SMA 136 - Teoria Qualitativa de EDO
Primeira Aula

Alexandre Nolasco de Carvalho

30 de Julho de 2019

Apresentação

- Conteúdo da Disciplina
- Finalidade e Objetivos da Disciplina
- Bibliografia
- Horário e Local das Aulas

Espaços Métricos: Definições e Propriedades Elementares

Seja X um conjunto não vazio. Uma função $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ satisfazendo

- $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, para todo $x, y \in X$,
- $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$, para todo $x, y, z \in X$.

é chamada uma *métrica* em X. Um *espaço métrico* consiste de um conjunto X e uma métrica ρ em X. Escreveremos (X, ρ) para indicar o espaço métrico consistindo do conjunto X e da métrica ρ.

Exemplos:

- Se X é um conjunto não vazio qualquer definimos $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ por

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq y \\ 0, & \text{se } x = y. \end{cases}$$

A função ρ é uma métrica chamada *métrica discreta* e (X, ρ) é um espaço métrico.

- Se $(\mathbb{R}^n, \rho_p)$, com $\rho_p(x,y) := \|x-y\|_p$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, e

$$\|\xi\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,\ 1 \leq p < \infty,$$

$$\|\xi\|_\infty = \sup\{|\xi_i| : 1 \leq i \leq n\}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Então $(\mathbb{R}^n, \rho_p)$ é um espaço métrico, $1 \leq p \leq \infty$.

- Seja

$$\ell_p = \{x = \{x_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} (\text{ou } \mathbb{C}^{\mathbb{N}}) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}, \quad 1 \leq p < \infty, \text{ e}$$

$$\ell_\infty = \{x = \{x_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} (\text{ou } \mathbb{C}^{\mathbb{N}}) : \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\}.$$

Em ℓ_p, definimos

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ se } 1 \leq p < \infty \text{ e } \|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Se $\rho_p : \ell_p \times \ell_p \to [0, \infty)$ é definida por $\rho_p(x, y) = \|x - y\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, então (ℓ_p, ρ_p) é um espaço métrico.

- $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ com a *métrica da convergência uniforme* $\rho(x, y) = \|x - y\|_\infty$, $x, y \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$, e $\|\xi\|_\infty = \sup\{|\xi(t)| : t \in [a, b]\}$ para todo $\xi \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$.

Se (X, ρ) é um espaço métrico temos que:

- $B_r(x) := \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$, $x \in X$, $r > 0$ é chamado bola aberta de centro em x e raio r.
- Um conjunto $E \subset X$ é dito aberto em (X, ρ) se para cada $x \in E$ existe $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x) \subset E$.
- Um conjunto $F \subset X$ é dito fechado em (X, ρ) se F^c (complementar de F) é aberto em (X, ρ).

É fácil provar que

- A união (interseção) qualquer de conjuntos abertos (fechados) em (X, ρ) é um conjunto aberto (fechado) em (X, ρ).
- A interseção (união) finita de conjuntos abertos (fechados) em (X, ρ) é um conjunto aberto (fechado) em (X, ρ).

Definimos então

- O *interior* E^o de um conjunto $E \subset X$ é a união de todos os abertos de (X, ρ) contidos em E.
- O *fecho* E^- de um conjunto $E \subset X$ é a interseção de todos os fechados de (X, ρ) contendo E. É claro que E é fechado se e somente se $E = E^-$.
- Um conjunto $E \subset X$ é dito *denso* em X se $E^- = X$ e *nunca denso* se $E^o = \emptyset$.
- Uma seqüência $\{x_n\}$ em (X, ρ) converge para $x \in X$ se $\rho(x_n, x) \to 0$ quando $n \to \infty$.

Proposição

Se $E \subset X$ temos que, $x \in E^{-}$ se, e somente se, qualquer bola aberta centrada em x intersepta E se, e somente se, existe uma seqüência $\{x_n\}$ de elementos de E que converge para x.

