SMA 136 - Teoria Qualitativa de EDO
Segunda Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

06 de Agosto de 2019

O Teorema de Arzelá-Ascoli e o Teorema de Peano

Seja (X, ρ) um espaço métrico compacto. O espaço métrico das funções contínuas $f : X \to \mathbb{R}^n$ com a métrica

$$\rho(f, g) = \max\{\|f(x) - g(x)\|_{\mathbb{R}^n} : x \in X\}$$

é um espaço métrico completo (exercício) que denotamos por $C(X)$ ou $C(X, \mathbb{R}^n)$.

Uma coleção $\mathcal{F}$ de funções é dita *uniformemente limitada* se existe $M > 0$ tal que

$$\|f(x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq M, \quad \forall x \in X \text{ e } \forall f \in \mathcal{F}.$$

Uma família $\mathcal{F}$ de funções em $C(X)$ é chamada *equicontínua* se dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - f(x')\|_{\mathbb{R}^n} < \epsilon$, $\forall x, x' \in X$ com $\rho(x', x) < \delta$ e $\forall f \in \mathcal{F}$.

Teorema (Arzelá-Ascoli)

Se (X,ρ) é um espaço métrico compacto, um subconjunto $\mathcal{F}$ de $C(X)$ é relativamente compacto se, e somente se, é uniformemente limitado e equicontínuo.

Prova: Suponha que $\mathcal{F}$ seja relativamente compacto. Então $\mathcal{F}$ é totalmente limitado e portanto uniformemente limitado. Seja $\epsilon > 0$ e $f_1,\dots,f_n$ tais que $\mathcal{F} \subset \cup_{i=1}^n B_{\frac{\epsilon}{3}}(f_i)$. Seja $f \in \mathcal{F}$ e $x, x' \in X$. Para cada $i = 1,2,\dots,n$

$$\|f(x)-f(x')\|_{\mathbb{R}^n} \le \|f(x)-f_i(x)\|_{\mathbb{R}^n}+\|f_i(x)-f_i(x')\|_{\mathbb{R}^n}+\|f_i(x')-f(x')\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Escolha $1 \le j \le n$ tal que

$$\sup_{x\in X} \|f(x) - f_j(x)\|_{\mathbb{R}^n} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Então

$$\|f(x) - f(x')\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{2\epsilon}{3} + \|f_j(x) - f_j(x')\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Como X é compacto, $f_1, \ldots, f_n$ são uniformemente contínuas (exercício). Logo, existe $\delta > 0$ tal que $\rho(x, x') < \delta$ implica

$$\|f_i(x) - f_i(x')\|_{\mathbb{R}^n} < \frac{\epsilon}{3}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Segue que, se $\rho(x, x') < \delta$ então

$$\|f(x) - f(x')\|_{\mathbb{R}^n} < \epsilon, \quad \forall f \in \mathcal{F},$$

e $\mathcal{F}$ é equicontínuo.

Reciprocamente, suponha que $\mathcal{F}$ é uniformemente limitado e equicontínuo. Seja M é um inteiro tal que

$$\|f(x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq M, \quad \forall x \in X \text{ e } \forall f \in \mathcal{F}$$

e $\epsilon > 0$. Escolha $\delta > 0$ tal que $\rho(x, x') < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x')\|_{\mathbb{R}^n} < \frac{\epsilon}{4}$, $\forall f \in \mathcal{F}$. Como X é compacto existem $x_1, \ldots, x_p$ tais que $X \subset \cup_{i=1}^{p} B_\delta(x_i)$. Escolha um número inteiro positivo m tal que $\frac{\sqrt{n}}{m} < \frac{\epsilon}{4}$ e divida $[-M, M]^n$ em $(2Mm)^n$ hipercubos de lado $\frac{1}{m}$ e sejam

$$\mathcal{Y} = \{y_j : 1 \leqslant j \leqslant (2M(m+1))^n\}$$

os vértices desses hipercubos.

Considere as p-uplas $(y_{i_1}, \ldots, y_{i_p})$ de vetores de $\mathcal{Y}$, tais que para algum $f \in \mathcal{F}$

$$\|f(x_j) - y_{i_j}\|_{\mathbb{R}^n} < \frac{\epsilon}{4}, \quad 1 \leq j \leq p$$

e escolha um tal $f \in \mathcal{F}$ para cada $p-$upla.

Se $\mathcal{E}$ é o conjunto resultante dessa escolha, $\mathcal{E}$ é finito.

