A integral de Riemann-Stieltjes

Alexandre Nolasco de Carvalho
Universidade de São Paulo
São Carlos SP, Brazil

13 de Maio de 2024

Primeiro Semestre de 2024

Propriedades

Teorema

Se $f \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$, $f([a,b]) \subset [m,M]$ e $\phi:[m,M] \to \mathbb{R}$ é contínua então, $h=\phi\circ f \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$.

Prova: Dado $\epsilon>0$, como ϕ é uniformemente contínua em $[m,M]$, existe $0<\delta<\epsilon$ tal que $s,t\in[m,M]$, $|s-t|\leq\delta \Rightarrow |\phi(s)-\phi(t)|<\epsilon$. Como $f \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$, existe $\mathcal{P}=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\} \in \mathscr{P}_{[a,b]}$ tal que

$$U(\mathcal{P},f,\alpha)-L(\mathcal{P},f,\alpha)<\delta^2.$$

Se $r \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$ e $M_i^r=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} r(x)$, $m_i^r=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} r(x)$. Seja $A=\{i:1\leqslant i\leqslant n \text{ e } M_i^f-m_i^f<\delta\}$ e $B=\{i:1\leqslant i\leqslant n \text{ e } M_i^f-m_i^f\geqslant\delta\}$, então, para $i\in A$, a escolha de δ implica que $M_i^h-m_i^h\leqslant\epsilon$.

Para $i \in B, M_i^h - m_i^h \leqslant 2K$, onde $K = \sup_{t\in[m,M]} |\phi(t)|$. Logo, da escolha de $\mathcal{P}$,

$$\delta \sum_{i\in B} \Delta\alpha_i \leqslant \sum_{i\in B} \left(M_i^f - m_i^f\right) \Delta\alpha_i < \delta^2$$

e $\sum_{i\in B} \Delta\alpha_i < \delta < \epsilon$. Segue que

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P},h,\alpha)-L(\mathcal{P},h,\alpha) &= \sum_{i\in A} \left(M_i^h - m_i^h\right) \Delta\alpha_i + \sum_{i\in B} \left(M_i^h - m_i^h\right) \Delta\alpha_i \\ &\leqslant \epsilon[\alpha(b)-\alpha(a)] + 2K\delta < \epsilon[\alpha(b)-\alpha(a)+2K]. \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário segue que $h \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$.$\square$

Teorema

(a) *Se* $f_1 \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ *e* $f_2 \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ *então* $f_1 + f_2 \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$, $c \cdot f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ *para todo* $c \in \mathbb{R}$, *e*

$$\int_a^b (f_1 + f_2)\, d\alpha = \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha,$$

$$\int_a^b cf d\alpha = c \int_a^b f d\alpha.$$

(b) *Se* $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ *em* $[a, b]$ *então*

$$\int_a^b f_1 d\alpha \leqslant \int_a^b f_2 d\alpha$$

(c) *Se* $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ *e* $c \in (a, b)$ *então* $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, c]) \cap \mathscr{R}(\alpha, [c, b])$, *e*

$$\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha$$

(d) *Se* $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a,b])$ *e if* $|f(x)| \leqslant M$ *então*

$$\left|\int_a^b f d\alpha\right| \leqslant M[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

(e) *Se* $f \in \mathscr{R}(\alpha_1, [a,b])$ *e* $f \in \mathscr{R}(\alpha_2, [a,b])$ *então* $f \in \mathscr{R}(\alpha_1 + \alpha_2, [a,b])$ *e*

$$\int_a^b f d\,(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2$$

se $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a,b])$ *e* $\mathbb{R} \ni c > 0$ *então* $f \in \mathscr{R}(c\alpha, [a,b])$ *e*

$$\int_a^b f d(c\alpha) = c\int_a^b f d\alpha$$

Prova: Se $f = f_1 + f_2$ e $\mathcal{P}$ é qualquer partição $[a, b]$, temos

$$L(\mathcal{P}, f_1, \alpha) + L(\mathcal{P}, f_2, \alpha) \leqslant L(\mathcal{P}, f, \alpha)$$
$$\leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha) \leqslant U(\mathcal{P}, f_1, \alpha) + U(\mathcal{P}, f_2, \alpha).$$

Se $f_1 \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ e $f_2 \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$ e $\epsilon > 0$ existem $\mathcal{P}_j \in \mathscr{P}([a, b])$ $(j = 1, 2)$ tal que

$$U(\mathcal{P}, f_j, \alpha) - L(\mathcal{P}, f_j, \alpha) \leqslant U(\mathcal{P}_j, f_j, \alpha) - L(\mathcal{P}_j, f_j, \alpha) < \frac{\epsilon}{2},$$

onde $\mathcal{P}$ é refinamento comum a $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$. Logo

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) - L(\mathcal{P}, f, \alpha) < \epsilon.$$

Segue que $f \in \mathscr{R}(\alpha, [a, b])$.