Prova: Se existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset E^c$ então $x \in E^{co}$ e como E^{coc} é fechado e contém E temos que $x \notin E^-$. Segue que, se $x \in E^-$, então $B_r(x) \cap E \neq \emptyset$. Se $B_r(x) \cap E \neq \emptyset$ para todo $r > 0$, então ou $x \in E$ e podemos tomar $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou $x \notin E$ e tomamos $x_n \in B_{1/n}(x) \cap E$, $x_n \neq x$, em ambos os casos $\{x_n\}$ converge para x. Se existe uma seqüência $\{x_n\}$ de elementos de E que converge para x e $x \notin E^-$ então existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset E^{-c}$ e portanto $x_n \in E^{-c}$ para n suficientemente grande o que é um absurdo. Segue que $x \in E^-$.$\square$

Se (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) são espaços métricos, uma função $f : X_1 \to X_2$ é contínua em $x \in X_1$ se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\rho_2(f(y), f(x)) < \epsilon$ sempre que $\rho_1(y, x) < \delta$.

Dito de outra forma f é contínua em $x \in X_1$ se, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f^{-1}(B_\epsilon(f(x))) \supset B_\delta(x)$.

Diremos simplesmente que f é contínua quando f é contínua para todo $x \in X_1$ e uniformemente contínua se a escolha de δ depende somente de ϵ e não de $x \in X_1$.

Proposição

Sejam (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) *espaços métricos. Uma função* $f : X_1 \to X_2$ *é contínua se e somente se imagem inversa* $f^{-1}(U)$ *de qualquer conjunto aberto* U *de* (X_2, ρ_2) *é um conjunto aberto de* (X_1, ρ_1)*.*

Prova: Se f é contínua, U é um aberto de X_2, $y \in f^{-1}(U)$ e $\epsilon > 0$ é tal que $B_\epsilon(f(y)) \subset U$ existe $\delta > 0$ tal que $f^{-1}(B_\epsilon(f(y)) \supset B_\delta(y)$. Logo y é interior a $f^{-1}(U)$. Isto mostra que $f^{-1}(U)$ é aberto. Por outro lado, se $f^{-1}(U)$ é aberto em (X_1, ρ_1) sempre que U é aberto em (X_2, ρ_2), $x \in X_1$ e $\epsilon > 0$, temos que $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ é aberto e contém x. Segue que existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ e f é contínua em x. Logo f é contínua para todo $x \in X_1$. $\square$

Seja (X, ρ) um espaço métrico. Uma seqüência $\{x_n\} \in X^{\mathbb{N}}$ é dita uma *seqüência de Cauchy* se $\rho(x_n, x_m) \to 0$ quando $m, n \to \infty$. Um conjunto $E \subset X$ é dito *completo* se toda seqüência de Cauchy em E é convergente e seu limite pertence a E

Exemplos:

- (X, ρ) onde X é um conjunto não vazio e ρ é a métrica discreta em X.
- Em $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, $\mathbb{R}^n$ é completo enquanto que $\mathbb{Q}^n$ não é completo.
- $X = (0,1)$ com a métrica usual não é completo.
- A proposição a seguir mostra que $X = [0,1]$ com a métrica usual é completo.
- $C([a,b], \mathbb{R}^n)$ com a métrica da convergência uniforme é completo.
- ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$, é um espaço métrico completo.

Mostramos apenas que ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, é completo deixamos a verificação dos demais fatos como exercício.
Se $\{x^n\}$ é uma seqüência de Cauchy em ℓ_p, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^n - x_i^m|^p < \epsilon^p, \quad \forall m, n > N.$$

Segue que $\{x_i^n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e portanto convergente. Seja $x_i := \lim_{n\to\infty} x_i^n$. A seqüência $x = \{x_i\}$ é o candidato a limite da seqüência $\{x^n\}$.

Mostremos que isto de fato ocorre. Se $n > N$ e $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i - x_i^n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i^n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon + \|x^n\|_p.$$

Isto nos permite concluir que $x = \{x_i\} \in \ell_p$. Além disso, como para cada $k \in \mathbb{N}$ e $n > N$

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i - x_i^n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon$$

temos que $\|x^n - x\|_p \leq \epsilon$ para todo $n > N$. Segue que $x^n \to x$ em ℓ_p.

Proposição

Um subconjunto fechado de um espaço métrico completo é completo e um subconjunto completo de um espaço métrico qualquer é fechado.

