Caracterização das Funções Riemann Integráveis

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

27 de Maio de 2024

Primeiro Semestre de 2024

Caracterização das Funções Riemann Integráveis

Definição

Se $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$ *defina* $\omega^f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *por* $\omega^f(x) = \lim\limits_{\nu\to 0} \omega^f_\nu(x)$, *onde*

$$\omega^f_\nu(x) = \sup\{|f(s) - f(t)| : s, t \in [a,b] \cap (x-\nu, s+\nu)\}$$

Note que, para cada $x \in [a,b]$, $(0,\infty) \ni \nu \mapsto \omega^f_\nu(x) \in [0,\infty)$ é não-decrescente, logo $\omega^f(x)$ está bem definida para cada $x \in [a,b]$.

É claro que f é contínua em $p \in [a, b]$ se, e somente se, $\omega^f(p) = 0$.

De fato, $\omega^f(p) = 0$

- se, e somente se, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < \nu < \delta \Rightarrow \omega_\nu^f(p) < \epsilon$ ou
- se, e somente se, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < \nu < \delta \Rightarrow |f(s) - f(p)| < \epsilon$, para todo $s \in (p - \nu, p + \nu) \cap [a, b]$ ou
- se, e somente se, f é contínua em p.

Lema

O conjunto $E_\delta^f = \{x \in [a,b] : \omega^f(x) \geqslant \delta\}$ *é compacto.*

Prova: Seja $x \in \overline{E_\delta^f}$ e $E_\delta^f \ni x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Vamos mostrar que $x \in E_\delta^f$ para concluir que E_δ^f é fechado. Disto segue a compacidade.

Sabemos que $\omega^f(x_n) \geq \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e queremos concluir que $\omega^f(x) \geq \delta$.

Sejam $0 < \nu' < \nu$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $(x_n - \nu', x_n + \nu') \subset (x - \nu, x + \nu)$.

Então, $\delta \leqslant \omega^f(x_n) \leqslant \omega^f_{\nu'}(x_n) \leqslant \omega^f_\nu(x)$ e $\omega^f(x) = \lim\limits_{\nu \to 0} w^f_\nu(x) \geqslant \delta$. $\square$

Lema

Seja $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$ *e* $\mathcal{P} = \{x_0, \cdots, x_n\} \in \mathscr{P}([a,b])$. *Se*

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \;\; m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \text{ e}$$

$$\omega_i = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

então $\omega_i = M_i - m_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Prova: Para todo $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$, $\omega_i \geqslant |f(x) - f(y)| \geqslant f(x) - f(y)$ e, portanto,

$$\omega_i \geqslant M_i - f(y), \ \forall\, y \in [x_{i-1}, x_i]$$

Disto segue que $\omega_i \geqslant M_i - m_i$. Por outro lado, dado $\epsilon > 0$ existem $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ tais que $M_i \leq f(x) + \frac{\epsilon}{2}$ e $m_i \geqslant f(y) - \frac{\epsilon}{2}$. Sendo assim,

$$M_i - m_i \leqslant f(x) - f(y) + \epsilon \leqslant \omega_i + \epsilon.$$

Disto segue que $M_i - m_i \leqslant \omega_i$ e temos a igualdade.

Teorema

Se $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$ e $\omega^f(x) < \epsilon$, para todo $x \in [a,b]$ então, existe $\mathcal{P} = \{x_0, \cdots, x_n\} \in \mathscr{P}([a,b])$ tal que $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(M_i - m_i) < \epsilon$ onde $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ e $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

Prova: Note que, para cada $x \in [a,b]$ existe $\delta_x > 0$ tal que $\omega^f_{\delta_x}(x) < \epsilon$.

A cobertura $\{I_x = (x - \delta_x, x + \delta_x) : x \in [a,b]\}$ de $[a,b]$ tem uma subcobertura finita $I_{x_1}, \cdots, I_{x_n}$.

Os pontos a e b juntamente com os extremos dos intervalos I_{x_i} que pertencem a (a,b) formam a partição desejada.$\square$

Teorema

$\mathscr{R}([a,b]) = \{f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R}) : m^*(E_\delta^f) = 0, \forall \delta > 0\}$

Prova: Primeiramente mostraremos que se $f \in \mathscr{R}([a,b])$ então $m^*(E_\delta^f) = 0, \forall \delta > 0$.

