

Continuidade e Diferenciabilidade: Revisão

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

15 de Maio de 2024

Primeiro Semestre de 2024

Abertos, Fechados, Compactos e Conexos

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$.

- 1) Um ponto $a \in A$ é interior a A se existe $r > 0$ tal que $(a - r, a + r) \subset A$.
- 2) O conjunto A é aberto se todos os seus pontos são interiores.
- 3) O conjunto A é fechado em \mathbb{R} se seu complementar é aberto.
- 4) O interior A° de A é o conjunto dos pontos interiores a A .
- 5) O fecho \bar{A} de A é a interseção de todos os fechados que contém A .

Teorema

Seja Λ um conjunto e $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de conjuntos.

- 1) Se cada A_λ é aberto, $\cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é aberto.
- 2) Se cada A_λ é aberto e Λ é um conjunto finito, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é aberto.
- 3) Se cada A_λ é fechado, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é fechado.
- 4) Se cada A_λ é fechado e Λ é finito, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ é fechado.

Teorema

Todo subconjunto aberto A de \mathbb{R} se exprime, de maneira única, como união enumerável de intervalos abertos disjuntos

Corolário

Se I é um intervalo aberto e $I = A \cup B$ onde A e B são conjuntos abertos e disjuntos então um desses conjuntos é vazio.

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um ponto $p \in \mathbb{R}$ é aderente a A se existir seqüência $\{x_n\}$ em A tal que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$.

Sabemos que se p é ponto de acumulação de A então p é aderente a A . Se p é aderente a A e p não é ponto de acumulação de A então $p \in A$. Todo ponto de A é aderente a A . Todo ponto interior a A é aderente a A e é um ponto de acumulação de A .

Teorema

Um ponto $p \in \mathbb{R}$ é aderente a A se, e só se, $A \cap (p - \epsilon, p + \epsilon) \neq \emptyset$ para todo $\epsilon > 0$.

Corolário

Se $A \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente (inferiormente) então $\sup A$ ($\inf A$) é aderente a A .

Teorema

O fecho A^- de $A \subset \mathbb{R}$ é o conjunto \tilde{A} dos pontos aderentes de A .

Definição

Sejam A e B subconjuntos de \mathbb{R} com $A \subset B$. Diremos que A é denso em B se $B \subset A^-$

Teorema

Todo $B \subset \mathbb{R}$ tem um subconjunto enumerável e denso em B .

Teorema

Seja $F \subset \mathbb{R}$ um conjunto fechado, não vazio e sem pontos isolados. Então F é não enumerável.

Coberturas e Compactos

Definição

Seja $A \subset \mathbb{R}$ e Λ um conjunto, uma coleção $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de conjuntos é chamada uma **cobertura de A** se $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$.

Se $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma cobertura e $\Lambda' \subset \Lambda$ e $A \subset \bigcup_{\lambda' \in \Lambda'} \mathcal{A}_{\lambda'}$, $\{\mathcal{A}_{\lambda'}\}_{\lambda' \in \Lambda'}$ é dita uma **subcobertura da cobertura** $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

Se os conjuntos da cobertura são todos abertos a cobertura é dita uma **cobertura aberta**.

Teorema (Borel-Lebsegue)

Dada uma cobertura $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de $[a, b]$ onde cada I_λ é um intervalo aberto existe $\Lambda' \subset \Lambda$ finito tal que $[a, b] \subset \cup_{\lambda' \in \Lambda'} I_{\lambda'}$.

Corolário

Dada uma cobertura aberta $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de $[a, b]$ existe $N' \subset \Lambda$ finito tal que $[a, b] \subset \cup_{\lambda' \in N'} A_{\lambda'}$.

Basta lembrar que cada aberto da cobertura pode ser escrito como união enumerável de intervalos abertos (disjuntos).

Corolário

Dada uma cobertura aberta $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de um conjunto fechado e limitado F existe $N' \subset \Lambda$ finito tal que $F \subset \cup_{\lambda' \in N'} A_{\lambda'}$.

Teorema

Dado $K \subset \mathbb{R}$ são equivalentes:

- 1) K é fechado e limitado.*
- 2) Toda cobertura aberta de K possui uma subcobertura finita.*
- 3) Todo subconjunto infinito de K possui um ponto de acumulação pertencente a K .*
- 4) Toda seqüência de pontos de K possui uma subsequência que converge para um ponto de K .*

Definição

Um conjunto é compacto se satisfaz uma das condições do teorema anterior.

