A integral de Riemann-Stieltjes

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

22 e 24 de Maio de 2024

Primeiro Semestre de 2024

Propriedades

Teorema

Se $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$, $f([a, b]) \subset [m, M]$ e $\phi : [m, M] \to \mathbb{R}$ é contínua então, $h = \phi \circ f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$.

Prova: Feita na aula anterior

Teorema

(a) *Se* $f_1 \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ *e* $f_2 \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ *então* $f_1 + f_2 \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$, $c \cdot f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ *para todo* $c \in \mathbb{R}$, *e*

$$\int_a^b (f_1 + f_2)\, d\alpha = \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha \ \text{ e } \int_a^b cf d\alpha = c \int_a^b f d\alpha.$$

(b) *Se* $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ *em* $[a, b]$ *então*

$$\int_a^b f_1 d\alpha \leqslant \int_a^b f_2 d\alpha$$

(c) *Se* $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ *e* $c \in (a, b)$ *então* $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, c]) \cap \mathscr{R}(\alpha, [c, b])$, *e*

$$\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha$$

(d) *Se* $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ *e if* $|f(x)| \leqslant M$ *então*

$$\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leqslant M[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

(e) *Se* $f \in \mathscr{R}(\alpha_1, [a, b])$ *e* $f \in \mathscr{R}(\alpha_2, [a, b])$ *então* $f \in \mathscr{R}(\alpha_1 + \alpha_2, [a, b])$ *e*

$$\int_a^b f d\,(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2$$

se $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ *e* $\mathbb{R} \ni c > 0$ *então* $f \in \mathscr{R}(c\alpha, [a, b])$ *e*

$$\int_a^b f d(c\alpha) = c \int_a^b f d\alpha$$

Prova: A prova de a) foi feita em sala.
As provas das demais afirmativas são semelhantes.

Explique a estratégia da prova de cada uma das alternativas b), c), d) e e) e deixe para os alunos completarem a demonstração como exercício.

Na parte (c) a estratégia é considerar refinamentos que contém o ponto c, na aproximação da integral. $\square$

Teorema

Se $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ *e* $g \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ *então*

(a) $fg \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$;

(b) $|f| \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ *e* $\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leqslant \int_a^b |f| d\alpha.$

Prova: Se $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ e $\phi(t) = t^2$ então $\phi \circ f = f^2 \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$. A identidade

$$4fg = (f + g)^2 - (f - g)^2$$

completa a prova de (a).

Se $\phi(t) = |t|$, $\phi \circ f = |f| \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$. Escolha $c = \pm 1$ tal que

$$c \int f d\alpha \geqslant 0$$

$$\left| \int f d\alpha \right| = c \int f d\alpha = \int c f d\alpha \leqslant \int |f| d\alpha$$

pois $cf \leq |f|$. Isto prova b).$\square$

Mudança de variável

Teorema

Sejam $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ não-decrescente e diferenciável com $\alpha' \in \mathscr{R}([a, b])$ e $f \in \mathscr{B}([a,b], \mathbb{R})$. Então $f \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$ se, e só se, $f\alpha' \in \mathscr{R}([a,b])$. Neste caso

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx.$$

Prova: Dado $\epsilon > 0$ existe $\mathcal{P} = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathscr{P}([a, b])$ tal que

$$U\left(\mathcal{P}, \alpha'\right) - L\left(\mathcal{P}, \alpha'\right) < \epsilon \qquad (\bullet)$$

Do Teorema do Valor Médio existe $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$\Delta\alpha_i = \alpha'\left(t_i\right)\Delta x_i, \ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Se $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ então

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \alpha'(s_i) - \alpha'(t_i) \right| \Delta x_i < \epsilon.$$

Seja $M = \sup |f(x)|$. Como

$$\sum_{i=1}^{n} f(s_i) \Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} f(s_i) \alpha'(t_i) \Delta x_i$$

segue que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(s_i) \Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} f(s_i) \alpha'(s_i) \Delta x_i \right| \leqslant M\epsilon. \qquad (*)$$

Em particular,

$$\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\,\Delta\alpha_i \leqslant U\left(\mathcal{P}, f\alpha'\right) + M\epsilon$$

para todas as escolhas $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$, de modo que

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) \leqslant U\left(\mathcal{P}, f\alpha'\right) + M\epsilon.$$

O mesmo argumento nos leva de $(*)$ a

$$U\left(\mathcal{P}, f\alpha'\right) \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha) + M\epsilon.$$

e portanto

$$\left|U(\mathcal{P}, f, \alpha) - U\left(\mathcal{P}, f\alpha'\right)\right| \leqslant M\epsilon. \qquad (\dagger)$$