Proof: Se (X, ρ) é um espaço métrico completo, $E \subset X$ é fechado e $\{x_n\}$ é uma seqüência de Cauchy em E temos que $\{x_n\}$ é convergente para algum $x \in X$. Pela Proposição 1 segue que $x \in E$ e E é completo.

Se por outro lado E é um subconjunto completo de um espaço métrico qualquer (X, ρ) e $x \in E^{-}$ temos pela Proposição 1 que existe uma seqüência $\{x_n\}$ em E que converge para x. Segue do fato que toda seqüência convergente é de Cauchy que $x \in E$. Isto mostra que E é fechado.$\square$

Seja (X, ρ) um espaço métrico completo. Uma aplicação $T : X \to X$ é chamada uma contração em X se existe κ, $0 < \kappa < 1$, tal que

$$\rho(Tx, Ty) \leq \kappa\rho(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Theorem (Princípio da Contração de Banach)

Se X é um espaço métrico completo e T é uma contração em X então T tem um único ponto fixo.

Prova: Vamos primeiramente provar que T tem no máximo um ponto fixo. Se x e y são pontos fixos de T, temos que

$$\rho(x, y) = \rho(Tx, Ty) \leq \kappa\rho(x, y)$$

e portanto $x = y$.
Vamos agora mostrar a existência. Seja $x \in X$ e considere a *órbita* de x

$$\{x, Tx, T^2x, \cdots\}.$$

Mostremos que $\{T^n x\}$ é uma seqüência de Cauchy. De fato:

$$\begin{aligned}\rho(T^{n+p}x, T^n x) &\leq \kappa\rho(T^{n+p-1}x, T^{n-1}x) \leq \cdots \leq \kappa^n\rho(T^p x, x)\\ &\leq \kappa^n[\rho(T^p x, T^{p-1}x) + \cdots + \rho(Tx, x)]\\ &\leq \kappa^n[\kappa^{p-1}\rho(Tx, x) + \cdots + \rho(Tx, x)]\\ &\leq \kappa^n[\kappa^{p-1} + \cdots + 1]\rho(Tx, x) \leq \tfrac{\kappa^n}{1-\kappa}\rho(Tx, x)\end{aligned}$$

e como $\kappa < 1$ temos que $\{T^n x\}$ é uma seqüência de Cauchy e portanto convergente para algum $x_0 \in X$. Mostremos que x_0 é um ponto fixo de T. De fato:

$$Tx_0 = T \lim_{n\to\infty} T^n x = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}x = x_0.$$

$\square$

O Teorema de Picard

Seja $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto conexo e $f : D \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq M|x_1 - x_2|, \quad \forall (t, x_i) \in D, \ i = 1, 2.$$

Assuma ainda que f é contínua.
Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{1}$$

Se $(t_0, x_0) \in D$, uma solução local de (1) passando por (t_0, x_0) é uma função contínuamente diferenciável φ definida em um intervalo I, contendo t_0 em seu interior, tal que $\varphi(t_0) = x_0$, $(t, \varphi(t)) \in D$, $\forall t \in I$ e $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$, $\forall t \in I$.

Theorem (Picard)

Se f é como acima, para cada $(t_0, x_0) \in D$, a equação diferencial (1) possui uma única solução local por (t_0, x_0).

Prova: É fácil ver que $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ é uma solução local de (1) por (t_0, x_0) se e somente se φ é uma função contínua definida em um intervalo I contendo t_0 em seu interior satisfazendo $(t, \varphi(t)) \in D$, $\forall t \in I$ e

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds, \quad t \in I. \tag{2}$$

Seja $D' \subset D$ um aberto contendo (t_0, x_0) tal que f é limitada em D'; isto é, $|f(t,x)| \leq A$, $\forall (t,x) \in D'$.
Seja $d > 0$ tal que

- $R = [t_0 - d, t_0 + d] \times B_{dA}(x_0)^{-} \subset D'$
- $Md < 1$.