Se $f \in \mathscr{R}([a,b])$, $\delta > 0$ e $\epsilon > 0$, seja $\mathcal{P} = \{x_0, \cdots, x_n\} \in \mathscr{P}([a,b])$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} [M_i - m_i](x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, (x_i - x_{i-1}) < \epsilon\delta.$$

Se $E_{\delta,i} := (x_{i-1}, x_i) \cap E_\delta^f \neq \varnothing$, então $\omega_i \geqslant \delta$.

De fato, se $x \in E_{\delta,i}$, $\omega^f(x) \geqslant \delta$ e existe $\nu > 0$ tal que $(x-\nu, x+\nu) \subset (x_{i-1}, x_i)$ e $\omega_\nu^f(x) \geqslant \omega^f(x) \geqslant \delta$ e portanto $\omega_i \geq \delta$.

Seja $I = \{i \in \{1, \cdots, n\} : E_{\delta,i} \neq \varnothing\}$

$$\delta \sum_{i \in I} (x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_{i \in I} \omega_i (x_i - x_{i-1}) \leqslant \epsilon\delta$$

e, portanto, $\sum_{i \in I} (x_i - x_{i-1}) < \epsilon$.

Estes intervalos cobrem $E_\delta^f \backslash \mathcal{P}$, como $\mathcal{P}$ é finito, $m^* \left(E_\delta^f\right) = 0$.

Agora, se $m^*\left(E_\delta^f\right) = 0$, $\forall \delta > 0$. Dado $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = \frac{\epsilon}{2(b-a)}$.

Seja $\mathcal{P}_0 \in \mathscr{P}([a,b])$ tal que a soma dos comprimentos dos intervalos que intersectam E_δ^f é menor do que $\frac{\epsilon}{2(M-m)}$.

Os intervalos restantes podem ser subdivididos (teorema anterior) de modo a obter um refinamento $\mathcal{P} = \{x_0, \cdots, x_n\}$ de $\mathcal{P}_0$ tal que $\omega_i < \delta$ se $E_{\delta,i} = \varnothing$. Seja $I = \{i : E_{\delta,i} \neq \varnothing\}$ e $J = \{i : E_{\delta,i} = \varnothing\}$.

Assim $\sum_{i\in I}(x_i - x_{i-1}) < \frac{\epsilon}{2(M-m)}$ e, se $i \in J$, $\omega_i < \delta = \frac{\epsilon}{2(b-a)}$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i\in I} \omega_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i\in J} \omega_i(x_i - x_{i-1}) < \epsilon$$

e $f \in \mathscr{R}([a,b])$. $\square$

Teorema

Se $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$ *seja* $E_f = \{x \in [a,b] : f$ *é descontínua em* $x\}$. *Então* $\mathscr{R}([a,b]) = \{f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R}) : m^*(E_f) = 0\}$.

Prova: Basta notar que $E_f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E^f_{\frac{1}{n}}$ e usar o teorema anterior. $\square$

Corolário

Se $f, g \in \mathscr{R}([a,b])$ *então* $f.g \in \mathscr{R}([a,b])$ *e se* $f(x) \neq 0$, *para todo* $x \in [a,b]$, *então* $\frac{1}{f} \in \mathscr{R}([a,b])$.

Corolário

Se $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$ só tem descontinuidades de primeira espécie então E^f é enumerável e portanto f é integrável. Em particular, se $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$ é monótona então $f \in \mathscr{R}([a,b])$.

Prova: Se $\sigma_f(x) = \max\{|f(x) - f(x^+)|, |f(x) - f(x^-)|\}$,

$$E^f = \{x \in [a,b] : \sigma_f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^f \text{ onde } E_n^f = \{x \in [a,b] : \sigma_f(x) \geqslant \frac{1}{n}\}.$$

Se $x \in E_n^f$ e $x \in (a,b)$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(t) - f(x^+)| < \frac{1}{4n}$ para todo $t \in (x, x+\delta)$ e $|f(t) - f(x^-)| < \frac{1}{4n}$ para todo $t \in (x-\delta, x)$.

Logo, $\forall t \in (x-\delta, x+\delta)$, $t \neq x$, $\sigma(t) \leqslant \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$. Como todos os pontos de E_n^f são isolados E_n^f é enumerável e E^f também é. $\square$