Com esta mesma $\mathcal{P}$ remos

$$U\left(\mathcal{P}, f_j, \alpha\right) < \int_a^b f_j d\alpha + \frac{\epsilon}{2} \quad (j = 1, 2)$$

e

$$\int_a^b f d\alpha \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha) < \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha + \epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário conluímos que

$$\int_a^b f d\alpha \leqslant \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha$$

Este mesmo resultado para $-f_1$ e $-f_2$, nos dá a desigualdade reversa e a igualdade está provada.

As provas das demais afirmativas são semelhantes (exercício). Na parte (c) a estratégia é considerar refinamentos que contém o ponto c, na aproximação da integral.$\square$

Integrais de Riemann-Stieltjes e Séries

Definição

A função degrau unitário I é definida por

$$I(x) = \begin{cases} 0 & (x \leqslant 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$

Teorema

Se $a < s < b$, $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$ é contínua em s, e $\alpha(x) = I(x-s)$, então

$$\int_a^b f \, d\alpha = f(s)$$

Prova: Considere as partições $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, onde $x_0 = a$, e $x_1 = s < x_2 < x_3 = b$. Então

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) = M_2, \quad L(\mathcal{P}, f, \alpha) = m_2.$$

Como f é contínua em s, vemos M_2 e m_2 convergem para $f(s)$ quando $x_2 \to s$. $\square$

Teorema

Se $c_n \geqslant 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ é convergente, $\{s_n\}$ é uma seqüência de pontos distintos em (a, b),

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I\left(x - s_n\right)$$

e f é contínua em $[a, b]$ então

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f\left(s_n\right).$$

Prova: Por comparação a série é convergente para cada x. Sua soma $\alpha(x)$ é claramente monótona, $\alpha(a) = 0$ e $\alpha(b) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

Dado $\epsilon > 0$ escolha $N \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{N+1}^{\infty} c_n < \epsilon$. Faça

$$\alpha_1(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n I\left(x - s_n\right), \quad \alpha_2(x) = \sum_{N+1}^{\infty} c_n I\left(x - s_n\right).$$

Dos teoremas anteriores

$$\int_a^b f d\alpha_1 = \sum_{i=1}^{N} c_n f\left(s_n\right)$$

Como $\alpha_2(b) - \alpha_2(a) = \sum_{N+1}^{\infty} c_n < \epsilon$

$$\left|\int_a^b f d\alpha_2\right| \leqslant M\epsilon$$

onde $M = \sup|f(x)|$. Como $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, segue que

$$\left|\int_a^b f d\alpha - \sum_{i=1}^{N} c_n f\left(s_n\right)\right| \leqslant M\epsilon$$

Se fazemos $N \to \infty$, obtemos o resultado.$\square$

Mudança de variável

Teorema

Sejam $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ *não-decrescente e diferenciável com* $\alpha' \in \mathscr{R}([a, b])$ *e* $f \in \mathscr{B}([a,b], \mathbb{R})$*. Então* $f \in \mathscr{R}(\alpha,[a,b])$ *se, e só se,* $f\alpha' \in \mathscr{R}([a,b])$*. Neste caso*

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx.$$

Prova: Dado $\epsilon > 0$ existe $\mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathscr{P}([a, b])$ tal que

$$U\left(\mathcal{P}, \alpha'\right) - L\left(\mathcal{P}, \alpha'\right) < \epsilon \qquad (\bullet)$$

Do Teorema do Valor Médio existe $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$\Delta\alpha_i = \alpha'\left(t_i\right)\Delta x_i, \;\; 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Se $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ então

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i)\right| \Delta x_i < \epsilon.$$

Seja $M = \sup |f(x)|$. Como

$$\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\, \Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\, \alpha'(t_i)\, \Delta x_i$$

segue que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\, \Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\, \alpha'(s_i)\, \Delta x_i\right| \leqslant M\epsilon. \qquad (*)$$

Em particular,

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(s_i\right) \Delta\alpha_i \leqslant U\left(\mathcal{P}, f\alpha'\right) + M\epsilon$$

para todas as escolhas $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$, de modo que

$$U(\mathcal{P}, f, \alpha) \leqslant U\left(\mathcal{P}, f\alpha'\right) + M\epsilon.$$

O mesmo argumento nos leva de $(*)$ a

$$U\left(\mathcal{P}, f\alpha'\right) \leqslant U(\mathcal{P}, f, \alpha) + M\epsilon.$$

e portanto

$$\left|U(\mathcal{P}, f, \alpha) - U\left(\mathcal{P}, f\alpha'\right)\right| \leqslant M\epsilon. \qquad (\dagger)$$

Agora note que $(\bullet)$ permanece válida se $\mathcal{P}$ for substituída por um refinamento. Logo $(\dagger)$ também permance válida. Concluímos que

$$\left|\overline{\int_a^b} f d\alpha - \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)dx\right| \leqslant M\epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)dx$$

para qualquer $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{R})$. A igualdade para as integrais inferiores segue da mesma maneira de $(*)$.$\square$