Mostremos que $\mathcal{F} \subset \cup_{f \in \mathcal{E}} B_\epsilon(f)$. Se $f \in \mathcal{F}$ escolha $y_{i_1}, \ldots, y_{ip}$ tal que

$$\|f(x_j) - y_{i_j}\|_{\mathbb{R}^n} < \frac{\epsilon}{4}, \quad 1 \leq j \leq p,$$

e $e \in \mathcal{E}$ tal que

$$\|e(x_j) - y_{i_j}\|_{\mathbb{R}^n} < \frac{\epsilon}{4}, \quad 1 \leq j \leq p.$$

Para cada $x \in X$ seja $1 \leqslant j \leqslant p$ tal que $\rho(x, x_j) < \delta$. Então

$$\begin{aligned}\|f(x) - e(x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|f(x) - f(x_j)\|_{\mathbb{R}^n} + \|f(x_j) - y_{i_j}\|_{\mathbb{R}^n} \\ + \|y_{i_j} - e(x_j)\|_{\mathbb{R}^n} + \|e(x_j) - e(x)\|_{\mathbb{R}^n} < \epsilon.\end{aligned}$$

Logo

$$\sup_{x \in X} \|f(x) - e(x)\|_{\mathbb{R}^n} < \epsilon. \square$$

Seja $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto e $f : D \to \mathbb{R}^n$ contínua.

Teorema (Peano)

Dado $(t_0, x_0) \in D$ a equação diferencial $\dot{x} = f(t,x)$ tem uma solução local passando por x_0 no instante t_0.

Prova: Seja $(t_0, x_0) \in D' \subset D$ aberto tal que f é limitada em D' e seja A tal que $\|f(t,x)\| \leq A$ para todo $(t,x) \in D'$. Seja $a > 0$ tal que $R = [t_0 - a, t_0 + a] \times B_{aA}(x_0)^- \subset D'$.

Como f é uniformemente contínua em R, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, $(t,x),(t',x') \in R$, $|t - t'| < \delta$ e $\|x - x'\| < \delta \Rightarrow \|f(t,x) - f(t',x')\| < \epsilon$. Fixemos ϵ e seja $\delta > 0$ dado acima.

Seja $t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t_0 + a$ uma partição do intervalo $[t_0, t_0 + a]$ tal que $|t_i - t_{i-1}| < \min(\delta, \frac{\delta}{A})$, $1 \leq i \leq n$ e $\phi_\epsilon : [t_0, t_0 + a] \to R$ definida por:

- ϕ_ϵ é contínua.
- $\phi_\epsilon(t_0) = x_0$ e se , em $[t_0, t_1]$ seja ϕ_ϵ linear com direção $f(t_0, x_0)$, então $\phi_\epsilon(t_1) \in R$.
- Em $[t_1, t_2]$, seja ϕ_ϵ linear com direção $f(t_1, \phi_\epsilon(t_1))$.
- Prosseguindo desta forma construímos $\phi_\epsilon(t)$ em $B_{aA}(x_0)^-$, $t \in [t_0, t_0 + a]$.

Como a direção de ϕ_ϵ é $f(t_i, \phi_\epsilon(t_i))$ para $t, t' \in [t_i, t_{i+1}]$ temos que

$$\|\phi_\epsilon(t) - \phi_\epsilon(t')\| \leq A|t - t'|.$$

Logo, $\{\phi_\epsilon : 0 < \epsilon \leq 1\} \subset C[t_0, t_0 + a]$ é uma família equicontínua.

Se $t \in [t_0, t_0 + a]$, $t \neq t_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, então $t_{j-1} < t < t_j$ para algum j e

$$\|\phi_\epsilon(t) - \phi_\epsilon(t_{j-1})\| < A|t - t_{j-1}| < A\frac{\delta}{A} = \delta.$$

Isto implica que

$$\|f(t_{j-1}, \phi_\epsilon(t_{j-1})) - f(t, \phi_\epsilon(t))\| < \epsilon, \quad t_{j-1} < t < t_j.$$

Mas $\frac{d}{dt}\phi_\epsilon$ existe exceto para um número finito de pontos e portanto

$$\frac{d}{dt}\phi_\epsilon(t) = f(t_{j-1}, \phi_\epsilon(t_{j-1})).$$

Segue que

$$\|\frac{d}{dt}\phi_\epsilon(t) - f(t,\phi_\epsilon(t))\| < \epsilon, \quad t \in [t_0, t_0+a],\ t \neq t_i,\ 0 \leq i \leq n.$$

Agora escrevemos

$$\phi_\epsilon(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \{f(s,\phi_\epsilon(s)) + [\frac{d}{ds}\phi_\epsilon(s) - f(s,\phi_\epsilon(s))]\} ds. \quad (1)$$

Se $\{\epsilon_n\}$ é uma seqüência de números reais positivos que converge para zero, $\{\phi_{\epsilon_n}\}$ é limitada e equicontínua. Do Teorema de Arzelá-Ascoli (Teorema 1) esta seqüência tem uma subseqüência uniformemente convergente com limite ϕ. Segue de (1) que

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s)) ds.$$

Logo ϕ é uma solução de $\dot{x} = f(t, x)$ passando por x_0 no instante t_0 e definida em $[t_0, t_0 + a]$. Um argumento semelhante pode ser aplicado para $[t_0 - a, a]$. $\square$