Agora note que (•) permanece válida se $\mathcal{P}$ for substituída por um refinamento. Logo (†) também permance válida. Concluímos que

$$\left| \overline{\int_a^b} f d\alpha - \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)dx \right| \leqslant M\epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)dx$$

para qualquer $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$. A igualdade para as integrais inferiores segue da mesma maneira de $(*)$. $\square$

Mudança de variável

Teorema (Mudança de variável)

Sejam $\phi : [A, B] \to [a, b]$ *contínua e bijetora com* $\phi(A) = a$ *e* $\phi(B) = b$, α *é não-decrescente,* $\beta = \alpha \circ \phi$ *e* $g = f \circ \varphi$*. Se* $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ *então* $g \in \mathscr{R}(\beta, [A, B])$ *e*

$$\int_A^B g d\beta = \int_a^b f d\alpha$$

Prova: Se $\mathcal{P}=\{x_0,\ldots,x_n\}\in\mathscr{P}_{[a,b]}$ e $\mathcal{Q}=\{y_0,\ldots,y_n\}\in\mathscr{P}_{[A,B]}$, com $x_i=\varphi(y_i)$. Todas as partições de $[A,B]$ são obtidas desta forma.

Como os valores de f em $[x_{i-1},x_i]$ e de g em $[y_{i-1},y_i]$ são os mesmos,

$$U(\mathcal{Q},g,\beta)=U(\mathcal{P},f,\alpha),\quad L(\mathcal{Q},g,\beta)=L(\mathcal{P},f,\alpha).$$

Como $f\in\mathscr{R}(\alpha,[a,b]),\mathcal{P}$ pode ser escolhida de forma que ambas $U(\mathcal{P},f,\alpha)$ e $L(\mathcal{P},f,\alpha)$ estão próximas a $\displaystyle\int_a^b fd\alpha$.

Segue que $g\in\mathscr{R}(\beta,[A,B])$ e o resultado esta demonstrado.$\square$

Agora vamos considerar o seguinte caso especial. Tomamos $\alpha(x) = x$. Etão $\beta = \varphi$. Suponha que $\varphi' \in \mathscr{R}([A, B])$. Aplicando os dois resultados anteriores temos

$$\int_a^b f(x)dx = \int_A^B f(\varphi(y))\varphi'(y)dy.$$

Teorema fundamental do cálculo e Integração por partes

A seguir mostraremos que a derivação e a integração, em algum sentido, são operações inversas.

Teorema

Se $f \in \mathscr{R}([a,b])$. Para $a \leqslant x \leqslant b$, faça

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Então $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ é Lipschitz contínua (portando diferenciável exceto em um conjunto com medida exterior nula) e, se f é contínua em $x_0 \in [a,b]$, então F é differenciável em x_0, e

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

Prova: Como $f \in \mathscr{R}([a,b])$, $\sup_{t\in[a,b]} |f(t)| = M < \infty$. Se $a \leqslant x < y \leqslant b$, então

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leqslant M(y-x),$$

e segue que F é Lipschitz contínua.

Agora, se f é contínua em x_0, dado $\epsilon > 0$, escolha $\delta > 0$ tal que

$$t \in [a,b],\ |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Logo, se $x_0 - \delta < s \leqslant x_0 \leqslant t < x_0 + \delta$ e $a \leqslant s < t \leqslant b$ temos

$$\left| \frac{F(t) - F(s)}{t - s} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{t-s} \int_s^t [f(u) - f(x_0)]\, du \right| < \epsilon.$$

Segue que $F'(x_0) = f(x_0)$. $\square$

Teorema (O teorema fundamental do cálculo)

Se $f \in \mathscr{R}([a,b])$ e existe função diferenciável $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $F' = f$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Prova: Dado $\epsilon > 0$ seja $\mathcal{P} = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathscr{P}([a,b])$ tal que $U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) < \epsilon$. Do Teorema do Valor Médio

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(t_i)\,\Delta x_i, \text{ para algum } t_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

para $i = 1, \ldots, n$. Logo $\sum_{i=1}^n f(t_i)\,\Delta x_i = F(b) - F(a)$ e

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)dx \right| < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário o resultado segue.$\square$

Teorema (Integração por partes)

Se $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$, são diferenciáveis, $F' = f$, $G' = g \in \mathscr{R}([a,b])$. Então

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx.$$

Prova: Faça $H(x) = F(x)G(x)$. $H' \in \mathscr{R}([a,b])$ como soma de produtos de funções em $\mathscr{R}([a,b])$. O resultado segue do teorema anterior a H. $\square$