Se $J =: [t_0 - d, t_0 + d]$ definimos

$$\mathcal{B} := \{\psi : J \to \mathbb{R}^n : \psi \text{ é contínua, } \psi(t_0) = x_0 \text{ e } |\psi(t) - x_0| \leq dA, \ \forall t \in J\}.$$

Então $\mathcal{B}$ é um subconjunto fechado de $C(J,\mathbb{R}^n)$ e portanto um subespaço métrico completo. Seja $T:\mathcal{B}\to C(J,\mathbb{R}^n)$ definida por

$$(T\psi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\psi(s))ds, \quad t\in J,\ \psi\in\mathcal{B}. \tag{3}$$

Mostremos que $T(\mathcal{B})\subset\mathcal{B}$ e que T é uma contração.
De fato: Se $\psi\in\mathcal{B}$ então $T\psi$ é contínua, $(T\psi)(t_0)=(x_0)$ e

$$|(T\psi)(t)-x_0| \leq \left|\int_{t_0}^{t} |f(s,\psi(s))|dt\right| \leq dA, \quad \forall t\in J,$$

mostrando que $T(\mathcal{B})\subset\mathcal{B}$.

Ainda, para $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{B}$ temos que, $\forall t \in J$,

$$|(T\psi_1)(t) - (T\psi_2)(t)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, \psi_1(s)) - f(s, \psi_2(s))| ds \right|$$

$$\leq M \left| \int_{t_0}^{t} |\psi_1(s) - \psi_2(s)| ds \right| \leq Md \|\psi_1 - \psi_2\|_\infty,$$

mostrando que T é uma contração em $\mathcal{B}$. Segue do Princípio da Contração de Banach, Teorema (1), que T tem um único ponto fixo e que (1) tem uma única solução por (t_0, x_0). $\square$

Espaços Métricos Compactos

Seja (X, ρ) um espaço métrico. Se $x \in X$ e $E, F \subset X$ definimos a distância $\rho(x, E)$ de x a E, a distância $\rho(E, F)$ de E a F e o diâmetro $\mathrm{diam}E$ de E por

$$\begin{aligned}
&\rho(x, E) := \inf\{\rho(x, y) : y \in E\}\\
&\rho(E, F) := \inf\{\rho(z, y) : z \in E, \ \ y \in F\}\\
&\mathrm{diam}E := \sup\{\rho(z, y) : z, y \in E\}.
\end{aligned}$$

Já vimos que $x \in E^-$ se e somente se $\rho(x, E) = 0$ (Proposição 1). Diremos que $E \subset X$ é limitado se $\mathrm{diam}E < \infty$.

Se $E \subset X$ e $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é uma família de conjuntos tal que $E \subset \cup_{\alpha\in A} V_\alpha$ dizemos que $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é uma cobertura de E. Se (X, ρ) é um espaço métrico, dizemos que $E \subset X$ é totalmente limitado se, para cada $\epsilon > 0$, pode ser coberto por um número finito de bolas de raio ϵ. É claro que todo conjunto totalmete E limitado é limitado, mas não é verdade, em geral, que todo conjunto limitado é totalmente limitado. Também é claro que se E é totalmente limitado então E^- é totalmente limitado.

Theorem

Se E é um subconjunto de um espaço métrico (X, ρ), as seguintes afirmativas são equivalentes:

a) *E é completo e totalmente limitado*

b) **(A propriedade de Bolzano-Weierstrass)** *Toda seqüência em E tem uma subseqüência que converge para um ponto de E*

c) **(A propriedade de Heine-Borel)** *Se $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é uma cobertura de E por abertos de (X, ρ), existe um conjunto finito $F \subset A$ tal que $\{V_\alpha\}_{\alpha\in F}$ cobre E.*

Proof: Mostraremos que a) e b) são equivalentes, que a) e b) juntos implicam c) e que c) implica b).

a) implica b): Suponha que a) vale e que $\{x_n\}$ é uma seqüência em E. E pode ser coberto por um número finito de bolas de raios $\frac{1}{2}$ e pelo menos uma dessas bolas deve conter x_n para um número infinito de índices: Digamos que $x_n \in B_1$ para $n \in N_1$. $E \cap B_1$ pode ser coberto por um número finito de bolas de raio $\frac{1}{2^2}$ e portanto uma dessas bolas contém x_n para um número infinito de índices: Digamos que $x_n \in B_2$ para $n \in N_2$. Continuando indutivamente obtemos uma seqüência de bolas B_j de raio $\frac{1}{2^j}$ e uma seqüência decrescente de subconjuntos infinitos N_j de $\mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_j$ para $n \in N_j$. Escolha $n_1 \in N_1$, $n_2 \in N_2$, ...tal que $n_1 < n_2 < \dots$. Então $\{x_{n_j}\}$ é uma seqüência de Cauchy pois $\rho(x_{n_j}, x_{n_k}) < \frac{2}{2^j}$ se $k > j$, como E é completo o limite dessa subseqüência pertence a E.

