SMA 136 - Teoria Qualitativa de EDO
Segunda Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

06 de Agosto de 2019

O Teorema de Picard

Seja $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto conexo e $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e tal que

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|, \quad \forall (t,x_i) \in D,\ i = 1,2.$$

Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = f(t,x). \tag{1}$$

Se $(t_0, x_0) \in D$, uma solução local de (1), que passa por x_0 no instante t_0, é uma função contínuamente diferenciável φ definida em um intervalo I, contendo t_0 em seu interior, tal que $\varphi(t_0) = x_0$, $(t, \varphi(t)) \in D$, $\forall t \in I$ e $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$, $\forall t \in I$.

Teorema (Picard)

Se f é como acima, para cada $(t_0, x_0) \in D$, a equação diferencial (1) possui uma única solução local que passa por x_0 no instante t_0.

Prova: É fácil ver que, $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ é uma solução local de (1) por (t_0, x_0) se, e somente se, φ é uma função contínua definida em um intervalo I contendo t_0 em seu interior satisfazendo $(t, \varphi(t)) \in D$, $\forall t \in I$ e

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds, \quad t \in I. \tag{2}$$

Seja $D' \subset D$ um aberto contendo (t_0, x_0) tal que f é limitada em D'; isto é, $\|f(t,x)\| \leq A$, $\forall (t,x) \in D'$.
Seja $d > 0$ tal que

- $R = [t_0 - d, t_0 + d] \times B_{dA}(x_0)^- \subset D'$
- $Ld < 1$.

Se $I =: [t_0 - d, t_0 + d]$ definimos

$$\mathcal{B} := \{\psi : I \to \mathbb{R}^n : \psi \text{ é contínua, } \psi(t_0) = x_0 \text{ e } \|\psi(t) - x_0\| \leq dA, \ \forall t \in I\}.$$

Então $\mathcal{B}$ é um subconjunto fechado de $C(I,\mathbb{R}^n)$ e portanto um subespaço métrico completo. Seja $T:\mathcal{B}\to C(I,\mathbb{R}^n)$ definida por

$$(T\psi)(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\psi(s))ds, \quad t\in I,\ \psi\in\mathcal{B}. \qquad (3)$$

Mostremos que $T(\mathcal{B})\subset\mathcal{B}$ e que T é uma contração.
De fato: Se $\psi\in\mathcal{B}$ então $T\psi$ é contínua, $(T\psi)(t_0)=(x_0)$ e

$$\|(T\psi)(t)-x_0\|\leq\left|\int_{t_0}^{t}\|f(s,\psi(s))\|dt\right|\leq dA, \quad \forall t\in I,$$

mostrando que $T(\mathcal{B})\subset\mathcal{B}$.

Ainda, para $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{B}$ temos que, $\forall t \in I$,

$$\|(T\psi_1)(t) - (T\psi_2)(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, \psi_1(s)) - f(s, \psi_2(s))\| ds \right|$$

$$\leq L \left| \int_{t_0}^{t} \|\psi_1(s) - \psi_2(s)\| ds \right| \leq Ld\|\psi_1 - \psi_2\|_\infty,$$

mostrando que T é uma contração em $\mathcal{B}$. Segue do Princípio da Contração de Banach, que T tem um único ponto fixo e que (1) tem uma única solução por (t_0, x_0). $\square$

Espaços Métricos Compactos

Seja (X,ρ) um espaço métrico. Se $x \in X$ e $E, F \subset X$ definimos

$$\begin{aligned}
&\rho(x,E) := \inf\{\rho(x,y) : y \in E\} = \text{distância de } x \text{ a } E.\\
&\rho(E,F) := \inf\{\rho(z,y) : z \in E,\ \ y \in F\} = \text{distância de } E \text{ a } F.\\
&\mathrm{diam} E := \sup\{\rho(z,y) : z, y \in E\} = \text{diâmetro de } E.
\end{aligned}$$

Já vimos que $x \in E^-$ se e somente se $\rho(x,E) = 0$. Diremos que $E \subset X$ é limitado se $\mathrm{diam} E < \infty$.

- Dado um subconjunto E de X, diremos que uma família $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$, de subconjuntos de X, é uma cobertura de E se $E \subset \cup_{\alpha\in A} V_\alpha$.

- Diremos que $E \subset X$ é totalmente limitado se, para cada $\epsilon > 0$, pode ser coberto por um número finito de bolas de raio ϵ.

- É claro que todo conjunto totalmete E limitado é limitado, mas não é verdade, em geral, que todo conjunto limitado é totalmente limitado.

- Também é claro que se E é totalmente limitado então E^- é totalmente limitado.

Teorema

Se E é um subconjunto de um espaço métrico (X, ρ), as seguintes afirmativas são equivalentes:

a) *E é completo e totalmente limitado*

b) **(A propriedade de Bolzano-Weierstrass)** *Toda seqüência em E tem uma subseqüência que converge para um ponto de E.*

c) **(A propriedade de Heine-Borel)** *Se $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma cobertura de E por abertos de (X, ρ), existe um conjunto finito $F \subset A$ tal que $\{V_\alpha\}_{\alpha \in F}$ cobre E.*

Proof: Mostremos que $a) \iff b)$, $a)$ e $b) \Rightarrow c)$ e que $c) \Rightarrow b)$.

