo $(t_0, x_0) \in K$, $R = [t_0 - d, t_0 + d] \times B_{dA}(x_0)^- \subset D'$ e $Ld < 1$ (L sendo a constante de Lipschitz na segunda variável de f em D'.

Isto assegura que a solução que começa em x_0 no instante t_0 para existe pelo menos até $t_0 + d$, para todo $(t_0, x_0) \in K$.

Consequentemente, não pode existir uma seqüência $t_n \to \tau(s, x_s)$ com $(t_n, x(t_n, s, x_s)) \in K$.

Terceira Afirmativa

Resta provar a continuidade e, para este fim, vamos precisar do lema apresentado a seguir, conhecido como Lema de Gronwall.

Lema (Gronwall)

Sejam ϕ, α *e* β *funções contínuas de* $[a, b]$ *em* $\mathbb{R}$, *com* $\beta(t) \geq 0$ *para todo* $t \in [a, b]$. *Se*

$$\phi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\phi(s)ds, \quad t \in [a, b],$$

então

$$\phi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)\alpha(s)\left(e^{\int_s^t \beta(u)du}\right) ds, \quad t \in [a, b].$$

Se α *é continuamente diferenciável e crescente, então*

$$\phi(t) \leq \alpha(t)e^{\int_a^t \beta(s)ds}, \quad t \in [a, b].$$

Para $(t_0, x_0) \in D$, denote por $x(\cdot, t_0, x_0)$ a solução que passa por x_0 no instante t_0.

Se $(t_0, x_0), (t_0, y_0) \in D$ e $\tau > t_0$ é tal que $x(\cdot, t_0, x_0)$ e $x(\cdot, t_0, y_0)$ estão definidas em $[t_0, \tau]$. Então,

$$\begin{aligned}\|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, y_0)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|x_0 - y_0\|_{\mathbb{R}^n} \\ + \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s, t_0, x_0)) - f(s, x(s, t_0, x_0))\|_{\mathbb{R}^n} ds \\ \leq \|x_0 - y_0\|_{\mathbb{R}^n} + L \int_{t_0}^{t} \|x(s, t_0, x_0) - x(s, t_0, x_0)\|_{\mathbb{R}^n} ds\end{aligned}$$

e, usando o Lema de Gronwall,

$$\|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, y_0)\|_{\mathbb{R}^n} \leq e^{L|t-t_0|} \|x_0 - y_0\|_{\mathbb{R}^n},$$

e temos a continuidade (Lipschitz) relativamente ao dado inicial.

Corolário

Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *uma função contínua que é localmente Lipschitz contínua na segunda variável. Então ou*

- $\tau(t_0, x_0)) < \infty$ *e* $\lim_{t \to \tau(t_0,x_0))} \|x(t, t_0, x_0)\| = \infty$ *ou*
- $\tau(t_0, x_0) = \infty.$

Suponha que existe uma constante $M > 0$ *tal que*

$$f(t,x)\cdot x < 0, \text{ sempre que } \|x\| \geqslant M, \quad \text{e para todo } t \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

Então, se $x(t,s,x_s)$ *é a solução de* (1),

$$\frac{d}{dt}\|x\|^2 = 2f(t,x)\cdot x.$$

Segue de (2) *que e do Corolário anterior que* $\tau(s,x_s) = \infty$ *para todo* $s \in \mathbb{R}$ *e* $x_s \in \mathbb{R}^n$.

Nestas condições defina $S(t,s):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $t\geqslant s$, *por*

$$S(t,s)x_s = x(t,s,x_s),\ \ x_s\in\mathbb{R}^n.$$

É claro que $i) S(t,t) = I_{\mathbb{R}^n}$. *Mostremos que,* $ii)$ *para todo* $t\geq\sigma\geq s$, $S(t,\sigma)\circ S(\sigma,s) = S(t,s)$. *Esta condição segue da unicidade de soluções para* (1) *dada na primeira parte do teorema anterior observando-se que* $x(t,\sigma,x(\sigma,s,x_s))$ *e* $x(t,s,x_s)$ *são ambas soluções de*

$$\begin{aligned}&\dot{x} = f(t,x)\\&x(\sigma) = x(\sigma,s,x_s)\in\mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Se $f(t,x) = g(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$; isto é, f não depende de t, então $t \mapsto x(t+\tau,\tau,x_s)$ e $t \mapsto x(t+\sigma,\sigma,x_s)$ são ambas soluções de

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(x) \\ x(0) &= x_s \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Isto mostra que $S(t+\tau,\tau) = S(t+\sigma,\sigma)$ para todo $\sigma \in \mathbb{R}$ e para todo $t \geq 0$. Logo $S(t,s) = S(t-s,0)$ e, neste caso, $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ definido por $T(t)x_0 = x(t,0,x_0)$ tem as seguintes propriedades $i) T(0) = I_{\mathbb{R}^n}$ e $ii) T(t+s) = T(t) \circ T(s)$.

Segue da terceira parte do teorema anterior que

$$\{(t,s,x) : t \geq s \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n\} \ni (t,s,x) \mapsto S(t,s)x \in \mathbb{R}^n$$

é contínua e (quando f é independente de t) que

$$[0,\infty) \times \mathbb{R}^n \ni (t,x) \mapsto T(t)x \in \mathbb{R}^n$$

é contínua.