Corolário (Teorema de Bolzrado-Weierstrass)

Todo conjunto infinito e limitado de números reais possui um ponto de acumulação.

Corolário

Toda seqüência decrescente de compactos não-vazios tem interseção não vazia.

Medida Exterior

Se $I = (a, b)$ defina $\ell(I) = b - a$. Dado $A \subset \mathbb{R}$ existe uma família contável de intervalos abertos que cobrem A . Seja \mathcal{U}_A a coleção de todas as coberturas contáveis de intervalos abertos de A .

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum \ell(I_n) : \{I_n\} \in \mathcal{U}_A \right\}$$

É claro que $m^*(\emptyset) = 0$, $m^*((a, b)) \leq b - a$, $m^*({x}) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e que, se $A \subset B$ $m^*(A) \leq m^*(B)$.

Lema

$$m^*[a, b] = m^*(a, b) = m^*[a, b] = m^*(a, b) = b - a.$$

Lema

Se $\{A_n\}$ é uma família contável de subconjuntos de \mathbb{R} então

$$m^*\left(\bigcup A_n\right) \leq \sum m^*(A_n)$$

Corolário

- 1) Se $A \subset \mathbb{R}$ é enumerável, $m^*(A) = 0$.
- 2) Se $\{A_n\}$ é uma família contável de subconjuntos de \mathbb{R} e $m^*(A_n) = 0, \forall n$ então $m^*(\bigcup_n A_n) = 0$

Exercício

Seja $I_j = [a_j, b_j], 1 \leq j \leq n$ com $b_j < a_{j+1}, 1 \leq j \leq n - 1$. Mostre que

$$m^*\left(\bigcup_{j=1}^n I_j\right) = \sum_{j=1}^n (b_j - a_j).$$

O Lema do Recobrimento de Vitali

Lema (Recobrimento de Vitali)

Seja $E \subset [a, b]$, consequentemente $m^*(E) \leq b - a$. Se \mathcal{I} é uma cobertura de E por intervalos não degenerados e tal que, dados $x \in E$ e $\epsilon > 0$, existe $I \in \mathcal{I}$ tal que $x \in I$ e $\ell(I) < \epsilon$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe uma coleção finita e disjunta $\{I_1, \dots, I_N\} \subset \mathcal{I}$ tal que

$$m^* \left(E \setminus \bigcup_{n=1}^N I_n \right) < \epsilon.$$

Continuidade e Abertos

Teorema

Seja $D \subset \mathbb{R}$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. A função f é contínua se, e somente se, para todo aberto \mathcal{O} de \mathbb{R} , $f^{-1}(\mathcal{O})$ é aberto em D .

Continuidade e conexos

Teorema

Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua então $f(I)$ é um intervalo.

Continuidade e Compactos

Teorema

Se $K \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua então $f(K)$ é compacto.

Teorema (Weierstrass)

Se $K \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto e $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, existem $x_1, x_2 \in K$ tal que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in K$.

Teorema

Se $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e injetiva e $C = f(K)$ então $f^{-1} : C \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

Cuidado!!

Teorema

Se I é um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e injetiva então f é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

Teorema

Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que, dado $\epsilon > 0$ existe função contínua $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|g(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in D$, então f é contínua.

Continuidade Uniforme

Definição (Continuidade Uniforme)

Se $D \subset \mathbb{R}$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função, dizemos que f é uniformemente contínua se, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in D$, $|x - y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Note que:

- Nem toda função contínua é uniformemente contínua.

Exemplo: $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ é uniformemente contínua em $[r, \infty)$ para qualquer $r > 0$ mas não em $(0, \infty)$.

- Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e existem $C > 0$ e $\theta \in (0, 1]$ tais que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\theta$, $\forall x, y \in D$ então f é uniformemente contínua. Se $\theta \in (0, 1)$ [$\theta = 1$] f é Hölder [**Lipschitz**] contínua.

Exemplo: $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ é Hölder contínua com expoente $\theta = \frac{1}{2}$.

Teorema

Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua então f leva seqüências de Cauchy em seqüências de Cauchy.

Corolário

Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua então para cada ponto de acumulação d' de D existe o limite $\lim_{x \rightarrow d'} f(x)$.

Teorema

Se $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$ é compacto e $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.

Teorema

Toda função uniformemente contínua $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ admite uma única extensão contínua a D^- . Esta extensão é uniformemente contínua.