b) implica a): Mostraremos que se qualquer das condições em a) falha então b) falha. Se E não é completo, existe uma seqüência de Cauchy $\{x_n\}$ em E que não tem limite em E. Nenhuma subseqüência de $\{x_n\}$ pode convergir em E pois caso contrário a seqüência seria convergente com o mesmo limite. Por outro lado, se E não é totalmente limitado, seja $\epsilon > 0$ tal que E não pode ser coberto por um número finito de bolas de raio ϵ. Escolha $x_n \in E$ indutivamente da seguinte maneira. Comece com qualquer $x_1 \in E$ e tendo escolhido $x_1, \ldots, x_n$ escolha $x_{n+1} \in E \setminus \cup_{i=1}^{n} B_\epsilon(x_i)$. Então $\rho(x_n, x_m) \geq \epsilon$ para todo m, n e portanto $\{x_n\}$ não tem subseqüência convergente.

a) e b) implicam c): É suficiente mostrar que se b) vale e $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é uma cobertura de E por conjuntos abertos, existe $\epsilon > 0$ tal que toda bola de raio ϵ que intersepta E está contida em algum V_α, pois E pode ser coberto por um número finito de tais bolas de a). Suponha que não; isto é, que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma bola B_n de raio $1/2^n$ tal que $B_n \cap E \neq \emptyset$ e B_n não está contida em nenhum V_α. Escolha $x_n \in B_n \cap E$. Passando para uma subseqüência podemos assumir que $\{x_n\}$ é convergente para algum $x \in E$. Temos que $x \in V_\alpha$ para algum $\alpha \in A$ e como V_α é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset V_\alpha$. Mas se n é suficientemente grande tal que $\rho(x_n, x) < \epsilon/3$ e $2^{-n} < \epsilon/3$, então $B_n \subset B_\epsilon(x) \subset V_\alpha$ contradizendo a hipótese sobre B_n.

c) implica b): Se $\{x_n\}$ é uma seqüência sem subseqüência convergente, para cada $x \in E$ existe uma bola B_x centrada em x que contém x_n no máximo para um número finito de índices n (caso contrário haveria uma subseqüência que converge para x). Então $\{B_x\}_{x\in E}$ é uma cobertura de E por abertos sem subcobertura finita.$\square$

Definição (Compacto)

Em um espaço métrico (X, ρ), um conjunto $E \subset X$ é dito compacto se tem as propriedades a)-c) do teorema anterior e é dito relativamente compacto se E^- é compacto.

Todo conjunto compacto é fechado pela Proposição 3 e limitado, a recíproca em geral é falsa mas é verdadeira em $\mathbb{R}^n$ como mostra a proposição abaixo.

Exercício

Todo subconjunto fechado e limitado de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ *é compacto*

Prova: Como subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$ são completos, é suficiente mostrar que subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^n$ são totalmente limitados.

Como cada subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ está contido em algum cubo da forma

$$Q = [-R, R]^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \max(|x_1|, \dots, |x_n|) \leq R\},$$

é suficiente mostrar que Q é totalmente limitado.

Dado $\epsilon > 0$, escolha um inteiro $k > R\sqrt{n}/\epsilon$ e expresse Q como a união de k^n cubos congruentes dividindo o intevalo $[-R, R]$ em k intervalos iguais.

O comprimento do lado desses subcubos é $2R/k$ e portanto o seu diâmetro é $\sqrt{n}(2R/k) < 2\epsilon$. Desta forma, cada um desses subcubos está contido na bola de raio ϵ com centro coincidente com o centro do cubo. Isto completa a demonstração.$\square$

O Teorema de Arzelá-Ascoli e o Teorema de Peano

Seja (X,ρ) um espaço métrico compacto. O espaço métrico das funções contínuas $f : X \to \mathbb{R}$ com a métrica

$$\rho(f,g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$$

é um espaço métrico completo que denotamos por $C(X)$.