$a) \Rightarrow b)$: Se a) vale e $\{x_n\}$ é uma seqüência em E. E pode ser coberto por um número finito de bolas de raio $\frac{1}{2}$. Pelo menos uma dessas bolas, denotada por B_1, deve conter x_n para um número infinito N_1 de índices.

$E \cap B_1$ pode ser coberto por um número finito de bolas de raio $\frac{1}{2^2}$. Uma dessas bolas, denotada por B_2, contém x_n para um número infinito N_2 de índices.

Continuando indutivamente obtemos uma seqüência de bolas B_j de raio $\frac{1}{2^j}$ e uma seqüência decrescente de subconjuntos infinitos N_j de $\mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_j$ para $n \in N_j$.

Escolha $n_j \in N_j$, $j \in \mathbb{N}$, tal que $n_j < n_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Então $\{x_{n_j}\}$ é uma seqüência de Cauchy pois $\rho(x_{n_j}, x_{n_k}) < \frac{2}{2^j}$ se $k > j$, como E é completo esta seqüência é convergente com limite em E.

$b) \Rightarrow a)$: Mostraremos que se qualquer das condições em a) falha então b) falha.

Se E não é completo, existe uma seqüência de Cauchy $\{x_n\}$ em E que não converge para um elemento de E. Segue que, nenhuma subseqüência de $\{x_n\}$ pode convergir em E pois caso contrário a seqüência seria convergente com o mesmo limite.

Se E não é totalmente limitado, seja $\epsilon > 0$ tal que E não pode ser coberto por um número finito de bolas de raio ϵ e escolha $x_n \in E$, indutivamente, da seguinte maneira. Tendo escolhido $x_1, \dots, x_n$, escolha $x_{n+1} \in E \setminus \cup_{i=1}^{n} B_\epsilon(x_i)$. Logo $\rho(x_n, x_m) \geq \epsilon$, $\forall\ m, n \in \mathbb{N}$, e $\{x_n\}$ não tem subseqüência convergente.

a) e b) $\Rightarrow$ c): É suficiente mostrar que se b) vale e $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma cobertura de E por conjuntos abertos, existe $\epsilon > 0$ tal que toda bola de raio ϵ que intersepta E está contida em algum V_α, já que E pode ser coberto por um número finito de tais bolas de a).

Suponha que não; isto é, que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma bola B_n de raio $1/2^n$ tal que $B_n \cap E \neq \emptyset$ e B_n não está contida em nenhum V_α. Escolha $x_n \in B_n \cap E$.

Passando para uma subseqüência podemos assumir que $\{x_n\}$ é convergente para algum $x \in E$. Temos que $x \in V_\alpha$ para algum $\alpha \in A$ e como V_α é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset V_\alpha$.

Mas se n é suficientemente grande tal que $\rho(x_n, x) < \epsilon/3$ e $2^{-n} < \epsilon/3$, então $B_n \subset B_\epsilon(x) \subset V_\alpha$ contradizendo a escolha de B_n.

$c) \Rightarrow b)$: Se $\{x_n\}$ é uma seqüência sem subseqüência convergente, para cada $x \in E$ existe uma bola B_x centrada em x que contém x_n no máximo para um número finito de índices n (caso contrário haveria uma subseqüência que converge para x). Então $\{B_x\}_{x\in E}$ é uma cobertura de E por abertos sem subcobertura finita. $\square$

Definição (Compacto)

Em um espaço métrico (X,ρ), um conjunto $E \subset X$ é dito compacto se tem as propriedades a) - c) do teorema anterior e é dito relativamente compacto se E^- é compacto.

Todo conjunto compacto é fechado e limitado, a recíproca em geral é falsa mas é verdadeira em $\mathbb{R}^n$ como mostra a proposição abaixo.

Exercício

Todo subconjunto fechado e limitado de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ *é compacto*

Prova: Como subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$ são completos, é suficiente mostrar que subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^n$ são totalmente limitados.

Como cada subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ está contido em algum cubo da forma

$$Q = [-R, R]^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \max(|x_1|, \ldots, |x_n|) \leq R\},$$

é suficiente mostrar que Q é totalmente limitado.

Dado $\epsilon > 0$, escolha um inteiro $k > R\sqrt{n}/\epsilon$ e expresse Q como a união de k^n cubos congruentes dividindo o intevalo $[-R, R]$ em k intervalos iguais.

O comprimento do lado desses subcubos é $2R/k$ e portanto o seu diâmetro é $\sqrt{n}(2R/k) < 2\epsilon$. Desta forma, cada um desses subcubos está contido na bola de raio ϵ com centro coincidente com o centro do cubo. Isto completa a demonstração.$\square$