Descontinuidades

Definição

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Um ponto de descontinuidade ou uma descontinuidade da função f é um ponto $d \in D$ no qual f não é contínua (descontinuidades são pontos de acumulação de D).

Uma descontinuidade d é de 1ª espécie se existe $\lim_{x \rightarrow d^+} f(x)$ (se d é um ponto de acumulação à direita) e o limite $\lim_{x \rightarrow d^-} f(x)$ (se d é um ponto de acumulação à esquerda).

Uma descontinuidade que não é de 1ª espécie é de segunda espécie.

Escreveremos $f(d^\pm) = \lim_{x \rightarrow d^\pm} f(x)$ quando o limite existir.

Teorema

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona.

- 1) f não admite descontinuidades de segunda espécie.
- 2) Se $f(D)$ é denso em algum intervalo I , então f é contínua.

Teorema

Se as descontinuidades de $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ são todas de primeira espécie então o conjunto das descontinuidades de f é enumerável. Em particular, se f é monótona o conjunto das descontinuidade de f é enumerável.

Definição

Definição (Derivada)

Sejam $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$ um ponto de acumulação de D_f . Se existir o limite $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = L \in \mathbb{R}$, diremos que L é a **derivada** de f em p e escreveremos

$$f'(p) = L = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + h) - f(p)}{h}.$$

Definição (Derivada à Direita e à Esquerda)

Sejam $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$ um ponto de acumulação à direita de D_f . Se existir o limite $\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = L^+ \in \mathbb{R}$,

diremos que L^+ é a **derivada à direita** de f em p e escreveremos

$$f'(p^+) = L^+ = \lim_{x \rightarrow p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(p + h) - f(p)}{h} \dots$$

De maneira semelhante definimos a derivada à esquerda.

A função derivada

Diferenciabilidade implica continuidade:

Teorema

Se f for diferenciável em $p \in D_f$, então f será contínua em p .

Observação: Não vale a volta. A função $f(x) = |x|$ é contínua em $x = 0$ mas não é diferenciável em $x = 0$.

Exemplo (Critério Negativo)

Se f não é contínua em p então f não é diferenciável em p .

Propriedades da Derivada

Teorema (Propriedades da Derivada)

Sejam f e g funções diferenciáveis em p e k uma constante. Então

(a) kf será diferenciável em p e

$$(kf)'(p) = kf'(p), \text{ (Multiplicação por constante)}$$

(b) $f + g$ será derivável em p e

$$(f + g)'(p) = f'(p) + g'(p), \text{ (Derivada da Soma)}$$

(c) fg será derivável em p e

$$(fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p), \text{ (Derivada do Produto)}$$

(d) $\left(\frac{f}{g}\right)$ será derivável em p , se $g(p) \neq 0$ e, neste caso, teremos

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{[g(p)]^2}, \text{ (Derivada do Quociente).}$$

A Regra da Cadeia

A Regra da Cadeia nos fornece uma maneira de calcular a derivada da função composta $h = f \circ g$ em termos das derivadas de f e de g .

Teorema (Regra da Cadeia)

Sejam $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis com $\text{Im}(g) \subset D_f$. Se g é diferenciável em p , $g(p)$ é ponto de acumulação de D_f , f é diferenciável em $g(p)$ e $h = f \circ g$, então h é diferenciável em p e

$$h'(p) = f'(g(p))g'(p). \quad (1)$$

Derivada da Função Inversa

Proposição (Derivada de funções inversas)

Seja f injetiva, p um ponto de acumulação de $\text{Im}(f)$. Se f for diferenciável em $q = f^{-1}(p)$ e f^{-1} é contínua em p , então f^{-1} é diferenciável em p se, e somente se, $f'(f^{-1}(p)) \neq 0$. Neste caso

$$(f^{-1})'(p) = \frac{1}{f'(f^{-1}(p))}.$$

Máximos e Mínimos

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f tem um máximo (mínimo) local no ponto $d \in D$ se existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(d)$ ($f(x) \geq f(d)$) para todo $x \in D$, $|x - d| < \delta$. Quando a desigualdade é estrita dizemos que f tem um máximo (mínimo) local estrito. Os máximos e mínimos locais serão chamados de valores extremos e os pontos onde a função assume valores máximos ou mínimos serão chamados de pontos de máximo ou de mínimo.