Uma coleção $\mathcal{F}$ de funções é dita *uniformemente limitada* se existe $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in X \text{ e } \forall f \in \mathcal{F}.$$

Uma família $\mathcal{F}$ de funções em $C(X)$ é chamada *equicontínua* se dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x')| < \epsilon$, $\forall x, x' \in X$ com $\rho(x', x) < \delta$ e $\forall f \in \mathcal{F}$.

Theorem (Arzelá-Ascoli)

Se (X,ρ) é um espaço métrico compacto, um subconjunto $\mathcal{F}$ de $C(X)$ é relativamente compacto se e somente se é uniformemente limitado e equicontínuo.

Prova: Suponha que $\mathcal{F}$ é relativamente compacto. Então $\mathcal{F}$ é totalmente limitado e portanto uniformemente limitado. Seja $\epsilon > 0$ e $f_1, \dots, f_n$ tais que $\mathcal{F} \subset \cup_{i=1}^n B_{\frac{\epsilon}{3}}(f_i)$. Seja $f \in \mathcal{F}$ e $x, x' \in X$. Para cada $i = 1, 2, \dots, n$

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(x')| + |f_i(x') - f(x')|.$$

Escolha $1 \leq j \leq n$ tal que

$$\sup_{x\in X} |f(x) - f_j(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Então

$$|f(x) - f(x')| \leq \frac{2\epsilon}{3} + |f_j(x) - f_j(x')|.$$

Como X é compacto, $f_1, \ldots, f_n$ são uniformemente contínuas. Logo, existe $\delta > 0$ tal que $\rho(x, x') < \delta$ implica

$$|f_i(x) - f_i(x')| < \frac{\epsilon}{3}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Segue que se $\rho(x, x') < \delta$ então

$$|f(x) - f(x')| < \epsilon, \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

e $\mathcal{F}$ é equicontínuo.

Reciprocamente, suponha que $\mathcal{F}$ é uniformemente limitado e equicontínuo. Seja M é um inteiro tal que

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in X \text{ e } \forall f \in \mathcal{F}$$

e $\epsilon > 0$. Escolha $\delta > 0$ tal que $\rho(x, x') < \delta$ implica $|f(x) - f(x')| < \frac{\epsilon}{4}$ $\forall f \in \mathcal{F}$. Como X é compacto existem $x_1, \ldots, x_n$ tais que $X \subset \cup_{i=1}^{n} B_\delta(x_i)$. Escolha um número inteiro positivo m tal que $\frac{1}{m} < \frac{\epsilon}{4}$ e divida $[-M, M]$ em $2Mm$ intevalos comprimento $\frac{1}{m}$ pelos pontos

$$y_0 = -M < y_1 < \cdots < y_{2Mm} = M.$$

Considere as n uplas $(y_{i_1}, \dots, y_{i_n})$ de números $y_i, 1 \leq i \leq 2Mm$, tais que para algum $f \in \mathcal{F}$

$$|f(x_j) - y_{i_j}| < \frac{\epsilon}{4}, \quad 1 \leq j \leq n$$

e escolha um tal $f \in \mathcal{F}$ para cada $n-$upla.
Se $\mathcal{E}$ é o conjunto resultante dessa escolha, $\mathcal{E}$ é finito, e é tal que $\mathcal{F} \subset \cup_{f \in \mathcal{E}} B_\epsilon(f)$. De fato, se $f \in \mathcal{F}$ escolhemos $y_{i_1}, \dots, y_{in}$ tal que

$$|f(x_j) - y_{i_j}| < \frac{\epsilon}{4}, \quad 1 \leq j \leq n$$

e seja $e \in \mathcal{E}$ tal que

$$|e(x_j) - y_{i_j}| < \frac{\epsilon}{4}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Seja $x \in X$ e j tal que $\rho(x, x_j) < \delta$. Então

$$|f(x) - e(x)| \leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - y_{i_j}| + |y_{i_j} - e(x_j)| + |e(x_j) - e(x)| < \epsilon.$$

Logo

$$\sup_{x \in X} |f(x) - e(x)| < \epsilon. \square$$

Seja $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto e $f : D \to \mathbb{R}^n$ contínua.