Segue diretamente da definição de derivada (derivada à direita) que:

- Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é não-decrescente (não-crescente) e é diferenciável em um ponto $d \in D$ então, $f'(d) \geq 0$ ($f'(d) \leq 0$). Vale o mesmo resultado para funções diferenciáveis à direita.
- Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável à direita (esquerda) em um ponto $d \in D$ e $f'(d^+) > 0$ ($f'(d^-) > 0$) então existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $x \in (d, d+\delta)$ ($x \in (d-\delta, d)$) implica $f(x) > f(d)$ ($f(x) < f(d)$).
- Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável à direita (esquerda) em um ponto $d \in D$ e $f'(d^+) < 0$ ($f'(d^-) < 0$) então existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $x \in (d, d+\delta)$ ($x \in (d-\delta, d)$) implica $f(x) < f(d)$ ($f(x) > f(d)$).

- Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em um ponto $d \in D$, d é ponto de acumulação a direita e a esquerda e $f'(d) > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$, $d - \delta < x < d < y < d + \delta \Rightarrow f(x) < f(d) < f(y)$.
- Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em um ponto $d \in D$, d é um ponto de acumulação a direita e a esquerda e f tem um valor extremo local em d então $f'(d) = 0$.

A derivada tem a propriedade do valor intermediário

Teorema (Darboux)

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável com $f'(a) \neq f'(b)$ então, para todo C entre $f'(a)$ e $f'(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = C$.

Teorema (Derivadas não tem descontinuidades 1ª espécie)

Se I é um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável então f' não tem descontinuidades de primeira espécie.

Teorema

Se $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Se $D^+f(x) \leq 0$ ($D^+f(x) \geq 0$) para todo $x \in [a, b)$ e $f(a) = 0$ então $f(x) \leq 0$ ($f(x) \geq 0$) em $[a, b)$.

Corolário

Se $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Se $D^+f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b)$ então f é não-crescente em $[a, b)$.

Corolário

Se $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Se $D^+f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b)$ então f é não-decrescente em $[a, b)$.

Corolário

Se $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável à direita com derivada à direita $D^+f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua então f é de classe C^1 .

O Teorema do Valor Médio e suas Conseqüências

O Teorema do Valor Médio é um dos Teoremas fundamentais das funções diferenciáveis em intervalos. A sua demonstração decorre do seguinte resultado:

Theorem (Teorema do Valor Médio de Cauchy)

Se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas que são diferenciáveis em (a, b) , existe $c \in (a, b)$ para o qual

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Corolário (de Rolle)

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) e $f(a) = f(b)$, então existirá $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Corolário (do Valor Médio)

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) , então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),$$

ou seja

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Os fatos a seguir são conseqüências do Teorema do Valor Médio.

Corolário

Se $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável

- (a) Se $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$, então f não-decrescente em (a, b) .
- (b) Se $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$, então f crescente em (a, b) .
- (c) Se $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$, então f é constante em (a, b) .
- (d) Se $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$, então f não-crescente em (a, b) .
- (e) Se $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$, então f decrescente em (a, b) .

Observação (Teorema da Função Inversa)

Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, $x_0 \in I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é C^1 e $f'(x_0) \neq 0$ então, existe $\delta > 0$ tal que $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ é injetora $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) = J$ é um intervalo aberto, e $f^{-1} : J \rightarrow I$ é continuamente diferenciável com

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Regra de L'Hospital

Teorema

Sejam f e g são diferenciáveis em (a, b) , e $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, onde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ e

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} A. \quad (2)$$

Se

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \text{ e } g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \quad (3)$$

ou se

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty \quad (4)$$

então

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} A.$$

O resultado permanece válido se $x \rightarrow b$, ou se $g(x) \rightarrow -\infty$.

Teorema de Taylor

Theorem

Se $n \in \mathbb{N}^*$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função $n - 1$ vezes diferenciável em $[a, b]$ e n vezes diferenciável em (a, b) com $f^{(n-1)} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Sejam $\alpha, \beta \in [a, b]$, $\alpha \neq \beta$ e

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} (t - \alpha)^k$$

Então existe ξ entre α e β tal que

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (\beta - \alpha)^n.$$

Para $n=1$, teste é o teorema do valor médio. Em geral o teorema mostra como aproximar f por polinômios e fornece um modo de estimar o erro se conhecermos limitações para $|f^{(n)}(\xi)|$.

Funções Convexas

Seja I um intervalo, uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa quando, dados $a < x < b$ em I , o ponto $(x, f(x))$ fica abaixo da reta que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

A equação reta é

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \text{ ou } y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b).$$

Logo $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa se, dados $a < x < b$ em I ,

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \text{ ou } f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b).$$

Ou seja, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa se uma das desigualdades

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

sempre que $a < x < b$ em I . Dizemos que f é estritamente convexa se a desigualdade nesta definição é estrita.