Theorem (Peano)

Dado $(t_0, x_0) \in D$ a equação diferencial $\dot{x} = f(t, x)$ tem uma solução local passando por (t_0, x_0).

Prova: Seja $(t_0, x_0) \in D' \subset D$ aberto tal que f é limitada em D' e seja A tal que $|f(t, x)| \leq A$ para todo $(t, x) \in D'$. Seja $a > 0$ tal que $R = [t_0 - a, t_0 + a] \times B_{aA}(x_0)^{-} \subset D'$.

Como f é uniformemente contínua em R, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, $(t, x), (t', x') \in R$, $|t - t'| < \delta$ e $|x - x'| < \delta \Rightarrow$ $|f(t, x) - f(t', x')| < \epsilon$. Seja $t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t_0 + a$ uma partição do intervalo $[t_0, t_0 + a]$ tal que $|t_i - t_{i-1}| < \min(\delta, \frac{\delta}{A})$, $1 \leq i \leq n$ e $\phi_\epsilon : [t_0, t_0 + a] \to R$ definida por:

- ϕ_ϵ é contínua.
- $\phi_\epsilon(t_0) = x_0$ e se , em $[t_0, t_1]$ seja ϕ_ϵ linear com direção $f(t_0, x_0)$, então $\phi_\epsilon(t_1) \in R$.
- Em $[t_1, t_2]$, seja ϕ_ϵ linear com direção $f(t_1, \phi_\epsilon(t_1))$.
- Prosseguindo desta forma construímos $\phi_\epsilon(t)$ em $B_{aA}(x_0)^-$, $t \in [t_0, t_0 + a]$.

Como a direção de ϕ_ϵ é $f(t_i, \phi_\epsilon(t_i))$ para $t \in [t_i, t_{i+1}]$ temos que

$$|\phi_\epsilon(t) - \phi_\epsilon(t')| \leq A|t - t'|.$$

Logo, $\{\phi_\epsilon : 0 < \epsilon \leq 1\} \subset C[t_0, t_0 + a]$ é uma família equicontínua. Fixemos $\epsilon > 0$, se $t \in [t_0, t_0 + a]$, $t \neq t_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, então $t_{j-1} < t < t_j$ para algum j e

$$|\phi_\epsilon(t) - \phi_\epsilon(t_{j-1})| < A|t - t_{j-1}| < A\frac{\delta}{A} = \delta.$$

Isto implica que

$$|f(t_{j-1}, \phi_\epsilon(t_{j-1})) - f(t, \phi_\epsilon(t))| < \epsilon, \quad t_{j-1} < t < t_j.$$

Mas $\frac{d}{dt}\phi_\epsilon$ existe exceto para um número finito de pontos e portanto

$$\frac{d}{dt}\phi_\epsilon(t) = f(t_{j-1}, \phi_\epsilon(t_{j-1})).$$

Segue que

$$|\frac{d}{dt}\phi_\epsilon(t) - f(t,\phi_\epsilon(t))| < \epsilon, \quad t \in [t_0, t_0 + a],\ t \neq t_i,\ 0 \leq i \leq n.$$

Agora escrevemos

$$\phi_\epsilon(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \{f(s,\phi_\epsilon(s)) + [\dot{\phi}_\epsilon(s) - f(s,\phi_\epsilon(s))]\}ds. \qquad (4)$$

Se $\{\epsilon_n\}$ é uma seqüência de números reais positivos que converge para zero, $\{\phi_{\epsilon_n}\}$ é limitada e equicontínua. Do Teorema de Arzelá-Ascoli (Teorema 4) esta seqüência tem uma subseqüência uniformemente convergente com limite ϕ. Segue de (4) que

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))ds.$$

Logo ϕ é uma solução de $\dot{x} = f(t, x)$ passando por (t_0, x_0) e definida em $[t_0, t_0 + a]$. Um argumento semelhante pode ser aplicado para $[t_0 - a, a]$. $\square$