Teorema (Caracterização de funções convexas)

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável.
Então f é convexa se, e somente se, $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$.

Observação

- 1) *Seja f diferenciável. Então f' é crescente se, e somente se, f é convexa.*
- 2) *Pode ser mostrado de forma análoga que, se $f''(x) > 0$, $\forall x \in I$, então f é estritamente convexa em I . A recíproca é falsa ($f(x) = x^4$ é estritamente convexa em \mathbb{R} mas $f''(0) = 0$).*

Funções de Variação Limitada (BV)

Se $r \in \mathbb{R}$, $r^+ = \max\{r, 0\}$ e $r^- = \max\{-r, 0\}$ ($r = r^+ - r^-$, $|r| = r^+ + r^-$).

Uma coleção $\{a_0, \dots, a_k\}$ de pontos em $[a, b]$ é chamada **uma partição** do intervalo $[a, b]$ se $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k = b$. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\{a_0, \dots, a_k\}$ uma partição de $[a, b]$. Escrevemos

$$p = \sum_{i=1}^k [f(a_i) - f(a_{i-1})]^+, \quad n = \sum_{i=1}^k [f(a_i) - f(a_{i-1})]^-, \quad \text{e}$$
$$t = \sum_{i=1}^k |f(a_i) - f(a_{i-1})| = p + n \quad \text{e} \quad f(b) - f(a) = p - n$$

Sejam

$$P_a^b = \sup\{p : k \in \mathbb{N} \text{ e } a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b \text{ partição de } [a, b]\}$$

$$N_a^b = \sup\{n : k \in \mathbb{N} \text{ e } a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b \text{ partição de } [a, b]\}$$

$$T_a^b = \sup\{t : k \in \mathbb{N} \text{ e } a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b \text{ partição de } [a, b]\}$$

Dizemos que P_a^b , N_a^b e T_a^b são as variações positiva, negativa e total de f . É claro que

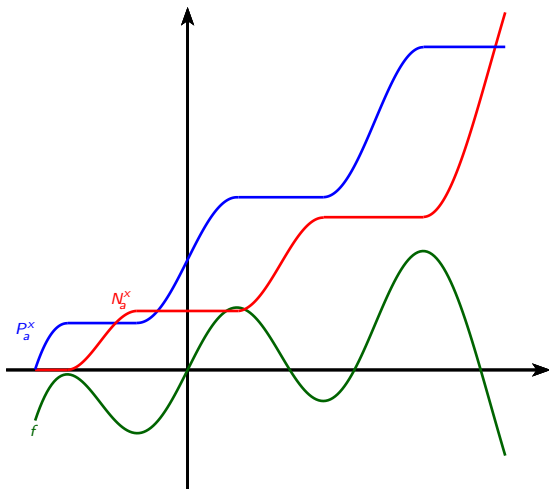
$$\max\{P_a^b, N_a^b\} \leq T_a^b \leq P_a^b + N_a^b \quad \text{e} \quad f(b) - f(a) = P_a^b - N_a^b$$

A função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é de variação limitada se $T_a^b < \infty$. Notação $f \in BV([a, b])$.

Funções Monótonas e Lipschitzianas são BV

Teorema

- 1) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitz contínua então $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é de variação limitada.
- 2) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona então $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é de variação limitada.
- 3) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é de variação limitada existem funções não-decrescentes $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(x) = g(x) - h(x)$.



Monotonicidade e Diferenciabilidade

Lema

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona, então f é diferenciável exceto possivelmente em um conjunto $E \subset [a, b]$ com $m^(E) = 0$.*

Lipschitz Continuidade e Diferenciabilidade

Corolário

*Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz contínua em I . Então f é diferenciável exceto possivelmente em um conjunto E com $m^*E = 0$.*

Corolário

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz contínua em I . Então f é diferenciável em um subconjunto denso de I .

Teorema

Seja I um intervalo aberto da reta e $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz contínua em I . Então g é continuamente diferenciável se, e somente se, para cada $x_0 \in I$,

$$\left| \frac{g(x_0 + s + h) - g(x_0 + s)}{h} - \frac{g(x_0 + h) + g(x_0)}{h} \right| \xrightarrow{|s|+|h| \rightarrow 0} 0. \quad (5)$$